

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

*Read not to contradict and confute; nor to believe and take for granted;
nor to find talk and discourse; but to weigh and consider.*

Francis Bacon (1561-1626)

*The Author desires me to add,
that the misconception of some of his critics on this matter
has induced him to insert in his dialogue with the Sphere,
certain remarks which have a bearing on the point in question,
and which he had previously omitted
as being tedious and unnecessary.* Edwin A. Abbott (1838-1926)

Le séminaire TAD & IDD, animé par Yves Chevallard, a une double ambition solidaire : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment des professions de professeur, de formateur et de chercheur en didactique. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des praxéologies mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 16 h 30 à 18 h 30, la séance pouvant être suivie à distance par visioconférence.

→ Séance 7 – Jeudi 10 juillet 2014

FONDEMENTS DE LA DIDACTIQUE (SUITE)

1. L'expérience d'apprendre

a) J'ai évoqué la dernière fois ce que j'ai appelé des *situations d'apprentissage obligé*. Ce type de situations sociales me paraît constituer un *objet refondateur de la didactique*. J'ai noté de telles situations $x \not\vdash \wp$, ce qui signifie : « la personne x a l'obligation ($\not\vdash$) d'apprendre l'œuvre $\wp$ ». Bien entendu, on considère aussi le cas où une situation de ce type s'impose à

une institution I , ce qui s'écrira $I \not\approx \emptyset$. Mais j'ai cru devoir souligner surtout que, tous tant que nous sommes, nous avons peu ou prou été habitués à identifier la lettre $\emptyset$ figurant dans l'énoncé $x \not\approx \emptyset$ comme renvoyant à un « détail », si décisif soit-il, d'une œuvre beaucoup plus vaste, *plutôt qu'à cette œuvre elle-même* – derrière cette lettre, nous verrons par exemple « la notion de base » plutôt que « l'algèbre linéaire ».

b) Je voudrais d'abord éclairer ce point clé par une observation des plus communes. Dans le cadre de l'émission « Touche pas à mon poste ! » animé par Cyril Hanouna sur la chaîne D8, le mercredi 25 juin 2014, les chroniqueurs présents débattent de l'émission « Qui sera le prochain Grand pâtissier » proposée sur France 2 la veille (le mardi 24 juin 2014). Le débat est animé. L'un des chroniqueurs, Gérard Louvin, le « doyen » de la bande, intervient dans l'échange pour faire entendre un son de cloche un rien différent. Voici l'échange qui importe ici :

Gérard Louvin. Moi j'ai regardé jusqu'au bout parce que ça m'intéresse un peu la pâtisserie. Mais je peux comprendre que ça n'intéresse pas.

Cyril Hanouna. Il faut rappeler aux téléspectateurs que vous avez été...

GL. J'ai été pâtissier mais... Je veux dire par là que... Là, même moi j'ai été exclu...

CH. C'est quoi sa spécialité ? C'est quoi votre spécialité ?

GL. Oh ben je peux faire c'que vous voulez !

La question posée par l'animateur – « C'est quoi votre spécialité ? » – est symptomatique de ces apprentissages portant sur un « détail » propres à la vie « privée ». Dans un tel contexte, la personne interrogée *ex abrupto* répondra peut-être que sa spécialité, c'est, disons, la tarte Tatin. Entendez : il ne sait faire *que* cela ou presque. Or, devenir pâtissier suppose, peut-on croire, d'apprendre à faire *tous* les gâteaux – à des exceptions régionales près – que l'on trouve dans une boulangerie-pâtisserie « banale ». Il ne suffit pas de savoir faire une ou deux pâtisseries ! Cet exemple montre, je crois, que *l'exigence sociale d'apprendre* se distingue de nos menus apprentissages par la « massivité » (certes variable) de l'enjeu didactique, qui est lui-même socialement déterminé, ce qui ne signifie pas qu'il soit à tout coup optimal par rapport au système changeant des conditions et contraintes sous lesquelles l'apprenant devra exercer son art (l'art de s'exprimer en anglais à l'accueil d'un centre pour séminaires et colloques internationaux, de gérer la comptabilité d'une petite entreprise, de piloter un avion de tourisme, de s'installer comme menuisier, etc.).

c) Lorsqu'on observe une situation du type $x \not\approx \emptyset$, plusieurs issues sont possibles. J'en retiendrai trois, toutes désenchanteresses. Premier cas : x se

soustrait à l'obligation qui lui est faite, soit volontairement, soit du fait de certaines circonstances biographiques. Deuxième cas : x s'engage dans l'apprentissage de $\wp$, y échoue et finit par renoncer. Troisième cas : x réussit mais, du fait de certaines circonstances biographiques, perd plus ou moins rapidement la maîtrise de $\wp$ ainsi acquise. Ce dernier cas, monté en épingle à propos de la lecture-écriture avec la notion d'*illettrisme*, est, hélas !, très général : la plupart des adultes ont perdu les quelques fruits des « gros apprentissages » qu'ils ont eu à assumer, notamment à l'école. On s'étonne que x ne sache plus *lire* couramment. On devrait s'étonner aussi qu'il ne sache plus effectuer la somme $\frac{3}{7} + \frac{2}{9}$ ou qu'il ne dispose pas des moyens de comprendre ce passage écrit en « simple English » selon l'encyclopédie en ligne *Wikipedia* :

Functional illiteracy means that a person is not able to read, write, and do math well in regular life. Someone who is fully illiterate can not read, write, or do math at all. Such people have perhaps never learnt how to read or write; perhaps they did not need to. A person who is functionally illiterate is different – at some point in their lives, these people were taught reading and writing skills. For different reasons, adults who are functionally illiterate try to avoid writing and reading as much as possible. That way, a person who is functionally illiterate may be able to write their name, but it is very difficult for them to write more than a few sentences.

(Sur l'écriture *can not*, que Word souligne comme grammaticalement douteuse, on pourra aller voir à l'adresse <http://www.oxforddictionaries.com/words/cannot-or-can-not>.)

d) Ce qu'il faut mettre au cœur de la didactique, c'est donc « l'expérience d'apprendre » ou plutôt « l'expérience d'*avoir à* d'apprendre ». Pour cela, les didacticiens – et, en fait, les citoyens en général – doivent se garder d'associer automatiquement une telle obligation d'apprentissage *avec la seule recherche d'une école idoine*, qui enseignerait l'œuvre concernée et nous libèrerait ainsi de tout autre souci que celui du *didactique scolaire*. À côté du recours éventuel – qu'on peut espérer intelligent et efficace – de x à l'hétéronomie didactique que peut proposer une telle école, ou plutôt concomitamment de ce recours, qui tend dangereusement à devenir une fin alors qu'il devrait être seulement un *moyen* d'apprendre, il convient de considérer la mobilisation par x de ses capacités d'*autonomie didactique*, y compris dans l'exploitation de ce moyen éventuel qu'est un enseignement scolaire en bonne et due forme, afin d'étudier efficacement l'œuvre « à apprendre ». En tout cela, nous devons revenir constamment au principe

selon lequel, dans l'analyse curriculaire, *les besoins de formation sont premiers par rapport à l'offre scolaire de formation.*

2. Besoins praxéologiques, apprentissages forcés

a) Je voudrais compléter un peu les éléments précédents en empruntant à mon exposé du 6 juin dernier dans le cadre du séminaire ACADIS. La considération des situations d'apprentissage obligé nous oblige à retrouver certains types de situations sociales que nous avons – me semble-t-il – beaucoup délaissés. Un premier type est celui des situations d'*autodidaxie*. Pour l'illustrer, je prendrai l'exemple de la *Nouvelle encyclopédie autodidactique Quillet*, « publiée en collaboration par un comité d'universitaires », dont l'édition de 1958, en quatre volumes, comporte une intéressante préface d'Aristide Quillet (1880-1955), sur laquelle je vais revenir. Que peut-on y apprendre si l'on en a besoin – « besoin » et non « envie » ? Voici le « plan général » de l'ouvrage, dont la lecture paraîtra peut-être interminable au spécialiste amoureux des seuls « détails » :

TOME 1

Pour réussir dans la vie

Philosophie

Psychologie – Logique – Sociologie – Morale.

Grammaire française

Phonétique – Vocabulaire – Parties du discours – Syntaxe – Analyse.

Synonymes

Arithmétique

Mesure des grandeurs – Les quatre opérations – Fractions – Rapports et proportions, etc. – Corrigé des exercices.

Algèbre

Nombres algébriques – Expressions algébriques – Équations du premier et du second degrés – Logarithmes – Corrigé des exercices.

Règle à calcul

Géométrie

Définitions – Géométrie plane – Géométrie dans l'espace – Corrigé des exercices.

Trigonométrie

Lignes trigonométriques – Résolution des triangles – Corrigé des exercices.

Anatomie et

Physiologie animales

La cellule – L'homme – Classification animale – Vertébrés – Invertébrés.

