

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

*The Author desires me to add,
that the misconception of some of his critics on this matter
has induced him to insert in his dialogue with the Sphere,
certain remarks which have a bearing on the point in question,
and which he had previously omitted
as being tedious and unnecessary. Edwin A. Abbott (1838-1926)
Le lendemain, Aymery prit la ville. Victor Hugo (1802-1885)*

Le séminaire TAD & IDD, animé par Yves Chevallard, a une double ambition solidaire : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment des professions de professeur, de formateur et de chercheur en didactique. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des praxéologies mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 16 h 30 à 18 h 30, la séance pouvant être suivie à distance par visioconférence.

→ Séance 4 – Vendredi 9 mai 2014

UNE ÉTUDE DE CAS : LE CALCUL DES GRANDEURS

1. Une calculatrice « cachée »

a) J'ai exposé la dernière fois quelques éléments relatifs à un travail que j'ai tenté avec des élèves de sixième autour de la question : *Que permet de faire la calculatrice Google ?* J'ai indiqué que cette calculatrice ne faisait pas l'objet de beaucoup de commentaires « officiels ». Il existe un article de *Wikipédia* (en français) intitulé « Calculatrice Google », qui, en ce 9 mai 2014, n'a pas été mis à jour depuis le 10 août 2012 ! On y trouve par exemple ceci (qui résulte d'une enquête dont le détail n'est pas précisé) :

- Google connaît les règles de priorité des opérateurs mathématiques. Toutefois il est conseillé d'utiliser des **parenthèses ()** pour ordonner les opérations.
- En revanche, il ne faut **pas utiliser de crochets []**.
- Il est par ailleurs recommandé d'utiliser une **étoile *** pour effectuer la multiplication de deux facteurs.
- Le **point .** ou la **virgule,** peuvent être utilisés indifféremment (à votre convenance) comme séparateur décimal, mais il ne faut pas utiliser deux séparateurs différents dans une même expression, sinon on n'obtient pas de résultat.
- Il ne faut **pas utiliser de séparateur de milliers** non plus (ni point, ni espace, ni apostrophe).
- La calculatrice distingue les **minuscules** des **MAJUSCULES**. À l'exception de certaines constantes, entrez vos expressions en **minuscules**, en particulier pour les unités.
- Une fonction peut être appelée soit en utilisant des parenthèses : **ln(3)**, soit en utilisant un espace : **ln 3**.
- Enfin, on peut forcer Google à évaluer une expression en ajoutant le signe **égal =** à la fin de cette dernière. Dans tous les cas, on n'obtient de résultat que si l'expression peut être évaluée (par exemple : $1/0=$ ou $\log(0)=$ ne retournent rien).

L'article cité est en français ; on notera qu'il n'existe *que* dans cette langue. On ne sera pas davantage étonné qu'il n'y soit pas fait mention de calculs *avec unités*.

b) Dans un autre document, proposé, lui, sur le site *Comment ça marche* (<http://www.commentcamarche.net/faq/814-google-fonction-calculatrice>), la mention de calculs *avec unités* n'apparaît que négativement, dans cette mise en garde : « Les calculs impossibles ou erronés ne renvoient pas de résultat (ex. $5/0$ ou $2 \text{ meters} + 4 \text{ joules}$). » En vérité, il semble que la quasi-totalité des documents consultables sur Internet ignorent presque entièrement les possibilités dont j'ai montré l'exploitation lors de la séance précédente, tel le calcul du volume d'un parallélépipède de 1,24 m de long, 8,7 cm de large et 11 mm de hauteur, calcul pour lequel la calculatrice de Google fournit le résultat en litres :

(1,24 m) * (8,7 cm) * (11 mm) =
1,18668 litre

Rappelons que, pour obtenir le résultat en centimètres cubes (par exemple), on peut soit demander le calcul de l'expression (sans dimension)

$$(1,24 \text{ m} * 8,7 \text{ cm} * 11 \text{ mm}) / \text{cm}^3,$$

soit utiliser les possibilités de *conversion* qu'offre la calculatrice de Google en présentant la requête :

« 1,24 m * 8,7 cm * 11 mm en cm³. »

On obtient respectivement ce qui suit :

$((1,24 \text{ m}) * (8,7 \text{ cm}) * (11 \text{ mm})) / (\text{cm}^3) =$ $1\ 186,68$	$(1,24 \text{ m}) * (8,7 \text{ cm}) * (11 \text{ mm}) =$ $1\ 186,68 \text{ cm}^3$
---	--

b) La place à nos yeux démesurée que prend, dans la civilisation de langue anglaise, qui n'est toujours pas *fully decimalized*, le problème ubiquitaire de la *conversion d'unités* refoule et dissimule le problème des *unités dans les calculs*. Sous le titre « How to Use Google's Hidden Calculator. Calculate, Measure, Convert, and More », un document (dû à Marziah Karch) précise ceci (<http://google.about.com/od/googlepowersearches/qt/calculatorqt.htm>) :

Convert and Measure

Google can calculate and convert many common measurements, so you could find out how many ounces are in a cup.

oz in a cup

Google's results reveal that **1 US cup = 8 US fluid ounces**. You can use this to convert just about any measurement to any other compatible measurement.

12 parsecs in feet

37 degrees kelvin in Fahrenheit

You can also calculate and convert in one step. Find out how many ounces you have when you have 28 times two cups.

28*2 cups in oz

Google says that **28 * 2 US cups = 448 US fluid ounces**. Remember, because this is a computer based calculator, you must **multiply with the * symbol**, not an X.

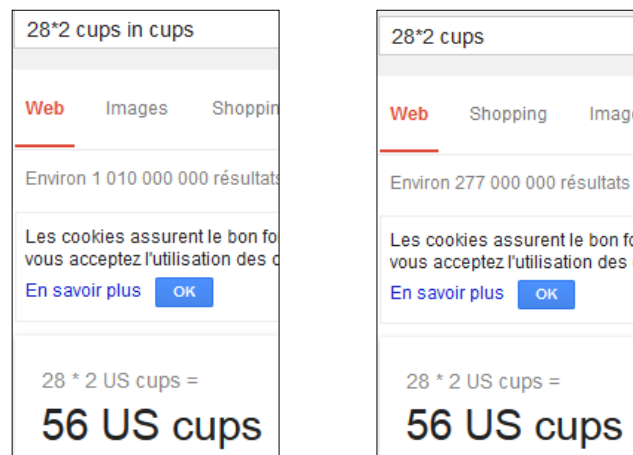
Google recognizes most common measurements, including weight, distance, time, mass, energy, and monetary currency.

On reproduit ci-après les réponses de Google aux demandes de conversion évoquées dans le passage précédent.

12 Parsecs = $1.21483369 \times 10^{18} \text{ feet}$	37 kelvin = $-393.07 \text{ degrees Fahrenheit}$
--	---



Ce qui nous intéresse est ici plus particulièrement le quatrième exemple, qui porte sur la conversion en onces de l'expression « 28×2 cups » : le calcul de cette expression n'est mentionné ici que comme réalisant la conversion « in one step ». Si l'on modifie la requête comme on le voit ci-après, voici ce que Google indique :



Mais le passage de la conversion de « 28×2 cups » en onces au *calcul* de « 28×2 cups » n'est pas explicité. (Sur la notion de *cup*, voir l'article « Cup (unit) » de *Wikipedia* et l'article correspondant en français, « Tasse (unité) ».)

c) Un autre document, un *post* du 10 juillet 2006 intitulé « The Google Calculator Easter Egg, The Hitchhiker's Guide to the Galaxy, & The Answer To Life (AKA 42) » – sur la notion d'*Easter egg* on pourra se reporter à l'article de même nom de *Wikipédia* –, on trouve le passage suivant (à l'adresse <http://1heckofaguy.com/2006/07/10/the-google-calculator-easter-egg-the-hitchhiker%E2%80%99s-guide-to-the-galaxy-the-answer-to-life-aka-42/>) :

The Google Calculator

The Google Calculator is built into the normal Google search page. If one enters math queries of this sort,

$$77 - 14 * 19 - 2 + 323 / \text{sqrt}64$$

the Google result displays the solution:

$$77 - (14 * 19) - 2 + (323 / \text{sqrt}(64)) = -150.6250$$

Because Google Calculator also handles conversions, one can also enter queries such as

$$55 \text{ mph} * 2 \text{ hr in feet}$$

and be rewarded with the solution:

$$(55 \text{ mph}) * 2 \text{ hr} = 580,800 \text{ feet}$$

On retrouve ici le lien avec les conversions : « *Because Google Calculator also handles conversions, one can also enter queries such as 55 mph*2 hr in feet.* » On a demandé (ci-après) à Google de répondre à deux requêtes correspondantes mais ne faisant pas intervenir explicitement de conversion :

(55 miles per hour) * 2 hours = 177.02784 kilometers	((55 mph) * 2 hour) / foot = 580 800
--	--

Dans le calcul de gauche, Google donne le résultat en kilomètres ; dans celui de droite, la distance est mesurée en *pieds*. On peut vérifier la correspondance entre les deux résultats affichés en demandant à Google de convertir en kilomètres la distance en pieds :



Notons qu'il y a là matière à étudier le *système des unités de mesure anglo-saxonnes*. Si l'on ignore par exemple ce qui est appelé, ici, un *pied*, ou une *once*, il suffit de le demander ; voici la réponse :

1 foot = 30.48 centimeters	1 ounce = 28.3495231 grams
--------------------------------------	--------------------------------------

Si l'on a oublié ce qu'est un *parsec*, on pourra se reporter à l'article de même nom de *Wikipédia*, mais on peut aussi questionner Google, qui répond ceci :

1 Parsec = $3,08567758 \times 10^{16}$ mètres
--

Bien entendu, l'étude de la « calculatrice cachée » de Google peut se poursuivre. On découvrira ainsi que, à la requête « 21 choose 4 » (en anglais) ou « 4 parmi 21 » (en français), Google répond (ci-après) en affichant le nombre de *combinaisons* de 4 objets pris parmi 21.

21 choose 4 = 5985	4 parmi 21 = 5985
-----------------------	----------------------

Pour d'autres fonctionnalités, on pourra se reporter à l'article « Calculatrice Google » de *Wikipédia* ou encore au document qu'on trouvera à l'adresse suivante : http://www.googleguide.com/print/calc_ref.pdf.

2. Entre professeurs

a) L'étude d'une question Q , quelle qu'elle soit, ne saurait guère se limiter à la réalisation d'analyses praxéologiques « en synchronie » afin de répondre à des questions telles que « Comment en telle institution accomplit-on les tâches de ce type ? Comment s'y justifie-t-on d'opérer ainsi ? ». Etc. J'ai souligné déjà que, s'il est clair que toute analyse *didactique* appelle des analyses *praxéologiques*, la *réciproque est également vraie*. Pour répondre pleinement à la question « Comment font-ils ? », il faut bien souvent étudier la question « D'où tiennent-ils cette manière de faire ? » et aussi : « D'où tiennent-ils cette manière de justifier leur manière de faire ? ». « De qui, dans quelles conditions, sous quelles contraintes, ont-ils *appris* cela ? » Bien entendu, ces questions « didactiques » sont plus pressantes lorsque l'on découvre que la manière de faire et la manière de justifier ce faire *ont changé à notre insu* ou ne sont pas celles qu'on croyait.

b) Je vais prendre un exemple à propos des calculs « sans unités » et des calculs *avec* unités. Cet exemple est fourni par une discussion soulevée par une intervenante, « Aurélie777 », sur le forum du site *Les-mathématiques.net* sous le titre « Angles et unités dans les calculs » (<http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?18,658098>). Voici le démarrage de cette discussion :

Bonjour à tous,

Je suis professeur de Mathématiques en collège depuis septembre 2009. Je dis à mes élèves de faire leurs calculs sans unité et d'écrire une phrase réponse contenant l'unité.

Mais dans les livres pour calculer la mesure d'un angle on trouve le °
(Exemple : $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$)

Pourquoi l'unité figure-t-elle dans les calculs ? Y a-t-il une raison mathématiques où est-ce simplement une convention pour aider les élèves ?

Merci d'avance pour vos réponses

Voilà donc le *choc*. Le monde a changé, l'orthodoxie d'autrefois – celle que pratique et décrit « Aurélie777 » – ne serait plus de mise !

c) Voici alors la réponse d'un premier intervenant, « christophe chalons » :

Pour les angles, c'est spécial parce que l'unité d'angle est un nombre (une longueur divisée par une autre longueur) et donc fondamentalement, l'unité ne sert pas de manière essentielle à identifier l'objet.

Mais en général, c'est une obligation pure et simple, sinon, c'est faux. Par exemple avec Pythagore, ce sont des aires qui sont égales. Dans les problèmes de vitesses, etc ce sont des vitesses, des temps, etc qui entrent en scène.