Botanique

Cellules et tissus végétaux – Divisions de la plante – Organes de reproduction des phanérogames – Angiospermes et gymnospermes – Cryptogames.

TOME II

Physique

Notions de mécanique – Pesanteur – Statique des liquides – Statique des gaz – Chaleur – Acoustique – Optique – Électricité et magnétisme – Mesures et unités – Corrigé des exercices.

Chimie

Chimie générale – Chimie minérale – Chimie organique – Corrigé des exercices.

Atome

Géologie

Phénomènes internes et externes – Principales roches – Grandes divisions géologiques.

Géographie

Géographie générale – Géographie physique, humaine, économique – La France – Les pays d'Outre-Mer de l'Union Française – L'Asie – L'Océanie – L'Afrique – L'Amérique – L'Europe – Atlas.

TOME III

Astronomie

Le ciel – Les étoiles – Système solaire – L'hypothèse de Laplace – La Terre – Le Soleil – La Lune – Les marées – Les éclipses – Étoiles filantes – Bolidés.

Histoire générale

L'époque préhistorique – L'Antiquité – Le Moyen Age – Histoire moderne – Histoire contemporaine – Résumés chronologiques.

Droit public

De 1871 à 1940 : Principes généraux – Organisation des pouvoirs publics – Organisations administrative, judiciaire, financière, militaire, universitaire – Le présent : Constitution de la IV^e République – Haute-Cour de Justice.

Littérature française

Les écrivains et les œuvres des origines au XVII^e siècle – L'Age classique – Dix-septième siècle – Dix-huitième siècle – La période romantique – Les écrivains et les œuvres après le Romantisme – Dix-neuvième siècle – Nos contemporains et leurs œuvres.

Littératures anciennes

Littérature grecque : Période ionienne, éolienne et dorienne – Période attique – L'hellénisme – Littérature latine : Période archaïque – Période de formation – Période de perfection – Période de décadence.

Littératures étrangères

Littératures de l'Extrême-Orient, de l'Inde, orientales, juive, celtiques, nordiques, slaves, hongroise, romanes, anglo-saxonnes, allemande, des pays bilingues.

Musique

Étude générale – Nombreux exercices dans tous les tons – Principes généraux de l'exécution musicale – Musique vocale et instrumentale – Orchestre symphonique – Histoire de la musique.

TOME IV

Sténographie

Méthode Prévost-Delaunay – Cours complet théorique et pratique.

Comptabilité

Commerce, Commerçants, Intermédiaires – Des commerçants dans leurs rapports avec les banquiers – Méthodes – Bordereau d'escompte – Comptes courants à intérêts – Opérations et documents – Bureau des marchandises – Bureau du portefeuille – Comptabilité auxiliaire – Comptabilité générale – Étude méthodique de la partie double – Monographie comptable – Comptabilité agricole – Complément de droit commercial – Sociétés – Faillite, règlement judiciaire, banqueroute – Transports – Colis postaux – Transports maritimes et aériens – Bourse des valeurs – Bourse des marchandises.

Langues vivantes

Grammaire anglaise – Grammaire espagnole – Grammaire allemande – Grammaire arabe – Vocabulaires – Thèmes – Versions – Exercices – Corrigés.

Dessin

Dessin à vue – Généralités sur le dessin – Perspective d'observation – Applications pratiques – Compositions décoratives – Dessins géométriques – Constructions planes – Représentation des solides – Applications pratiques du dessin géométrique – Peinture à l'huile – Sculpture – Modelage et moulage.

Éducation physique et sportive

Les méthodes d'éducation physique – La méthode française – Les sports.

Code de la route

Parcourir cette table des matières permet à chacun de s'imaginer dans la situation où il aurait à apprendre telle ou telle œuvre ϕ de quelque ampleur – par exemple « la botanique », ou « la musique », ou « la comptabilité ».

b) Aristide Quillet a vécu sans doute de telles situations. Tôt orphelin et, par obligation, autodidacte, il a dû apprendre « par lui-même » ainsi qu'il le précise dans les premières lignes de sa préface :

Voici le livre que son éditeur, autodidacte lui-même, a voulu et a réalisé, parce qu'il en a personnellement reconnu les nécessités et les vertus. Au sortir de l'école primaire, placé dans des conditions telles qu'il n'a pu bénéficier de l'enseignement direct des maîtres, il a dû s'assurer à lui-même, par ses propres moyens, cette instruction indispensable à la vie de toute personne qui a la légitime ambition de prendre sa place dans la société.

Dans ce cas, l'obligation d'apprendre découlerait *de la société telle qu'elle est*, qui impose ses exigences à qui aurait « la légitime ambition » de s'y faire une place.

c) Des situations du type $x \nmid \phi$ surviennent notamment lorsque la personne x se trouve aux prises avec une situation de changement « historique », par exemple dans son activité professionnelle. Ainsi en va-t-il certainement pour les professeurs dans le long terme d'une carrière. Cette situation peut être provoquée artificiellement dans le cours d'une formation « formelle ». Ainsi a-t-il existé autrefois, dans la formation des enseignants d'université, un dispositif qui pouvait permettre d'apprécier leur capacité à affronter une situation du type $x \nmid \phi$. Il s'agit de ce qu'on appelait la *thèse complémentaire*, qui s'ajoutait à la thèse dite *principale*. Cette dernière fut longtemps appelée thèse *française*, la thèse complémentaire étant qualifiée de thèse *latine*, parce qu'elle s'écrivait traditionnellement en latin. La rédaction en latin ne fut plus exigée après 1903 (la dernière thèse en latin sera soutenue en 1911 : voir <http://www.inrp.fr/she/theses/scripts/index.php>). La thèse de 3^e cycle, instituée (sous un autre nom) dans les années 1950, pouvait valoir thèse complémentaire. Mais celle-ci disparut complètement à partir de 1969 : le BOEN n° 6 du 6 février 1969 (p. 446) indique que « la thèse complémentaire n'est plus exigée en vue des doctorats d'État ès lettres et ès sciences, ni la discussion de questions qui pouvait être substituée à la seconde thèse dans les facultés des sciences » (<http://bbf.enssib.fr/consulter/bbf-1969-03-0122-005>).

① Il est vrai que l'obligation imposée au candidat au doctorat de s'affronter à un sujet extérieur à son domaine de spécialité avait été depuis longtemps

critiquée, y compris dans les textes officiels. Une circulaire du 18 juillet 1840 relative au doctorat ès lettres indiquait ainsi :

L'article déjà cité du décret de 1808 voulait que l'une des deux thèses portât sur la rhétorique et la logique, l'autre sur la littérature ancienne. L'article 35 du statut du 16 février 1810 avait déjà amélioré cette disposition, en substituant la philosophie à la rhétorique et à la logique, et la littérature ancienne et moderne à la seule littérature de l'antiquité. Un inconvénient subsistait encore ; un candidat, voué à un genre d'études spéciales, était condamné à produire des thèses sur des matières souvent étrangères à ses travaux. Par exemple, le jeune philologue était obligé de faire une de ses deux thèses sur la philosophie, le philosophe sur la littérature, et le futur candidat à l'agrégation d'histoire, sur la philosophie et la littérature ancienne et moderne. [...] J'estime donc que l'épreuve du doctorat sera fortifiée, et qu'elle attirera des candidats déjà avancés en âge et en possession d'une certaine réputation, lorsque cette épreuve pourra porter sur deux sujets distincts, il est vrai, mais tous deux analogues aux études et à la carrière du candidat. J'espère aussi, que de cette manière, les thèses deviendront de plus en plus des dissertations sérieuses et approfondies, honorables à l'Université, utiles à la science.

② Malgré cela, il ne serait pas difficile d'illustrer la situation « intéressante » (du point de vue qui nous importe ici) que créait souvent la thèse complémentaire (ou, en sciences, la « proposition de la faculté »). Je prendrai ici le cas du sociologue Raymond Boudon (1934-2013), tel qu'il le rapporte lui-même dans un entretien avec Vincent de Gaulejac publié en 2007 chez L'Harmattan (Coïncidence entre sujet et objet, *Changement social*, 11, 19-62).

Une fois rentré au CNRS, il s'agissait pour moi de définir le sujet des deux thèses qu'il me fallait mener à bien pour obtenir le doctorat d'État. J'étais désormais sur les rails. Je voyais le CNRS comme une bourse de thèse qui me permettrait ensuite de rentrer dans l'enseignement supérieur. La thèse principale devait être imprimée. Étant donné l'investissement que j'avais fait du côté des mathématiques sociales, je me suis dit qu'il ne serait pas mauvais d'essayer de boucler la boucle en faisant une thèse sur les fonctions et les usages des mathématiques dans les sciences sociales. J'ai donc entrepris de faire une thèse qui devait s'intituler *L'analyse mathématique des faits sociaux*, avec l'objectif de déterminer les fonctions, les usages, l'utilité des mathématiques dans les sciences sociales ; d'essayer de faire un diagnostic pour savoir si ces usages étaient appelés à se développer ou pas, et dans quel sens.