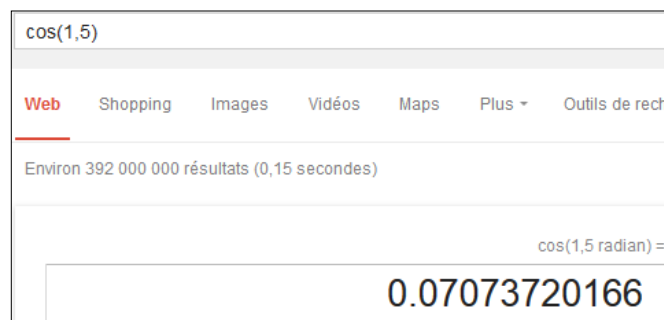
Implicitement, les choses se passent dans un corps de dimension infinie (le corps des grandeurs du monde) et les résultats connus sur les corps montrent que ce n'est pas rien. Par exemple, on sait que s'il est commutatif et de dimension au moins 3 alors il est de dimension infinie ça rend donc important la question de savoir si (cm ; seconde ; kg) est lié ou non si on regarde le corps des grandeurs du monde comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Pourquoi imposerait-on alors aux enfants un « identification » des cm et des kg là où inconsciemment le cerveau de la communauté scientifique n'y croit pas encore

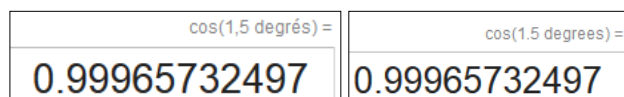
Ce propos, qui semble proféré sans grand souci de précision, s'inscrit sans doute possible dans le registre *technologico-théorique*. Le lire a dû constituer un autre choc pour « Aurélie777 » ! Tout d'abord, « christophe chalons », met à part la question du degré d'angle, en invoquant le fait qu'il s'agirait là d'une grandeur *sans dimension*. (Sur cette dernière notion, on pourra voir l'article de *Wikipédia* de même nom ainsi que la notice du Bureau international des poids et mesures – le BIPM – qu'on trouvera à l'adresse http://www.bipm.org/fr/si/si_brochure/chapter2/2-2/2-2-3.html.) L'article correspondant en anglais de *Wikipedia*, « Dimensionless quantity », précise notamment ce qui suit :

Even though a dimensionless quantity has no physical dimension associated with it, it can still have dimensionless units. To show the quantity being measured (for example mass fraction or mole fraction), it is sometimes helpful to use the same units in both the numerator and denominator (kg/kg or mol/mol). The quantity may also be given as a ratio of two different units that have the same dimension (for instance, light years over meters). This may be the case when calculating slopes in graphs, or when making unit conversions. Such notation does not indicate the presence of physical dimensions, and is purely a notational convention. Other common dimensionless units are % (= 0.01), ‰ (= 0.001), ppm (= 10^{-6}), ppb (= 10^{-9}), ppt (= 10^{-12}) and angle units (degrees, radians, grad). Units of number such as the dozen and the gross are also dimensionless.

Les abréviations ppm, ppb, ppt signifient respectivement, en anglais, *part per million*, *per billion*, c'est-à-dire par milliard (un *billion* est un milliard), et *per trillion*, où un *trillion* signifie « mille milliard ». Sur le radian, on peut voir l'article de même nom de *Wikipédia*. Une *grosse* est (ici) une douzaine de douzaine (une petite grosse), soit 144 unités ; une grande grosse est une douzaine de (petites) grosses, soit 1728 unités. La formulation adoptée par l'intervenant est cependant critiquable. Nous savons que la notation $\cos 1,5$, entendue comme désignant le cosinus d'un angle, n'a pas de sens clair : s'agit-il du cosinus d'un angle de 1,5 degrés ou de 1,5 radians (ou de 1,5 grades) ? La requête « $\cos(1,5)$ » est interprétée par Google comme désignant $\cos(1,5 \text{ rad})$, ainsi qu'on le voit ci-après :



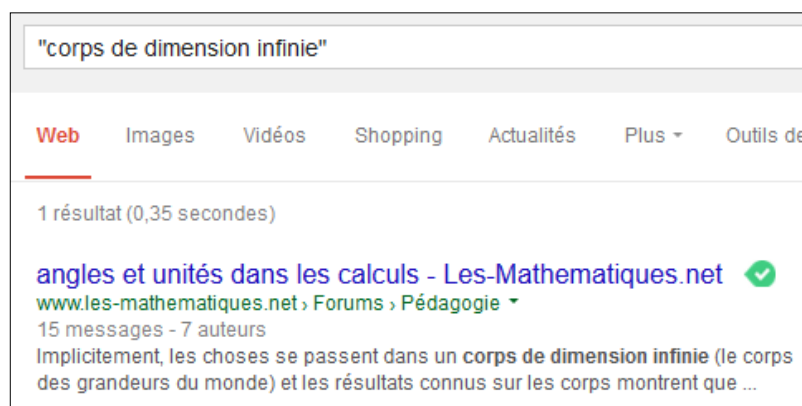
Pour obtenir la valeur de $\cos(1,5^\circ)$, il faut présenter à Google la requête « $\cos(1,5 \text{ degrés})$ » ou, en anglais, « $\cos(1.5 \text{ degrees})$ » :



Le degré et le radian ne sont pas davantage semblables entre eux que ne le sont une grande grosse (*a great gross*) et une grosse (*a gross*). Cela noté, c'est le deuxième paragraphe de la réponse de « christophe chalons » qui est

pour nous décisif : « Mais en général, c'est une obligation pure et simple, sinon, c'est faux. Par exemple avec Pythagore, ce sont des aires qui sont égales. Dans les problèmes de vitesses, etc ce sont des vitesses, des temps, etc qui entrent en scène. » Le propos rappelle pour l'essentiel que les grandeurs ne sont pas des nombres, ce qui est bien le principe fondateur de la théorie ancienne et « moderne » des grandeurs.

d) Le paragraphe qui suit s'élève vers des considérations *théoriques* qui restent allusives. L'intervenant y parle de « corps de dimension infinie ». Si l'on recherche sur Internet cette expression (exactement), on ne trouve, par le truchement du moteur de recherche Google, qu'un unique résultat, qui renvoie... au document que nous examinons ici !