Il me fallait aussi définir un sujet de thèse complémentaire. Je dois dire qu'il était assez pénible d'avoir à mettre simultanément en chantier deux entreprises dont il était entendu qu'elles devaient être de nature différente. Je n'avais pas de projet bien précis. C'est Lazarsfeld qui m'a soufflé mon sujet. Il doutait beaucoup que le structuralisme de Lévi-Strauss ait une véritable valeur scientifique. Il avait l'impression que le structuralisme était une théorie étrange, typiquement européenne dans le mauvais sens du terme, plus brillante que solide. Lazarsfeld lui-même était d'origine viennoise. Il avait reçu une formation scientifique. La montée du national-socialisme l'avait amené à s'installer aux États-Unis. Il m'a suggéré de regarder exactement ce que les structuralistes voulaient dire quand ils parlaient de « structure ». Par son caractère critique, au sens que Kant ou que la critique littéraire donne au mot « critique », ce projet me séduisit. J'ai donc décidé d'en faire le sujet de ma thèse complémentaire. Elle a été imprimée sous le titre *À quoi sert la notion de structure ?* (pp. 30-31)

③ En sciences, le sujet de la thèse complémentaire proposé au candidat mettait à l'épreuve sa capacité, non pas tant de créer des connaissances nouvelles que de maîtriser rapidement, avec un degré de profondeur respectable, un domaine qui ne lui était pas forcément familier. On trouve ainsi sur Internet (à l'adresse <http://www.lamsade.dauphine.fr/~litwin/Levy/LISTE%20DES%20TRAVAUX%20ET%20PUBLICATIONS.pdf>) le cas d'un professeur d'informatique de l'université Paris-Dauphine, Gérard Lévy, né en 1936, qui passe ses thèses en février 1971 à la Faculté des sciences de Paris : la thèse principale a pour titre « Constructions et dénombrements en logique à plusieurs valeurs » tandis que la thèse complémentaire s'intitule « Propriétés linéaires et matricielles des graphes et réseaux ».

3. Jusqu'où apprendre une œuvre ?

a) Supposons que l'on ait $x \notin \wp$ et qu'il s'agisse là d'un « gros » apprentissage en perspective. Que peut-il se passer ? Quelle peut être l'économie et quelle est l'écologie de semblables gros apprentissages qui constituent une part essentielle *du didactique* dans nos sociétés ? Ces questions renvoient à de grands *types de problèmes* qu'il appartient à la didactique d'étudier, quand bien même elle aurait jusqu'ici regardé le monde didactique surtout à travers les lunettes du professeur. Dans la perspective ainsi ébauchée, de nombreuses questions surgissent. Une première question est celle de la genèse de « l'intimation d'apprendre » : c'est une question à laquelle on a apporté jusqu'ici quelques éléments de réponse. Mais une deuxième question est demeurée tout à fait implicite : que signifie, quantitativement, si l'on peut dire, « apprendre l'œuvre $\wp$ » ?

① L'étude d'une grande œuvre, et même d'une petite, semble souvent *interminable* ; et, de fait, elle l'est presque toujours. (Je songe ici, bien sûr, à l'article de Freud intitulé en allemand *Die Endliche und die unendliche Analyse*, ce qu'on a pu traduire par « Analyse terminée et analyse interminable ».) En vérité, l'une des difficultés didactiques qui assaillent nos sociétés tient à ce que l'étude d'une œuvre est, à l'instar d'une psychanalyse, fréquemment *arrêtée trop tôt* – c'est même là, aujourd'hui, une *pathologie didactique endémique dans les apprentissages scolaires* (au sens restreint de cet adjectif) parce que l'étude s'arrête souvent à peine passée la première rencontre. Comme en psychanalyse, il faut – il *faudrait* – faire de nouvelles « tranches » pour compléter le travail d'étude réalisé. En règle générale, donc, nos études « scolaires » (au sens large) mettent le pied à l'étrier mais s'arrêtent souvent bien trop tôt.

② C'est là, en vérité, un phénomène très général : lorsqu'une institution s'offre à organiser l'étude d'une œuvre $\wp$ pour une certaine catégorie de personnes, elle fixe en même temps un terme à cette étude, en désignant, à la fois par le moyen d'un *programme d'études* et par le biais d'une *évaluation* qui lui est propre, le moment où elle considèrera que l'apprentissage de $\wp$ est, *pour ce qui la concerne*, terminé. L'un des dangers de cette manœuvre est de laisser accroire que l'apprentissage en question est terminé *absolument*, alors qu'il est simplement *arrêté*, interrompu, *en suspens*. L'un des désagréments permanents d'une telle configuration résulte de ce qu'un apprentissage interrompu conduit bien souvent à une maîtrise insuffisante de $\wp$ *relativement à un certain projet social* dont « l'apprenant » x souhaite devenir l'un des acteurs. Un bon exemple à cet égard est celui de l'orthographe du français, une œuvre dont l'étude *raisonnable* semble devoir être indéfiniment poursuivie.

b) On peut se risquer à parler de maîtrise *adéquate* d'une œuvre $\wp$ *relativement à une certaine activité sociale*. Mais il s'agit là d'une notion normative, et donc polémique, et non pas d'une notion « objective » ; d'une notion dont l'objectivation est à la fois nécessaire et jamais assurée.

① Plusieurs expressions existent en français pour tenter de préciser les choses. Ainsi parlera-t-on par exemple de « se débrouiller en » – en informatique, en anglais, en statistique, en typographie, en épistémologie, etc. Mais attention ! « Se débrouiller » a un sens tout relatif. Il en va de même de l'expression plus ancienne « avoir une teinture de ». Parlant de la mère de Sénèque, Diderot, cité par Littré, écrit (dans *l'Essai sur les règnes de Claude et de Néron*, 1778) : « Helvia était instruite ; son père lui avait donné une assez forte teinture des beaux-arts. » Le *TLFi* indique que, à propos du critique littéraire Ferdinand Brunetière (1849-1906), connu pour être

furieusement réactionnaire, l'écrivain et critique dramatique Jules Lemaître (1853-1914), qui ne l'était pas moins, écrivait (dans *Les Contemporains. Études et portraits littéraires*, 1885) : « M. Brunetière est fort savant ; il a mieux qu'une teinture de toutes choses. Sur le XVII^e et le XVIII^e siècle, son érudition est imperturbable. » On le voit, on joue avec le mot : « une assez forte teinture », écrit l'un, « mieux qu'une teinture », note l'autre.

② Il existe en anglais une expression courante, dont le sémantisme est, non sans raison, quelque peu insaisissable (pour les anglophones eux-mêmes) : *to have a working knowledge of*. Le dictionnaire rédactionnel *Linguee* offre de ce flou sémantique une image frappante. D'une longue liste de citations proposées au lecteur (à l'adresse <http://www.linguee.fr/anglais-francais/traduction/working+knowledge.html>), j'extrais les variantes par lesquelles sont rendues trois expressions contenant le syntagme « working knowledge » :

A working knowledge of → une connaissance *pratique* de / des connaissances *opérationnelles* de / une connaissance *fonctionnelle* de / une *bonne* connaissance de / des connaissances *concrètes* sur

A fairly good working knowledge of → une *assez bonne* compréhension de

A good working knowledge of → une *bonne* connaissance de / une *bonne* connaissance *pratique* de

Le dictionnaire Macmillan en ligne propose de l'adjectif *working* l'explicitation suivante : « satisfactory for a particular purpose but not perfect or completely developed. » (http://www.macmillandictionary.com/dictionary/american/working#working_15) En vérité, l'expression *working knowledge* est un syntagme quasi figé, usité en particulier dans les offres d'emploi, ce qui ne laisse pas de plonger certains candidats dans des abîmes de réflexion. Le dictionnaire *Wiktionary* propose par exemple cette explicitation :

working knowledge

English

Noun

working knowledge (*uncountable*)

A knowledge of how to make something work without any deeper understanding of why it works, or of how to fix it if it breaks.

*Candidates must have a **working knowledge** of standard Windows applications.*

Mais voici maintenant une question posée par un chercheur d'emploi sur le site *Quora* (<http://www.quora.com/Job-Search/What-does-it-mean-to-have-a-working-knowledge-of-something>) :

Job Search: What does it mean to have a “working knowledge” of something?

For instance, a job description states: Working knowledge in Visual Basic desirable.

Does this mean the applicant must be able to program in Visual Basic off the top of his head or simply have familiarity with the language (e.g. took a class in Visual Basic but hasn't touched the language in a long time and would need to be refreshed)?

Le site ne propose qu'une réponse, qui se veut d'abord apaisante :

I'd take it to mean that you should have just enough knowledge to just get it to work. You don't need to know how to get that thing to do everything, or to do it with flying style; just know enough about the thing to get started with it fast, and get it to do many of the most basic functions right away.

Mais un second développement, qui sans doute se veut lui aussi rassurant, se révèle susceptible de faire renaître de cruelles interrogations :

In your example of Visual Basic, a person with working knowledge would be very familiar [with] the language and can remember how to write most of what he needs to program, and if he needs to refresh on some topics or functions, he knows how to find it and implement it quickly.

Ne pourrait-on traduire tout cela en disant que, au fond, avoir *a working knowledge* de quelque chose, c'est en connaître... *l'essentiel* ? Il y a ainsi, en ce point, *un nœud de difficultés*, avec des déplacements subtils, une imprécision peut-être irréductible, qui permet de tenter des coups de dés, voire d'instaurer des rapports de force qui, quelquefois, pourront tourner mal – mais pour qui ?

4. Écologie et économie de l'apprendre

a) Ce qui est en jeu dans ce qui précède est le degré d'extension et le degré d'approfondissement de l'apprentissage de l'œuvre étudiée. Un autre aspect doit aussi être signalé : c'est la *volatilité* de la connaissance acquise. Celle-ci dépend de beaucoup de facteurs – et notamment de ce que j'ai appelé le *contrat épistémique* régnant. Un facteur clé est en vérité le *temps* d'étude et son étalement dans la *durée*. Le linguiste Harald Weinrich a tout particulièrement fait l'éloge de la *lenteur* dans les apprentissages (Malbert, 1999) :

... il est assez facile et rapide d'apprendre assez d'anglais pour acheter un billet d'avion ou pour organiser une rencontre internationale en anglais. Pour vraiment apprendre n'importe quelle langue – y compris l'anglais ! – il faut du temps, beaucoup de temps. Ce n'est pas une affaire de jours, ni de mois, cela se mesure en années. (p. 27)

Weinrich rapporte ainsi avoir appris en un an le hongrois, assez bien pour lire des romans simples ; mais il confesse l'avoir ensuite oublié presque aussi vite ! Au reste, il regarde le mot *lenteur* (*Langsamkeit*) comme un quasi-synonyme de *culture* (*Kultur*).

b) Aux remarques précédentes il faut ajouter la mention de quelques notions clés : celles de *travail d'après-coup*, de *reprise*, de *refonte* d'une organisation praxéologique, qui scandent la temporalité du rapport didactique à une œuvre. Tout cela ne peut se faire avec, pour unique point d'appui, la seule « force d'âme » de x : comme tout ce qui est humain, cela suppose des *infrastructures* idoines et des *gestes superstructurels* adéquats. Sur tout cela, la didactique est interpellée : elle doit se pencher sur *l'expérience d'avoir à apprendre* dans la société d'aujourd'hui et rechercher des réponses à tout un ensemble de questions dont certaines ont été explicitées dans ce qui précède.

c) Revenons un instant à la *Nouvelle encyclopédie autodidactique* d'Aristide Quillet. Un tel ouvrage fut en son temps une contribution aux *infrastructures didactiques* permettant à x de répondre à l'obligation d'apprendre certaines œuvres. Comme vous le savez, j'ai introduit il y a peu la notion d'*encyclopédiste ordinaire* pour manifester ce fait que chacun de nous est appelé à être, précisément, un tel *encyclopédiste ordinaire* (Quillet était, lui, si l'on peut dire, un encyclopédiste « extraordinaire »).

① Qu'on me permette de le rappeler : étant donné une personne x et une œuvre $\wp$ (qui peut être tout un champ praxéologique $\mathcal{C}$), on désigne par *livre ordinaire de x de $\wp$* (ou de $\mathcal{C}$), et on note $L(x, \wp)$ (ou $L(x, \mathcal{C})$), la description et l'explication praxéologiques de $\wp$ (ou de $\mathcal{C}$) que x s'est constituées. On parlera de même du livre ordinaire de $\wp$ (ou de $\mathcal{C}$) de la position p dans l'institution I , ce qu'on notera $L_I(p, \wp)$ (ou $L_I(p, \mathcal{C})$), qui est donc le livre de $\wp$ (ou de $\mathcal{C}$) des personnes assujetties à la position p dans l'institution I . On pourra ainsi parler du « livre ordinaire de statistique » ou « d'anglais », ou « de psychologie », « d'informatique », « de typographie », etc., du chercheur en didactique en général et de tel chercheur en didactique en particulier.

② Il devrait être clair que, pour la plupart des personnes x et des institutions I , et pour la plupart des œuvres $\wp$ (et notamment pour la plupart des champs praxéologiques $\mathcal{C}$), les livres ordinaires $L(x, \wp)$ et $L_I(p, \wp)$ sont, à un

moment donné, quasi vides : $L(x, \wp) \approx \emptyset$ et $L(p, \wp) \approx \emptyset$. Ce sera le cas, par exemple, si $\wp$ est une langue peu répandue. Mais je reviens alors à la préface de Quillet ; il écrit ceci (en parlant de lui-même à la troisième personne) :

... cette instruction si précieuse, vaste ensemble de connaissances de tout ordre, éparse en de très nombreux livres dont il lui a fallu éprouver la qualité, la possibilité d'utilisation, il a dû la conquérir lentement et non sans de sérieuses difficultés.

C'est pourquoi, en pleine conscience des embarras, du temps dépensé, que suppose une semblable tâche, il a voulu épargner fatigues et recherches superflues à ceux qui, aujourd'hui en présence d'une situation qui fut la sienne, poursuivant le même but, ont les mêmes besoins et seront heureux qu'un des leurs, et qui les a bien compris, leur ait rendu la tâche infiniment plus facile, plus rapide, et tout assurée en ses résultats.

Quillet poursuit alors par ces mots (c'est moi qui souligne) : « Il a fallu, pour qu'une telle œuvre répondît entièrement à cette fin d'être l'instrument facile et complet de *l'éducation par le livre*, non seulement réunir en cette encyclopédie l'essentiel du savoir humain dans ses éléments les plus exacts... » L'important, ici, est cette expression glissée comme en passant dans sa phrase par l'auteur : *l'éducation par le livre*.

② Nous le savons : le livre *ne suffit pas* à faire une éducation praxéologique « complète ». Sauf exception, le livre rend l'œuvre $\wp$ présente, mais présente *in absentia*, à travers des discours, des schémas, des notations, etc. Il en permet la connaissance « livresque » Mais la connaissance de l'œuvre naît de la dialectique entre cette présence *in absentia* et l'absence *in praesentia* que l'on éprouve lorsque l'œuvre est là, devant vous, massive, mais muette ou, du moins, « qui ne vous parle pas (encore) ». Chaque fois, le dépassement de l'opposition entre présence *in absentia* et absence *in praesentia* est longuement, chèrement acquis : il s'accomplit lorsque l'œuvre étudiée devient enfin pour x « présente *in praesentia* ». Mais ce dépassement suppose, quoi qu'on fasse, le moment de l'absence *in praesentia*. Pour apprendre la cuisine, les livres de cuisine ne suffisent pas : il faut un jour pouvoir cuisiner... alors même *qu'on ne sait pas encore le faire !* Pour piloter un avion, il faut un jour pouvoir piloter... sans l'avoir jamais fait jusque-là. Et ainsi de suite.

③ C'est en ce point que « l'éducation par le livre » trouve ses limites. Il y a là un *grand problème de gestion sociale du didactique* et, tout particulièrement, des situations d'apprentissage imposé. C'est un problème qui se pose à une personne x qui étudie en autodidacte aussi bien qu'à une école qui lui

proposerait son aide pour étudier : x doit notamment pouvoir nouer et renouer autant que nécessaire un rapport avec « l'œuvre même » afin de l'étudier et de l'apprendre. Dans un temps où, très heureusement, les ressources disponibles pour chacun de nous se sont immensément accrues grâce à l'Internet, on ne peut oublier qu'il existe un monde *offline* (hors ligne) et que c'est en ce monde-là que *se joue une part essentielle du didactique*.

d) Nous sommes accoutumés à privilégier des apprentissages scolaires. Depuis des siècles, ceux-ci procèdent d'une *analytique* qui décompose préalablement l'œuvre à apprendre en morceaux minuscules et successifs. Ainsi sommes-nous portés à oublier que, de façon répétée, la plupart des personnes et des institutions sont confrontées souvent brutalement, sans préparation, à des situations d'apprentissage imposé. Ce type de situations doit être étudié par les didacticiens pour au moins deux raisons : tout d'abord, parce que c'est là une partie socialement cruciale du didactique, qui est notre objet d'étude, même si nous l'avons beaucoup délaissée au bénéfice du didactique « scolarisé » ; ensuite, comme moyen d'accroître notre connaissance du didactique où qu'il existe, y compris donc du didactique scolaire, en quelque type d'écoles que ce soit. Entre l'autodidaxie pure, qui n'existe pas, et l'hétérodidaxie passive souvent induite par les formations scolaires, il y a bien des formes (et des degrés) *d'aide à l'étude*, qu'il nous faut apprendre à (re)découvrir et à étudier du point de vue de leur efficacité didactique, tant au plan qualitatif que quantitatif.