L'intervenant pose l'existence d'un « corps des grandeurs », dont on ne trouve pas trace dans les essais de formalisation de la notion de grandeur – celui de Hassler Whitney (1907-1989) notamment, paru en 1968 sous le titre « The Mathematics of Physical Quantities. Part II » dans *The American Mathematical Monthly* (vol. 75, pp. 227-256), ou encore celui de Mark Sharlow, « Generalizing the Algebra of Physical Quantities », par exemple (à l'adresse <http://www.eskimo.com/~msharlow/dimensiv.pdf>). Il semble que l'idée « théorique » majeure de l'intervenant soit celle-ci : dans ce « corps des grandeurs » $C_{\mathcal{G}}$, les grandeurs bien connues (longueurs, durées, masses, etc.), qui en seraient donc des éléments, *doivent être* linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ ($C_{\mathcal{G}}$ étant regardé comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) : on ne doit pas pouvoir, par exemple, exprimer une longueur comme combinaison linéaire d'une masse et d'une durée, etc. Le corps supposé, $C_{\mathcal{G}}$, doit être assez vaste pour que toutes ces grandeurs « y trouvent place » (en ce sens). Ce corps ne peut « donc » être un espace vectoriel de dimension *finie* sur $\mathbb{R}$, parce que, d'après un théorème dont la première formulation (1877) est due à Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) et dont on trouvera un historique dans l'article « Théorème de Frobenius généralisé » de *Wikipédia* (ou encore à l'adresse <http://mathworld.wolfram.com/DivisionAlgebra.html>), il n'existe pas de corps commutatif de dimension *finie* sur $\mathbb{R}$ autre que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (le corps

$\mathbb{H}$ des quaternions, découvert par Hamilton en 1843, étant, lui, *non* commutatif). Il « résulte » de là que le « corps des grandeurs du monde », que l'intervenant tient pour commutatif, serait de dimension infinie sur $\mathbb{R}$... Je note ici qu'il existe des corps commutatifs de dimension infinie sur $\mathbb{R}$, par exemple le corps $\mathbb{R}((X))$ des séries formelles de Laurent (elles s'écrivent sous la forme $\sum_{n \geq -M} a_n X^n$, où M est un entier), qui n'est autre que le corps des fractions de l'anneau des séries formelles $\mathbb{R}[[X]]$ (voir l'article « Série formelle » de *Wikipédia*.) Cela rappelé, pour des idées plus précises sur la notion de *système de grandeurs* – système qui, donc, n'est *pas* muni naturellement d'une structure de corps –, on pourra se reporter à l'article que Marianna Bosch et moi-même avons publié en 2002 dans *Petit x* (59, 43-76) sous le titre « Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations » (on le retrouvera à l'adresse http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/59/59x4.pdf). L'ultime remarque de l'intervenant sonne plus insolite encore : « Pourquoi, demande-t-il, imposerait-on alors aux enfants une “identification” des cm et des kg là où inconsciemment le cerveau de la communauté scientifique n'y croit pas encore ? » Je ne la commenterai pas davantage.

e) La suite de la discussion mérite attention. Elle révèle une rhétorique peu asservie aux règles de la logique et du roide raisonnement. L'intervenant suivant – « nicolas.patris » – fait écho, en mineur, aux propos disparates du l'intervenant qui le précède en adressant à « Aurélie777 » cette mise en garde : « Quand on écrit $\cos 90$, si on ne se pose pas la question de l'unité, on ne sait pas si l'angle est en radian ou en degré, ce qui change pas mal la valeur. » (Alors que $\cos(90^\circ) = 0$, on a en effet $\cos(90 \text{ rad}) = -0,448\dots$) « Aurélie777 » voudrait pourtant défendre sa manière de faire et demande alors : « Oui mais est ce une faute de leur faire écrire les calculs sans les $^\circ$ puis de leur faire faire une phrase réponse avec $^\circ$? » Elle n'obtient pas de réponse mais se fait sermonner par un nouvel intervenant, « gerard0 » :

Bonsoir Aurélie.

Il me semble préférable de les habituer tout de suite à noter quelle mesure est utilisée pour les angles, car ils en auront besoin au lycée ou à l'université. C'est l'occasion de noter que les degrés ne sont pas une unité, mais un repérage, une mesure.

D'autre part, la tradition des physiciens, des ingénieurs et des économistes est de calculer « en unités », ne serait-ce que pour pouvoir en changer. Donc la rigueur est ici illusoire

Cordialement.

On retrouve ici un manque de précision dont on peut se demander s'il ne hante pas les discours technologico-théoriques professoraux. Ainsi en va-t-il

avec l'affirmation que « les degrés ne sont pas une unité, mais un repérage, une mesure ». Ainsi en va-t-il aussi avec la conclusion même de ce prône, qu'on peut résumer ainsi : ce que voudrait « Aurélie777 » (selon « gerard0 »), c'est être rigoureuse ; mais cela est *ici* illusoire. Un nouvel intervenant, « HAL », insère alors un commentaire au ton classiquement décliniste. Corrigeant l'indication selon laquelle l'habitude de noter les unités sera utile aux élèves d'« Aurélie777 » lorsqu'ils seront *au lycée*, « HAL » précise : « Seulement les S désormais, seulement les S. Avant que la prochaine *rénovation* ne supprime définitivement les vecteurs, la trigonométrie, les transformations, bref la géométrie... ». Mais un nouvel intervenant, « Braun », vient préciser (pour nous) en quoi la technique d'« Aurélie777 » serait « rigoureuse » et en quoi le fait de bien noter l'unité d'angle – ici, le degré – s'éloignerait de cette rigueur que « gerard0 » déclarait « illusoire » :

Bonsoir,

Je vais plagier *Nicolas*, quand j'écris $\cos(90)$ 90 est un nombre réel et la fonction cosinus est celle définie par la série que chacun connaît.

Quand je laisse écrire $\cos(90^\circ)$ j'espère que l'auteur abrège « cosinus d'un angle de quatre vingt dix degrés ».

Dans le cas il n'y a aucune référence à l'angle et c'est l'ouverture vers des études mathématiques, dans le deuxième ce n'est qu'une compatibilité ascendante avec les programmes antérieurs.

Mais je maintiens, quarante neuf degrés ça va pour un genièvre, pas pour une fonction trigonométrique.