MATHÉMATIQUES ET NON-MATHÉMATICIENS

1. Matheux et « pékins »

a) Pour les besoins de travaux en cours, j'ai avancé la distinction de trois catégories de citoyens, notées respectivement P_1 , P_2 et P_3 . La catégorie P_1 est composée des mathématiciens *stricto sensu*, ceux qui font des recherches en mathématiques, dont le nombre est, semble-t-il, compris entre 3000 et 4000 personnes environ – en 2010, la SMF comptait 2000 adhérents (http://fr.wikipedia.org/wiki/Société_mathématique_de_France) tandis qu'en 2009, la SMAI comptait, elle, quelque 1300 membres ([http://fr.wikipedia.org/wiki/Société_de_mathématiques_appliquées_et_industrielles_\(association_française\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Société_de_mathématiques_appliquées_et_industrielles_(association_française))), à quoi il conviendrait d'ajouter les membres de la SFdS – la société française de statistique – qui ne seraient pas membres de l'une des deux associations précédentes. La catégorie P_2 rassemble celles et ceux qui ont accompli – ou sont en train d'accomplir – des études supérieures en mathématiques ou des études fortement mathématisées : elle comprend ainsi les anciens élèves des CPGE, les professeurs de mathématiques, de physique, etc., qui ont conservé en général un équipement praxéologique en

mathématiques *en partie* opérationnel. Au moment où j'écris ces lignes, leur nombre m'est inconnu ; mais il est évidemment très supérieur à l'effectif de P_1 . L'union des catégories $P_1 \cup P_2$ rassemble ceux qu'on peut appeler « les matheux », par opposition aux « non-matheux », que regroupe la catégorie P_3 .

b) La distinction de « ceux de l'intérieur » (les *insiders*) et de « ceux de l'extérieur » (les *outsiders*), la distinction entre « nous » et « les autres » est classique dans les sociétés humaines. Une tripartition prévaut parfois : ainsi y avait-il à Rome les hommes libres, les affranchis, esclaves libérés, et les esclaves. Semblablement, le *TLFi* cite Balzac (*Correspondance*, 1837) écrivant que les militaires de Napoléon « divisaient le monde en *soldats*, en *pékins*, en ennemis, et (...) traitaient les pékins en ennemis et les ennemis en pékins ». Le même *TLFi* précise qu'on appelle pékin (ou péquin) « celui qui n'appartient pas à un milieu particulier » et reproduit alors ce passage à la fois banal dans sa thématique générale et éclairant pour notre sujet (Philippe Sizaïre, *Le Parler des gens de mer, Vie du langage*, 1971, p. 384) :

Quand le second maître de manœuvre Lestrope, chargé d'enseigner le matelotage aux fistots [élèves de 1^{re} année] de l'École navale, entendit ceux-ci parler de « ramer avec des rames », de « tirer sur une corde » (...), il se mit fort en colère (...). Ces mots sont ceux, en effet, du « dehors », des non-initiés, et qui trahissent aussitôt le *pékin*. Il n'y a pas de *corde*, à bord, hormis la corde de la cloche. Il n'y a que des *cordages*, ou mieux des *filins*.

Pour ce qui nous concerne, nous distinguerons d'abord la population $P_1 \cup P_2$ (celle des « hommes libres » et des « affranchis ») de la population P_3 (celle des « esclaves », supposés prisonniers de l'ignorance mathématique). La distinction de P_1 et P_2 , quoique utile en certaines situations, est, par rapport à mon propos, seconde. Bien entendu, les jugements de valeur qui affleurent dans le vocabulaire parodique utilisé ici ne saurait être reçus par le didacticien, quand bien même celui-ci se voudrait didacticien *des mathématiques*.

c) On sait que, dans nos sociétés, se dire mathématicien, ou grammairien, ou biologiste, ou historien *ne va pas de soi*. Dans son organisation, la société impose souvent qu'un tel nom ne soit alloué à une personne x que sous des conditions dirimantes de *titre*, qu'on ne saurait en principe usurper. Il s'agit là d'une extension d'un schéma qui permet par exemple de définir la notion d'*usurpation de fonction*, délit que le code pénal français définit comme étant « le fait, par toute personne agissant sans titre, de s'immiscer dans l'exercice d'une fonction publique en accomplissant l'un des actes réservés au titulaire de cette fonction ». J'emprunte ce passage à l'article « Usurpation de fonction » de *Wikipédia*, qui ajoute ceci :

Les faits sont caractérisés si une personne, agissant sans titre (conféré par l'État), exerce une fonction publique et accomplit un des actes réservés au titulaire de cette fonction. Il en est ainsi par exemple d'une personne qui, prenant indûment la qualité de policier, réalise un contrôle d'identité.

① Dans le cas qui nous occupe, il faut parler sans doute d'*usurpation de qualité*, qu'il y ait ou non infraction légale. Pourtant, en bien des cas, on voit les institutions et les collectifs humains passer outre cet interdit et réaliser en leur sein des attributions officieuses de fonctions qui permettent, en quelque sorte « en interne », de parler de l'angliciste de l'institution, du mathématicien du groupe, du mécanicien de la bande, du comptable de l'équipe, etc., sans pour cela que les personnes ainsi qualifiées aient nécessairement le titre usuellement requis par la société pour entériner une telle qualification.

② J'ai introduit jadis une notion qui peut facilement être généralisée, en désignant le professeur de mathématiques des lycées comme un « mathématicien des lycées » (quand bien même, *par ailleurs*, il appartiendrait à P_1), et de même pour le collège ; et aussi en désignant le professeur des écoles – l'instituteur d'autrefois – comme « mathématicien des écoles » – et aussi, bien sûr, comme « grammairien des écoles », etc. Bien entendu, le membre d'un département de mathématiques universitaire est un « mathématicien des universités », etc. Si je rappelle ces notions et distinctions, c'est pour introduire maintenant une autre idée, fondamentales pour le travail en cours.

d) Quelle que soit la personne x et le champ praxéologique $\mathcal{C}$, l'encyclopédie ordinaire de x contient un livre de $\mathcal{C}$ – un livre de grammaire, un livre d'orthographe, un livre d'histoire, etc. Elle contient évidemment un livre de mathématiques, $L(x, \mathbb{N})$. J'appelle génériquement $\mathcal{C}_I$ -iste les x qui sont reconnus « spécialistes de $\mathcal{C}$ » par l'institution I (même si telle autre institution J venait à leur refuser le titre de $\mathcal{C}_J$ -iste). Si $\mathcal{C}$ est « la biologie », x sera dit – dans le langage de I – « biologiste » ; si $\mathcal{C}$ est « la chimie », x sera dit « chimiste », etc. Lorsque $\mathcal{C}$ est « la physique », on dit que x est physicien (mais il est un *physicist* en anglais). De même, lorsque $\mathcal{C}$ est « les mathématiques », x sera dit « mathématicien ». Ce que je veux alors souligner – la chose, certes, devrait être évidente ! –, c'est que x peut avoir un livre $L(x, \mathcal{C})$ très copieux sans pour autant être un $\mathcal{C}_I$ -iste pour aucune institution I ayant pignon sur rue. Pour le dire autrement, x peut « savoir de l'anglais » sans être « angliciste », de l'histoire sans être historien, des mathématiques sans être mathématicien, etc., pour aucune institution connue (même si une institution K *ad hoc* peut un jour trouver avantage à reconnaître x comme $\mathcal{C}_K$ -

iste pour tel ou tel champ praxéologique $\mathcal{C}$). Je vous invite à faire une expérience de pensée (*thought experiment*, *Gedankenexperiment*) en imaginant en ce point que les citoyens assument, *contre* un grand nombre de pouvoirs établis sans doute, leur liberté de « s'y connaître en $\mathcal{C}$ » sans pour cela jouir du titre de $\mathcal{C}_I$ -iste ni le revendiquer : cela changerait bien des choses !

2. Une problématique de rupture

a) Considérons un ensemble d'institutions $\mathcal{S}$ et un champ praxéologique $\mathcal{C}$. On peut en général distinguer trois catégories d'acteurs dans $\mathcal{S}$ à propos de $\mathcal{C}$, tripartition analogue à celle que j'ai proposée lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{M}$. Il existe en particulier dans $\mathcal{S}$ une catégorie de $\mathcal{C}_s$ -istes qu'on tient pour se situer *au plus haut niveau* (dans $\mathcal{S}$) dans la maîtrise de $\mathcal{C}$ (notamment lorsqu'ils étendent et développent le champ praxéologique $\mathcal{C}$ « en faisant de la recherche »). C'est eux qui constituent la catégorie qu'on notera $P_1(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ et qu'on regardera comme les « savants » en matière de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{S}$ (on pourra distinguer parmi eux les « grands savants », voire les « très grands savants », et aussi les « demi-savants », etc.). La catégorie $P_2(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ est formée des acteurs de $\mathcal{S}$ qui auraient pu devenir des $\mathcal{C}_s$ -istes, sans toutefois appartenir à $P_1(\mathcal{S}, \mathcal{C})$. Enfin, la catégorie $P_3(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ est celle des acteurs de $\mathcal{S}$ qui ne sauraient, sans un changement radical dans leur équipement praxéologique, être regardés comme des $\mathcal{C}_s$ -istes.

b) Une question clé est, génériquement, celle-ci : que peut être le rapport $R(x, \mathcal{C})$ lorsque $x \in P_3(\mathcal{S}, \mathcal{C})$? Quelles conditions et contraintes déterminent les possibles à cet égard ? Je voudrais insister ici sur les conditions – qui sont souvent autant de contraintes pour $x \in P_3(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ – qu'engendrent collectivement $P_1(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \cup P_2(\mathcal{S}, \mathcal{C})$. J'ai illustré la dernière fois, lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{M}$, un phénomène massif : pour les membres de $(P_1 \cup P_2)(\mathcal{S}, \mathcal{C})$, parler de $\mathcal{C}$ aux membres de $P_3(\mathcal{S}, \mathcal{C})$, c'est leur parler du rapport à $\mathcal{C}$ des membres de $P_1(\mathcal{S}, \mathcal{C})$, rapport qu'on pourrait noter $R_s(p_{P_1(\mathcal{S}, \mathcal{C})}, \mathcal{C})$. On a vu que le rapport $R(x, \mathcal{M})$ ou même le rapport $R(p, \mathcal{C})$, où p est la position qu'occupe x dans une institution I , semblent n'intéresser les membres de $(P_1 \cup P_2)(\mathcal{S}, \mathcal{M})$, où $\mathcal{S}$ est « la société », qu'autant qu'ils pensent pouvoir y introduire des éléments de connaissance relatifs au rapport $R_s(p_\mu, \mathcal{M})$, où p_μ est la position dans $\mathcal{S}$ des membres de $P_1(\mathcal{S}, \mathcal{M})$.

c) Il y a trois ou quatre décennies, en un temps où l'homosexualité était encore largement taboue, on évoquait régulièrement la notion d'homosexualité *latente*, notion introduite par Freud dans un texte de 1920 intitulé « Psychogenèse d'un cas d'homosexualité féminine » (voir à l'adresse <http://psycha.ru/fr/freud/1920/psychogenese.html>). Dans son *Dictionary*

of *Psychology* (1985), ouvrage à la fois précis et teinté d'humour, Arthur S. Reber écrivait ceci :

latent homosexuality Although psychodynamic theories of personality and sexuality go to great lengths to explain this term it seems clear that a latent homosexual is merely a heterosexual.

Le discours dominant du monde mathématique à l'adresse des non-mathématiciens (ou des peu-mathématiciens) paraît soutenu par ce postulat : tout non-mathématicien est un « *mathématicien latent* » ou, si le temps n'est plus de faire son *coming-out* mathématique, un mathématicien *manqué*. Si vous ne faites pas des mathématiques, semble-t-on dire, vous en ferez ; et si vous n'en faites pas, c'est vraiment très dommage. La croyance en la « mathématicité latente » de chacun permet évidemment de ne pas affronter cette horreur : l'absence apparente de libido à l'endroit des mathématiques.

d) En quoi la problématique développée dans le travail en cours (avec Sineae Kim) est-elle en rupture avec ce point de vue dominant ? En usant des notations introduites ici, je dirai qu'on s'y préoccupe de l'écologie et de l'économie des rapports institutionnels du type $R_s(p_\phi, \mathbb{N})$, où p_ϕ est la position occupée par les membres de $P_3(\mathbb{S}, \mathbb{N})$ en tant que tels, et de leurs possibles dynamiques historiques. De fait, dans l'évolution de tels rapports, les rapports « mathématiciens » – ceux de P_1 et de P_2 – ne peuvent que jouer un rôle clé puisque c'est là que, massivement, on trouve « le mathématique ».

① Dans un article intitulé « Mathematical Education », paru en 1990 dans les *Notices of the AMS* (37, 844-850), William Thurston (1946-2012), qui reçut la médaille Fields en 1982, se remémorait ceci (<http://arxiv.org/pdf/math/0503081.pdf>) :

I remember as a child, in fifth grade, coming to the amazing (to me) realization that the answer to 134 divided by 29 is 134/29 (and so forth). What a tremendous labor-saving device! To me, '134 divided by 29' meant a certain tedious chore, while 134/29 was an object with no implicit work. I went excitedly to my father to explain my major discovery. He told me that of course this is so, a/b and a divided by b are just synonyms. To him it was just a small variation in notation. (p. 5)

Cette découverte juvénile – l'auteur était alors en CM2 – est certainement typique du style de travail que chacun doit conduire sur son propre rapport aux objets mathématiques – et sans doute sur son rapport à tout objet ! Thurston poursuit ainsi son récit :

One of my students wrote about visiting an elementary school and being asked to tutor a child in subtracting fractions. He was startled and sobered to see how much is involved in learning this skill for the first time, a skill which had condensed to a triviality in his mind.

Mathematics is full of this kind of thing, on all levels. It never stops.

The hard-earned and powerful tools which are available almost unconsciously to mathematicians, but not to students, make it hard for mathematicians to learn from their students. This puts a psychological barrier in the way of listening fully to students.

It is important in teaching mathematics to work hard to overcome this barrier and to get out of the way enough to give students the chance to work things out for themselves.

On voit que Thurston est conscient de la distance qui le sépare, au départ et continuellement, du point de vue du peu-mathématicien apprenant des mathématiques. Une des leçons de ce témoignage est résumé dans une phrase : « Mathematics is full of this kind of thing, on all levels. It never stops. » J'ajoute : la vie intellectuelle, en général, est pleine de ce genre de choses et n'arrête pas de l'être.

② S'ils veulent aider les membres de P_3 à progresser en mathématiques, les membres de $P_1 \cup P_2$ doivent sans doute *s'excentrer* de leur position habituelle, sans pour autant se penser en *bienfaiteurs* de $P_3(\mathbb{S}, \mathbb{N})$, en *évergètes*, en *do-gooders*. Je n'approfondirai pas cette remarque ici.

e) La question centrale à considérer peut être formulée comme suit.

Quelles sont les conditions et contraintes qui permettraient

1) non pas de faire « aimer les mathématiques » (sentiment qui appartient à l'intimité de la personne et ne doit donc pas être manipulé), mais de favoriser une équanimité bienveillante à leur endroit, autorisant ainsi la personne x à entretenir un commerce éventuellement profitable avec les mathématiques utiles à sa vie ;

2) de faire que l'évolution de l'équipement mathématique d'une personne x lui assure de pouvoir répondre adéquatement aux questions qui se posent à elle dans les situations qu'elle vit dans les différentes positions p où elle se retrouve ?

Bien entendu, cette question est d'autant plus pertinente que le discours dominant, en provenance de $P_1 \cup P_2$, enjoint aux membres x de P_3 « d'aimer les mathématiques », sans pour cela s'inquiéter de les aider à acquérir même

l'équipement *minimal* pour « traiter mathématiquement » les mondes auxquels ceux-ci ont affaire.

① Je reviens ici, par deux exemples, sur l'état de dénuement mathématique actuel de P_3 . Le premier exemple m'a été communiqué par Marianna Bosch.

❶ Dans le tableau ci-après, que j'extrais d'un tableau plus complet mis en ligne par le ministère espagnol de l'éducation (<http://www.mecd.gob.es/educacion-mecd/areas-educacion/universidades/estadisticas-informes/estadisticas/precios-publicos.html>), on lit dans la première colonne la liste des différentes communautés autonomes espagnoles ; dans les deuxième et troisième colonnes, les prix moyens par « crédit », dans chacune des communautés (plus la UNED, l'*Universidad Nacional de Educación a Distancia*, université publique espagnole qui compte plus de 250 000 étudiants), qui sont les prix payés par les étudiants s'engageant dans les études universitaires (« Enseñanzas de Grado » ou licence en quatre années, suivies d'une seule année de master) pour les années 2013-2014 et 2012-2013 :

Comunidad Autónoma	Enseñanzas de Grado	
	Precio Medio por Comunidad Autónoma	
	Curso 2013-2014	Curso 2012-2013
Andalucía (1)	12,62	12,49
Aragón	19,75	19,07
Asturias	17,13	17,13
(Principado de) (*)		
Balears (Illes)	17,92	17,07
Canarias	15,21	15,21
Cantabria	13,50	13,06
Castilla y León (2)	23,11	22,79
Castilla-La Mancha	15,24	15,52
(3)		
Cataluña (4)	33,52	33,52
Comunitat	20,39	20,19
Valenciana (*)		
Extremadura (5)	14,74	14,39
Galicia	11,89	11,89

Madrid (Comunidad de) (6)(7)(8)	30,33	25,22
Murcia (Región de) (*)	15,58	15,26
Navarra (Comunidad Foral de)	19,22	18,97
País Vasco (*)	16,81	16,41
Rioja (La)	18,37	18,09
U.N.E.D.	16,18	15,91
Precio Medio de todas las Comunidades	18,42	17,90

Comment le prix moyen « de todas las Comunidades », de 18,42 € en 2013-2014 et de 17,90 € en 2012-2013, a-t-il été calculé ? Dans la feuille de calcul Excel mise en ligne par le ministère, on peut calculer la moyenne des valeurs inscrites au-dessus (elles figurent dans les lignes 8 à 25 et sont donc au nombre de... 18) ; on trouve ceci :

16,81	16,41
18,37	18,09
16,18	15,91
18,42	17,90
18,42	17,90

Les valeurs indiquées sont ainsi simplement les *moyennes arithmétiques* des 18 valeurs « par communauté » ! Bien entendu, ce mode de calcul est grossièrement erroné, en un sens qui peut être des plus « intéressants » pour le ministère : en accordant le même poids à de *petites* communautés à prix moyen *bas* qu'à de *grosses* communautés à prix moyen *élevé*, il fournit – nous allons le vérifier – un prix moyen « national » plus faible qu'il n'est véritablement. Ce qui manque, ici, c'est la notion de *moyenne pondérée*.