Parler du cosinus d'un angle (de 37° ou de 0,2 rad par exemple) ne serait donc pas « rigoureux » et serait même étranger aux mathématiques, sauf lorsque celles-ci acceptent de se compromettre. On voit ici qu'une forte leçon apportée jadis par les « mathématiques modernes » a été oubliée par ce professionnel de l'enseignement des mathématiques comme sans doute par de nombreux autres. Faut-il rappeler le souvenir du « grand » cosinus, noté autrefois *Cos*, c'est-à-dire du cosinus *d'un angle*, et non *d'un réel*, et renvoyer au livre de Jean Dieudonné paru en 1964 chez Hermann, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, ou encore à son article de l'*Encyclopædia Universalis* intitulé « Groupes classiques et géométrie » (qu'on trouvera dans le volume intitulé *Dictionnaire des mathématiques. Algèbre, analyse, géométrie*, Encyclopædia Universalis / Albin Michel, 1997, pp. 529-546 : le passage pertinent s'y trouve pp. 535-536 et est aussi consultable en ligne, à l'adresse <http://www.phy.ntnu.edu.tw/oldjava/articles/H982811A.HTM>) ?

f) Cela dûment noté, revenons à notre discussion. L'intervenant « nicolas.patris », attaqué par « Braun », voit « christophe chalons » (dont la

propension à tenir des discours imposants nous est maintenant connue) venir à son secours :

La réponse de Nicolas me paraît parfaite, puisqu'elle donne une condition suffisante pour rendre préférable d'écrire les unités.

Autre argument : il est important d'écrire des trucs VRAIS. Dans la tête d'un enfant écrire un truc faux en disant que c'est un abus de langage me paraît simplement malhonnête. Même si la malhonnêteté permet de prendre des chemins plus courts localement, je ne vois pas en quoi c'est utile.

On va pas à l'école pour apprendre le théorème de Pythagore, mais pour construire, entre autre un état d'esprit. Mieux vaut un échec honnête qu'un masque qui affiche « victoire ».

Le débat était jusque-là surtout « mathématique » (et un peu institutionnel) ; il devient ici didactique et éducatif. Ce qui importe, aux yeux de « nicolas.patris », ce serait de ne pas offenser la vérité et de ne pas entraîner les élèves à l'offenser. On ne parle plus de rigueur, de ce qui est « mathématique » et de ce qui ne le serait pas ; mais on se réfère à une valeur « transcendante », le respect de la vérité, qui proscriit les petits arrangements facilitateurs à court terme. « Aurélie777 » va alors recevoir du renfort de la part d'un certain JLT, qui illustre abondamment son point de vue :

Au CP, les enfants résolvent des problèmes du type suivant :

Problème : Toto a 5 pommes. Il en mange deux. Combien lui en reste-t-il ?

Solution :

Je cherche un nombre de pommes.

Je pose l'opération : $5 - 2 = 3$

Réponse : il lui reste 3 pommes.

En résumé, on pose l'opération sans les unités, et on fait une phrase-réponse à la fin. La solution est juste du moment que l'on a bien écrit quelque part qu'il s'agit de pommes.

En physique, on a coutume de faire comme ceci :

Question : avec 1 kWh, quelle masse d'eau peut-on remonter de 100 m ?

Réponse :

$$E = mgh$$

$$E = 1000 \times 3600 \text{ J}$$

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$m = E/hg = 3600000/9,81/100 = 3,67 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

Noter que les équations commencent par une quantité physique (E ou m) pas par un nombre. On ne met les unités qu'à la fin sinon c'est trop pénible de trainer les unités partout.

J'aurais donc tendance à dire que les 2 rédactions suivantes sont correctes :

- 1) On a $180 - 45 = 135$ donc l'angle recherche est de 135°
- 2) L'angle vaut $a = 180 - 45 = 135^\circ$

Alors qu'« Aurélie777 » s'interrogeait avec humilité et quelque embarras sur la technique de calcul qu'elle utilise avec ses élèves, cet intervenant, « JLT », affiche sans façon ce qu'il croit être la bonne réponse, qui n'est en l'espèce qu'une certaine doctrine traditionnelle que, précisément, la promotion récente, dans les programmes officiels, des calculs *avec* unités tend – ou devrait tendre – à faire reculer (du moins pour ce qui est du point 2 ci-dessus, le point 1 étant, quant à lui, tout à fait correct). Notons que l'exemple tiré de la physique est, lui, typique de ce qu'il y a de pire dans la façon de faire traditionnelle (antérieure à la réforme des mathématiques modernes). La formule $E = mgh$ ou la formule $m = E/gh$ expriment des relations *entre grandeurs* (et non entre nombres) ; la suite d'égalités

$$m = E/gh = 3600000/9,81/100 = 3,67 \cdot 10^3 \text{ kg},$$

qui l'oublie en chemin, est exemplaire des « horreurs » que cette technique traditionnelle conduit à écrire. Dans un calcul *avec* unités, on devrait avoir d'abord ce qui suit : $m = E/gh = 1 \text{ kWh}/(9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 100 \text{ m})$. Simplifions-nous la vie en demandant à Google ce que vaut 1 kWh en joules ; on obtient ceci :

1 kilowatt hour =
3 600 000 joules

Il vient donc : $m = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}/(981 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2})$. Comme $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, on a : $m = 3,6 \cdot 10^6 \text{ kg}/981$. Google renvoie ceci :

$(3,6 * (10^6) \text{ kg}) / 981 =$
3 669,72477 kilogrammes

On a ainsi finalement : $m \approx 3\,670 \text{ kg} = 3,67 \times 10^3 \text{ kg}$. Bien entendu, on aurait pu demander à Google d'effectuer *l'ensemble* des calculs en lui présentant d'emblée la requête « $1 \text{ kWh} / (9.81 \text{ m} * \text{s}^{(-2)} * 100 \text{ m})$ » ; sa réponse, en ce cas, eût été la suivante :

$(1 \text{ kWh}) / ((9.81 \text{ m} * (\text{s}^{(-2)})) * 100 \text{ m}) =$
3 669.72477 kilograms

Bien entendu, on aurait pu conduire ce calcul à *la main* en s'aidant notamment de cette réponse de Google :

$$(1 \text{ kWh}) / ((\text{m}^2) * (\text{s}^2(-2))) =$$

3 600 000 kilograms

g) Aux considérations très assurées de « JLT », « christophe chalons » répond en écho avec une touche d'ironie : « Du moment qu'on ne dit rien de faux... Tout va bien. (Bravo pour le roman fleuve :D) » Mais « nicolas.patris », lui, revient à la question de fond et apostrophe « JLT » :

JLT, la dernière me gêne, puisque tu as égalé des nombres avec une mesure d'angle exprimée en degrés. Soit tu écris ° partout, soit nulle part. Je sais bien que les matheux sont souvent plus à l'aise (libéraux) avec les unités que les physiciens. :D

Passons sur la notation corporatiste, au demeurant étrange : car jusqu'ici, en mathématiques, les unités étaient soit oubliées, soit maltraitées ! « JLT » reprend *mezza voce* son argument « pratique » contre la présence des unités dans les calculs :

Je sais bien. Disons qu'il est plus correct de mettre des degrés partout, mais on tolère le fait de ne les mettre qu'à la fin pour alléger la rédaction, sinon en physique on devrait traîner des choses comme $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{kg}^4$ sur des pages entières.