❷ Je voudrais expliciter la chose un peu plus. Considérons une série de valeurs que je note $v_1, v_2, \dots, v_n$. Leur moyenne est donnée par

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n}.$$

Supposons que les p premières valeurs $v_1, v_2, \dots, v_p$ aient pour moyenne v' et que les $n - p$ valeurs restantes, soit $v_{p+1}, \dots, v_n$, aient pour moyenne v'' . On a

$$v' = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_p}{p} \text{ et } v'' = \frac{v_{p+1} + v_{p+2} + \dots + v_n}{n - p}$$

de sorte qu'on a $v_1 + v_2 + \dots + v_p = pv'$ et $v_{p+1} + v_{p+2} + \dots + v_n = (n - p)v''$. Pour calculer $\bar{v}$, on peut alors procéder ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n} = \frac{(v_1 + v_2 + \dots + v_p) + (v_{p+1} + v_{p+2} + \dots + v_n)}{n} \\ &= \frac{pv' + (n - p)v''}{n} = \frac{pv'}{n} + \frac{(n - p)v''}{n} = \frac{p}{n} v' + \frac{n - p}{n} v''. \end{aligned}$$

On a donc finalement : $\bar{v} = \frac{p}{n} v' + \frac{n - p}{n} v''$. Supposons que, par exemple, on ait $n = 120\,000$, $p = 45\,000$ et donc $n - p = 75\,000$; on a ainsi $\frac{p}{n} = \frac{45\,000}{120\,000} = 0,375$ et $\frac{n - p}{n} = \frac{75\,000}{120\,000} = 0,625$, en sorte que $\bar{v} = 0,375 v' + 0,625 v''$ et non pas $\bar{v} = \frac{v' + v''}{2} = 0,5 v' + 0,5 v''$. D'une façon générale, on a :

$$\begin{aligned} \bar{v} - \underline{v} &= \left(\frac{p}{n} v' + \frac{n - p}{n} v'' \right) - (0,5 v' + 0,5 v'') = \frac{p}{n} v' - 0,5 v' + \frac{n - p}{n} v'' - 0,5 v'' \\ &= \left(\frac{p}{n} - 0,5 \right) v' + \left(\frac{n - p}{n} - 0,5 \right) v'' = \left(\frac{p}{n} - 0,5 \right) v' + \left(0,5 - \frac{p}{n} \right) v'' \\ &= \left(\frac{p}{n} - 0,5 \right) v' - \left(\frac{p}{n} - 0,5 \right) v'' = \left(\frac{p}{n} - 0,5 \right) (v' - v''). \end{aligned}$$

Supposons que l'on ait $p > n - p$, soit $2p > n$ et donc (en divisant les deux membres par $2n$), $\frac{p}{n} > \frac{1}{2} = 0,5$ ou $\frac{p}{n} - 0,5 > 0$. Si l'on suppose que $v' > v''$, il vient donc : $\bar{v} - \underline{v} = \left(\frac{p}{n} - 0,5 \right) (v' - v'') > 0$. Comme annoncé plus haut, la valeur affichée, soit $\underline{v} = \frac{v' + v''}{2}$, sous-évalue donc la vraie valeur moyenne, qui est $\bar{v}$.

Si, par exemple, $\frac{p}{n} = 0,75$ et $v' = 1,4 v''$, en sorte que l'on a

$$\underline{v} = \frac{v' + v''}{2} = 0,7 v'' + 0,5 v'' = 1,2 v''$$

et

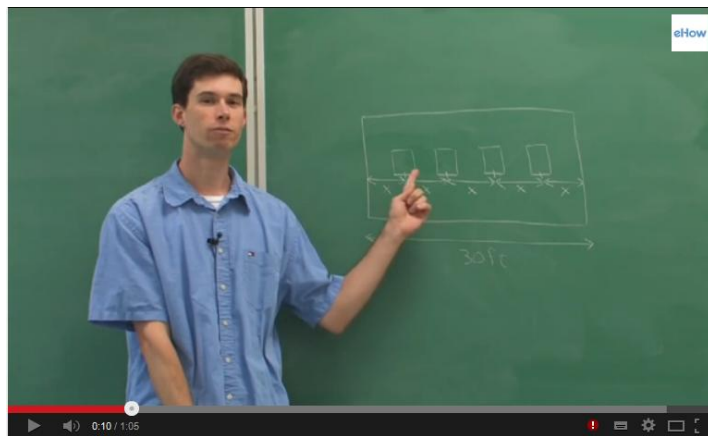
$$\bar{v} = \underline{v} + \left(\frac{p}{n} - 0,5 \right) (v' - v'') = 1,2 v'' + 0,25 \times 0,4 v'' = 1,3 v''$$

il vient :

$$\frac{\bar{v} - \underline{v}}{\underline{v}} = \frac{1,3 \, v'' - 1,2 \, v''}{1,2 \, v''} = \frac{0,1 \, v''}{1,2 \, v''} = \frac{1}{12} \approx 8 \, \%.$$

Ainsi, la vraie valeur $\bar{v}$ est ici de 8 % supérieure à la valeur indiquée $\underline{v}$.

② Je vais revenir sur le *fait même* de mener à bien les calculs précédents. Mais je voudrais maintenant m'arrêter sur un autre exemple, dont l'occasion nous est fournie par une vidéo qu'on trouvera en ligne sur le site YouTube à l'adresse <http://www.youtube.com/watch?v=hDf8NEAWYCw>. Un formateur-présentateur y explicite une certaine technique relative à un type de tâches qui surgit dans l'exercice du métier de menuisier.



Voici ce que dit ce formateur :

Hi! I'd like to give you a quick example of how mathematics might come into play in carpentry. So suppose that we have a wall that we're building and we need to space four windows equally across that wall. Let's say that our wall is 30 feet wide. Well, in order to equally space the windows, we simply need to take the length of the wall and divide it by one more than the number of windows that we have. So that would go like this:

$$\frac{30 \text{ ft}}{4+1}$$

We've got a thirty-foot wall with four windows so we gonna divide 30 by one more than the number of windows that we have:

$$\frac{30 \text{ ft}}{4+1} = \frac{30 \text{ ft}}{5} = 6 \text{ ft}$$

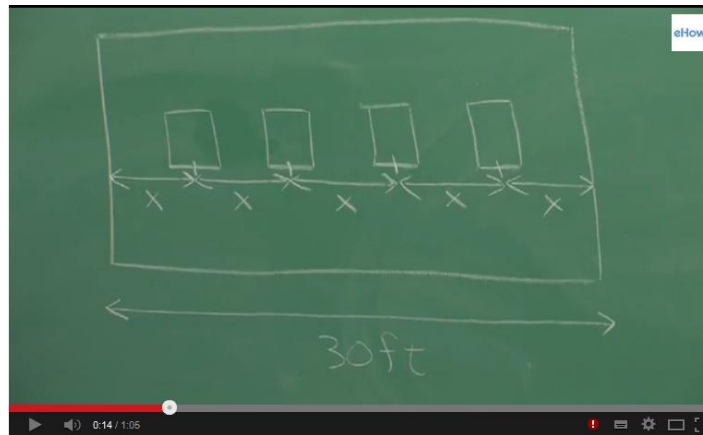
Thus we end up with six feet. Well we need to center our windows at six-foot intervals along the wall.

Il s'agit là, donc, d'un exemple de « mathématiques de la menuiserie » (*carpentry*).

① L'exemple semble très simple : il s'agit de préciser comment centrer des fenêtres régulièrement espacées le long d'un mur. La longueur d de l'intervalle entre les centres de deux fenêtres successives est donnée, nous dit-on, par une certaine *règle* (énoncé par le formateur) que l'on peut aussi exprimer par la *formule*

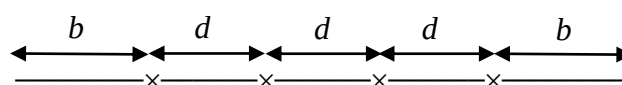
$$d = \frac{L}{n + 1}$$

où L est la longueur du mur et où n est le nombre de fenêtres à installer.