Il semblerait qu'on s'achemine ici vers un accord sur une praxéologie « moyenne », peu ou prou consensuelle : en théorie, il faudrait garder les unités, en pratique, c'est bien lourd... En ce point, « nicolas.patris » semble d'ailleurs vouloir confirmer la recherche d'un compromis en avançant un accommodement qu'il énonce ainsi : « Sinon, on peut considérer que le symbole ° signifie $\times \pi/180$, comme ça on peut écrire $\cos 90^\circ$ et $\cos \pi$. » En vérité, on a $1^\circ = \pi \text{ rad}/180$; on voit donc ici réapparaître la confusion entre le cosinus *d'un angle* et le cosinus *d'un réel* : $\cos \pi$ désigne le cosinus du nombre réel π , qui est égal au cosinus d'un angle de π radians : avec des notations d'autrefois, $\cos \pi = \text{Cos}(\pi \text{ rad})$. Notons que l'on peut s'amuser à considérer $\text{Cos}(\pi^\circ)$, pour lequel Google fournit cette valeur :

$$\cos(\pi \text{ degrés}) =$$

0.99849714986

h) C'est alors qu'apparaît un nouvel intervenant, un certain « Benjamin Levine ». Lui défend le point de vue « récent » – celui consistant à garder les

unités dans les calculs –, avec des arguments dont la « force » va croissant au fil de son intervention.

Bonjour,

Je vous écris en tant que physicien. On manipule en physique et parfois en math aussi (à moins que l'on ait renormalisé) des grandeurs et non pas des nombres, aussi les unités devraient TOUJOURS être écrites.

Si on ne les mets pas, c'est simplement comme expliqué plus haut, pour gagner du temps. Le problème c'est que du coup, on crée une confusion dans la tête des élèves. Pourquoi des fois on les mets (en physique) et pas en math). Il est même nécessaire d'introduire l'analyse dimensionnelle de façon artificielle au Lycée afin de montrer la cohérence des unités.

J'ai été au collège aux USA et là, du fait de la coexistence de plusieurs systèmes d'unités, on oblige les élèves à les mettre dans les calculs. La masse volumique (appelée density) sert d'exemple et permet de mieux comprendre les conversions d'unités grâce à l'écriture explicite des unités. Étrangement les conversions posent beaucoup de problèmes en France alors que le système est bien plus simple.

Les unités sont indissociables de la valeur d'une mesure dans une grandeur. Une surface « de trois », n'a aucun sens.

Une équation en physique, reliant des grandeurs donc, ne doit pas comporter de coefficients résultant d'un système d'unité particulier. Elle est universelle, quelque soit le système d'unité.

En vous lisant je comprends maintenant une des sources de confusion dans la tête des élèves : ces derniers n'arrivent souvent pas à voir la différence entre un nombre et une grandeur. Au lieu de régler ce problème en collège comme ailleurs, on attend que les élèves soient plus vieux et qu'ils comprennent, éventuellement, tous seuls. Il va sans dire que la plupart passent complètement à côté.

Continuons d'élaguer, à force, il ne restera pas grand chose... Des fois, quand je pense aux centrales nucléaires et quand je vois nos élèves, je me demande comment tout ça, va se terminer. D'ailleurs, il y a quelques mois une infirmière a tué un patient à cause d'une erreur grossière d'unité. Je l'ai déjà dit à un inspecteur : « Pensez-y, parmi les élèves que je forme, il y a peut-être la future infirmière qui vous injectera un médicament dangereux » ;)

On retrouve ici la référence à la distinction (sinon à l'opposition) entre mathématiciens et physiciens, doublé du contraste entre États-Unis et France : les uns feraient comme-ci, les autres comme-ça.

i) C'est là que « gerard0 » reprend la parole – ce sera la dernière intervention de la discussion. Nous connaissons sa tendance à chapitrer ses

interlocuteurs. Cette fois, il s'adresse sans façon à Benjamin Levine, qui a semblé faire la leçon aux « mathématiciens », et cela au nom des « physiciens » :

Bonjour Benjamin Levine.

Tu oublies une réalité : Les angles ne sont pas des grandeurs. D'ailleurs, à ton avis, pourquoi c'est à propos d'angles que la question a été posée ?

De plus, il me semble malséant de reprocher aux matheux de pratiquer leur discipline, dans laquelle (en base 10) $3+3$ fait toujours 6, indépendamment de tout support par des grandeurs ou des comptages. Ce qui n'est pas toujours vrai en physique.

Les calculs de conversion n'ont pas empêché les américains de la Nasa de rater Mars avec une sonde pour un bête calcul fait dans la mauvaise unité. Ton exemple de l'infirmière n'est pas un exemple sérieux.

Donc tu voudrais qu'on fasse comme les physiciens ? Mais même les physiciens utilisent des nombres sans unités, ils les préfèrent, même ! Une phase (traitement de signal), par exemple est en quelle unité ? Et dans $m=m_0e^{-\tau t}$ pourquoi faut-il que τt soit sans unité ? Comme quoi parfois les matheux qui utilisent e^x sans mettre d'unité à x n'ont pas tout à fait tort.

Par contre, si tu lis le forum pédagogie, tu verras que ton pessimisme sur l'évolution de l'enseignement des maths est faible par rapport à celui des profs de maths eux mêmes. Mais quand tu dis « Continuons d'élaguer, à force, il ne restera pas grand-chose », il faudrait que tu saches que cette question des unités n'a pas été « élaguée », elle n'a jamais fait partie de l'enseignement des maths en collège et lycée.

Cordialement.

On voit revenir d'abord l'affirmation que les angles « ne sont pas des grandeurs » : là-dessus, « gerard0 » pourrait relire le document d'accompagnement naguère proposé aux professeurs sous le titre « Grandeurs et mesures au collège » (on le trouve maintenant à l'adresse http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/16/9/doc_acc_cl_g_grandeurs_109169.pdf). L'affirmation que l'égalité $3 + 3 = 6$ ne serait pas toujours vraie en physique sonne bizarrement : « gerard0 » songerait-il à l'égalité *sans unités* correspondant à l'égalité $3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 0,6 \text{ dm}$? Sur la notion de *phase*, on peut voir l'article « Phase (onde) » de *Wikipédia* : « D'après la définition mathématique, y lit-on, la phase est une grandeur exprimée en radians... » Quant à l'équation $m = m_0e^{-\tau t}$, elle provient de l'équation différentielle $dm/dt = -\tau m$, dont l'analyse dimensionnelle montre trivialement que τ y a pour dimension l'inverse du temps, en sorte que le produit τt est sans dimension (voir là-dessus l'article « Exponential decay » de *Wikipedia*). L'usage des exponentielles (et des logarithmes) est, il est vrai, de

nature à engendrer le débat que soulève ici « gerard0 » (voir l'échange à l'adresse <http://www.physicsforums.com/showthread.php?t=447613>). Mais il est surtout un point sur lequel « gerard0 » insiste avec raison : la « question des unités... n'a jamais fait partie de l'enseignement des maths en collège et lycée ». « Aurélie777 » se heurte donc à une nouveauté quasi totale.

3. Les mutations d'une question « avivée »

a) « Aurélie777 » n'aura finalement pas eu de réponse. En fait, ainsi qu'on pourra le voir dans l'article de Whitney déjà mentionné, pp. 250-251, ou encore dans l'article de Marianna et moi-même, pp. 75-78, on peut calculer une grandeur « avec les unités » ou « sans les unités » – *dropping units*. Par exemple, pour connaître l'aire A d'un rectangle de 3 dm de long et 4,5 cm de large, on peut écrire : $A = 3 \text{ dm} \times 4,5 \text{ cm} = (3 \times 4,5) \text{ dm} \cdot \text{cm}$. Arrivés en ce point, on peut calculer le produit de nombres $3 \times 4,5$ à part (il vaut 13,5) et on a alors : $A = 13,5 \text{ dm} \cdot \text{cm}$. Le problème laissé pendant dans la tradition scolaire (française) est celui du calcul *sur les unités*. Ici, en prenant par exemple $\ell = 2 \text{ cm}$, on a : $\text{dm} \cdot \text{cm} = (5 \ell)(0,5 \ell) = 2,5 \ell^2$. On aura donc finalement : $A = 13,5 (2,5 \ell^2) = 33,75 \ell^2$. En calculant *avec* les unités, on aurait eu :

$$A = 3 \text{ dm} \times 4,5 \text{ cm} = 15 \ell \times 2,25 \ell = (15 \times 2,25) \ell^2 = 33,75 \ell^2.$$

Dans le cadre praxéologique français devenu traditionnel il y a quelques décennies, on aurait d'abord converti, *hors calcul*, les décimètres et les centimètres en l'unité de longueur ℓ , obtenant ainsi (à l'aide d'un dispositif de conversion en forme de table de correspondance) qu'un décimètre « vaut » 5ℓ et qu'un centimètre « vaut » $0,5 \ell$ (classiquement, on n'ose pas écrire les égalités $1 \text{ dm} = 5 \ell$ et $1 \text{ cm} = 0,5 \ell$). On aurait ensuite écrit ceci :

$$A = (3 \times 5) \times (4,5 \times 0,5) = 15 \times 2,25 = 33,75 \ell^2.$$

Ce faisant, on serait donc tombé dans l'erreur consistant à égaler une grandeur et un nombre, « faute » sur laquelle il convient de s'interroger.

b) C'est cette faute qu'a tenté d'éviter la réforme des mathématiques modernes, sans pour autant introduire le calcul des grandeurs. L'usage s'est installé alors d'écrire des « réponses » du type : « Aire du rectangle en ℓ^2 : 33,75. » Mais d'où venait alors l'usage antérieur – celui que dénonce par exemple « nicolas patrois » et qu'évite « Aurélie777 » tout en étant rebutée par la nouvelle praxéologie du calcul des grandeurs ? Rappelons d'abord la pratique ainsi dénoncée ou évitée. On trouvera ci-après une série d'exemples prise dans une plaquette intitulée *Maths Dictionary*, due à Peter Robson, et publiée en 1979 chez Newby Books (Scarborough, UK). Il s'agit là d'un

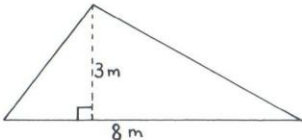
ouvrage élémentaire dont j'utilise la seconde édition, parue en 1993, et dont j'extrait ci-dessous l'entrée *Area*, p. 4.

Area of rectangle = base x height (or length x breadth)
e.g.



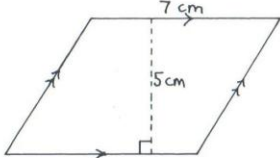
$$\begin{aligned} \text{Area} &= 8 \times 3 \\ &= 24 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Area of triangle = $\frac{1}{2}$ base x height
e.g.



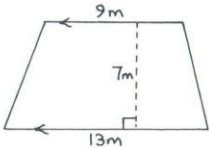
$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \\ &= 12 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Area of parallelogram = base x height
e.g.



$$\begin{aligned} \text{Area} &= 7 \times 5 \\ &= 35 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Area of trapezium = $\frac{1}{2}$ (base + top) x height
e.g.



$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2} (13 + 9) \times 7 \\ &= 77 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Comme on le voit, l'auteur y explicite des suites d'égalités de la forme

$$\begin{aligned} A &= a \times b \\ &= c \ell^2 \end{aligned}$$

On a là le témoignage indiscutable d'une pratique qui fait aujourd'hui problème mais qui, hier, semble être allée de soi. Pourquoi donc en était-il ainsi ? C'est là une question qu'on ne peut manquer de se poser.

c) En vue de répondre, il faut d'abord observer que ce genre de suites d'égalités, où l'on passe d'un nombre à une grandeur – ici une aire –, ne représente qu'une *partie* des pratiques ostensives d'avant les mathématiques modernes. Pour le faire voir, j'emprunterai au livre de Théophile Moreux – le prolifique Abbé Moreux (1867-1954) – intitulé *Pour comprendre l'arithmétique* (Doin, Paris, 1931), et plus précisément aux exercices corrigés qui terminent (pp. 88-95) la troisième leçon de l'ouvrage, intitulée « Sur le système métrique ». Voici le premier des exercices proposés :

1. Un carré a 144 m. de pourtour, quelle est la longueur d'un côté ?

Solution : La longueur d'un côté est :

$$144 : 4 = 36 \text{ mètres.}$$

Réponse : 36 mètres.