② Trois faits sont frappants. Tout d'abord, il s'agit exemplairement de pourvoir à certains besoins mathématiques des menuisiers, besoins que, dans $P_1 \cup P_2$, on trouverait sans doute modestes au point de les ignorer sans façon. Ensuite, cela est fait d'une façon mathématiquement minimaliste, en particulier sans emploi de *lettres* et donc sans emploi de *formules littérales* (telle celle écrite un peu plus haut). Enfin, la technique donnée par la règle « Take the length of the wall and divide it by one more than the number of windows » n'est nullement *justifiée*. Cette technique a ici un pur statut de *recette* – c'est-à-dire, je le rappelle, de « chose que l'on reçoit ».

③ Reprenons le problème. On suppose un mur de longueur L où l'on doit installer n fenêtres successives de largeur ℓ . Le schéma ci-après a été dessiné en supposant $n = 4$. En le lisant de gauche à droite, on désigne par b la distance du bord du mur au centre de la première fenêtre (à gauche) et du bord du mur au centre de la dernière fenêtre et par d la distance entre les centres de deux fenêtres consécutives.



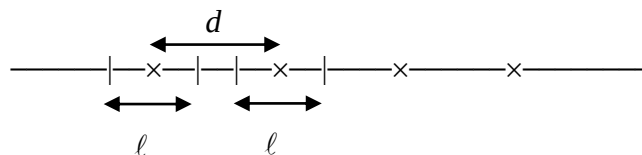
On a ici $b + 3d + b = L$, soit $2b + 3d = L$. Si, comme cela est fait dans la vidéo, on suppose que $b = d$, alors il vient $5d = L$ et on a donc, comme dans la vidéo,

$$d = \frac{L}{5}.$$

Dans le cas général de n fenêtres, chacune des fenêtres ayant une fenêtre à sa droite (soit $n - 1$ fenêtres, car l'ultime fenêtre n'est pas comptée) est séparée d'elle par la distance d . On a donc $2b + (n - 1)d = L$ et par suite :

$$d = \frac{L - 2b}{n - 1}.$$

On a le schéma suivant :



Supposons que l'on veuille qu'entre deux fenêtres il y ait une distance f supérieure ou égale à une valeur h . On a

$$f = d - \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2} = d - \ell = \frac{L - 2b}{n - 1} - \ell.$$

L'inégalité $f \geq h$ s'écrit donc $\frac{L - 2b}{n - 1} - \ell \geq h$, soit $\frac{L - 2b}{n - 1} \geq \ell + h$. Cette dernière inégalité s'écrit encore $n - 1 \leq \frac{L - 2b}{\ell + h}$ ou $n \leq 1 + \lfloor \frac{L - 2b}{\ell + h} \rfloor$. Si $L = 8$ m et si l'on prend $b = 1$ m, $\ell = 1,2$ m et $h = 40$ cm, on devra donc avoir

$$n \leq 1 + \lfloor \frac{6 \text{ m}}{1,2 \text{ m} + 40 \text{ cm}} \rfloor = 1 + \lfloor 3,75 \rfloor = 4.$$

Dans ce cas, on pourra installer au plus 4 fenêtres et, pour $n = 4$, la distance d entre deux fenêtres successives vaudra $6 \text{ m}/4$, soit $1,5$ m.

f) Plusieurs observations peuvent être faites à propos des deux exemples précédents. Ce qui les réunit d'abord, c'est qu'ils font apparaître un *besoin mathématique* déterminé de certaines personnes et de certaines institutions, même si, dans le premier cas, ce besoin objectif est apparemment ignoré, ce qui est un premier trait distinctif. Cette différence est corrélée, me semble-t-il, à une autre : dans le premier cas, en effet, il semble ne pas exister, autour des pratiques analysées plus haut, d'institution suffisamment « coagulée » pour se préoccuper des besoins spécifiques de formation de ses sujets – il faudrait mener, à cet égard, une enquête appropriée. Dans le second cas, en revanche, il existe un métier ancien, géré par une corporation de fait et de

droit, en sorte que le problème étudié dans la vidéo évoquée semble bien repéré.

① À titre d'illustration de ce « fait institutionnel », voici un extrait, intitulé « Locating Windows and Doors », d'une page Web intitulée *Carpentry Math* (on la trouvera à l'adresse suivante : <http://www.carpentry-pro-framer.com/carpentry-math.html>) :

Often you will be required to locate two or more evenly spaced windows in a single room or wall. The first step is to determine if the windows are centered in the room or from the outside corners. The trick to using carpentry math to locate multiple, evenly spaced, windows is to divide the space by one more number than you have windows. For example, 2 windows = divide by 3, 3 windows = divide by four, and so on.

Let's just say you have to put 5 windows in a 24' wall centered from the outside corners. Here are the steps I would take, divide 24' by 6. **24 divided by 6 = 4**. The 4' measurement is to the center of the window, not the edge. Next measure in 4' from each corner and make a mark, then measure what you have between these two marks. It should be 16'. If this is so then your carpentry math is correct and you can now lay out the rest of the windows on 4' centers.

Là encore, on aura noté le caractère de pure *recette* de la technique proposée : l'auteur parle de truc, d'astuce (« The trick... is to divide the space by one more number than you have windows »), là même où il y a une explication simple reposant sur l'égalité $n + 1 = n - 1 + 2$, qui suppose simplement une once de mathématiques en plus.

② Ce dernier exemple met encore une fois en évidence un fait qui semble massif : les pratiques mathématiques du métier (ou de l'activité, pour le premier des deux exemples) n'ont pas franchi la frontière qui séparait traditionnellement l'*arithmétique* de l'*algèbre*, frontière dont le passage est marqué traditionnellement par l'apparition, à côté des chiffres, de *lettres* assumant le rôle de *paramètres* et se muant en *inconnues* et en *variables* selon le cas. Une telle situation de stase historique ne permet guère de s'affranchir des recettes traditionnelles (comme celle rencontrée à nouveau ici), qui sont des techniques sans véritables technologies et qui, pour cela, ne peuvent guère être « travaillées » : ainsi privées de descendance, elles se figent dans une immobilité caractéristique.

③ Une remarque encore doit être faite à propos du cas de la moyenne pondérée. Alors que la question des fenêtres appartient spécifiquement au monde de la menuiserie, la question des moyennes pondérées a accédé à

une bien plus grande visibilité. C'est ainsi que l'on trouve un article intitulé « Moyenne pondérée » dans *Wikipédia*, avec des articles correspondants dans un assez grand nombre de langues. Mais voici aussi ce que découvrirait le non-mathématicien qui tenterait de l'utiliser pour s'instruire :

Moyenne pondérée



Cet article est une **ébauche** concernant les **probabilités** et la **statistique**.
 Vous pouvez partager vos connaissances en l'améliorant (**comment ?**) selon les recommandations des [projets correspondants](#).

La **moyenne pondérée** est la **moyenne** d'un certain nombre de valeurs affectées de coefficients.

En **statistiques**, considérant un ensemble de données,

$$M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\},$$

et les **poids** non-négatifs correspondants,

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\},$$

la **moyenne pondérée** $\bar{m}$ est calculée suivant la formule :

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i m_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \text{ quotient de la somme pondérée des } m_i \text{ par la somme des poids;}$$

soit

$$\bar{m} = \frac{\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_3 m_3 + \dots + \alpha_n m_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n}.$$

Lorsque tous les poids sont égaux, la moyenne pondérée est identique à la **moyenne arithmétique**. Alors que la moyenne pondérée a des propriétés similaires à celles de la moyenne arithmétique, elle a cependant quelques propriétés non intuitives, telles que par exemple celles du [paradoxe de Simpson](#).

Le lecteur intéressé pourra choisir de s'avancer plus avant dans l'exploration de la notion de moyenne pondérée – en allant voir par exemple ce qu'est le « paradoxe de Simpson », à qui il est utile de le connaître, etc. Mais on voit que ce texte, qui se situe *de l'autre côté de la frontière* entre arithmétique et algèbre – ou, pour le dire plus concisément, de la frontière chiffres/lettres – ne permet guère au profane, de par sa brutalité ostensive, une initiation facile à la notion de moyenne pondérée et à son usage. Le choc ne serait pas moins marqué avec la version en espagnol de l'article, intitulée « Media ponderada », comme le lecteur pourra s'en assurer par lui-même. Dans la séance 2 du vendredi 14 février 2014, j'avais évoqué un « essay » intitulé « Advice on using Wikipedia for mathematics self-study ». On y lit notamment ceci : « Wikipedia is a reference site, not a website directly designed to teach any topic. » L'avertissement, on le voit, n'est pas purement rhétorique. Je vous souhaite d'excellentes vacances !

That's all, folks!