Observons d'abord la disposition adoptée : il y a en premier lieu la *solution*, qui établit le résultat cherché, puis la *réponse*, qui reprend ce résultat en lui donnant explicitement le statut de réponse à la question posée dans l'énoncé de l'exercice. C'est apparemment de cette structure que la technique usitée par « Aurélie777 » est l'héritière. En revanche, bien entendu, la part d'héritage qui est aujourd'hui refusée (ou qui devrait l'être) est l'égalité « $144 : 4 = 36 \text{ mètres}$ », laquelle égale un nombre et une longueur. Pourtant l'exercice suivant montre, quant à lui, des pratiques quasi « modernes » :

2. Les deux dimensions d'un rectangle sont 28 m. 75 et 16 m. 5. Quel est le périmètre du rectangle ?

Solution : La somme de deux dimensions est :

$$28 \text{ m. } 75 + 16 \text{ m. } 50 = 45 \text{ m. } 25.$$

Le périmètre est donc :

$$45 \text{ m. } 25 \times 2 = 90 \text{ m. } 50.$$

Réponse : 90 m. 50.

Ce que l'on voit ici, ce sont des égalités comportant des unités *dans chaque membre*, le premier membre de la première égalité se présentant en outre comme une *somme* de longueurs. Dire qu'il n'existait pas, anciennement, de calculs *avec unités* est donc à strictement parler *inexact*. Bien entendu, cela laisse ouvert le problème de la *nature* des expressions avec unités que l'on pouvait rencontrer. Passons à l'exercice 6 :

6. Dans un jardin carré de 45 m. de côté, on a construit un pavillon carré de 9 m. 50 de côté. Quelle étendue en mètres carrés reste-t-il à cultiver ?

Solution : Surface du jardin :

$$45 \times 45 = 2\,025 \text{ mètres carrés.}$$

Surface du pavillon :

$$9 \text{ m. } 50 \times 9,50 = 90 \text{ m}^2,25.$$

Il reste à cultiver :

$$2\,025 \text{ m}^2 - 90 \text{ m}^2,25 = 1\,934 \text{ m}^2,75.$$

Réponse : 1 934 m²,75.

La situation paraît ici anarchique. On voit d'abord une égalité « fautive » de la forme « $a \times b = c \text{ mètres carrés}$ ». (Nous verrons plus loin de quoi l'écriture « c mètres carrés » est significative.) On découvre ensuite une égalité non

moins « aberrante », de la forme « $a \text{ m} \times a = b \text{ m}^2$ ». On retrouve enfin une égalité « cohérente », de la forme « $a \text{ m}^2 - b \text{ m}^2 = c \text{ m}^2$ ». On va voir que les égalités dimensionnellement incohérentes rencontrées jusqu'ici ne sont pourtant pas, dans l'ouvrage examiné, un destin obligé. Examinons ainsi l'exercice 14 :

14. On veut carreler une salle ayant 8 m. 70 de long sur 5 m. 60 de large avec des carreaux ayant 0 m. 24 de côté. Combien en faudra-t-il ?

Solution : Surface de la salle :

$$8 \text{ m. } 70 \times 5 \text{ m. } 60 = 48 \text{ m}^2,72.$$

Surface du carreau :

$$0 \text{ m. } 24 \times 0 \text{ m. } 24 = 0 \text{ m}^2,0576.$$

Nombre de carreaux :

$$48 \text{ m}^2,72 : 0 \text{ m}^2,0576 = 846.$$

Réponse : 846.

Cette fois, toutes les égalités sont dimensionnellement cohérentes : elles sont respectivement de la forme $a \text{ m} \times b \text{ m} = c \text{ m}^2$, $a \text{ m} \times a \text{ m} = b \text{ m}^2$ et $a \text{ m} : b \text{ m} = c$. (On notera que la « réponse » est arrondie supérieurement, ce qui paraît réaliste : on a en fait $48,72/0,0576 = 845,8333...$) Que conclure de tout cela ? Que, s'il n'est pas constant, l'usage cohérent des unités est fréquent. On en jugera en découvrant les exercices 18, 21, 24 et 26 reproduits ci-après :

18. Calculer la surface d'un cercle de 2 m. 50 de diamètre ?

Solution : Le rayon = $2 \text{ m. } 50 : 2 = 1 \text{ m. } 25$.

Le carré du rayon est :

$$1 \text{ m. } 25 \times 1 \text{ m. } 25 = 1 \text{ m}^2,5625.$$

Surface du cercle :

$$1 \text{ m}^2,5625 \times 3,1416 = 4 \text{ m}^2,908750.$$

Réponse : 4 m²,908750.

.....

21. Trouver le volume d'un cube de 0 m. 75 de côté ?

Solution : Le volume est de :

$$0 \text{ m. } 75 \times 0 \text{ m. } 75 \times 0 \text{ m. } 75 = 0 \text{ m}^3,421875.$$

Réponse : 0 m³,421875.

.....

24. Quelle est la profondeur d'une caisse qui doit contenir 250 litres, si elle a pour longueur 0 m. 80 et pour largeur 0 m. 50 ?

Solution : 250 litres font 0 m³,250.

La surface de la boîte est de :

$$0 \text{ m. } 80 \times 0 \text{ m. } 50 = 0 \text{ m}^2,40.$$

La profondeur de la caisse est de :

$$0 \text{ m}^3,250 : 0 \text{ m}^2,40 = 0 \text{ m } 625.$$

Réponse : 0 m. 625.

.....
26. *Toute la salle de classe doit avoir 1 m²,25 de surface par élève. Une classe qui doit recevoir 50 élèves a 46 m²,90 et 6 m. 50 de largeur. De combien faut-il l'allonger ?*

Solution : La classe doit avoir une surface de :

$$1 \text{ m}^2,25 \times 50 = 62 \text{ m}^2,50.$$

Il lui manque donc :

$$62 \text{ m}^2,50 - 46 \text{ m}^2,90 = 15 \text{ m}^2,60.$$

Il faut l'allonger de :

$$15 \text{ m}^2,60 : 6 \text{ m. } 50 = 2 \text{ m. } 40.$$

Réponse : 2 m. 40.

On aura noté que, dans tous ces exercices, les égalités sont cohérentes par rapport aux unités. Le problème examiné – pourquoi observe-t-on *aussi* des égalités dimensionnellement incohérentes ? – est donc plus que jamais ouvert.

d) Pour avancer vers une réponse raisonnée, je me tourne maintenant vers un autre ouvrage, à peine plus récent. Il s'agit d'une *Arithmétique* pour les classes de 6^e qui a paru en 1938 et se veut conforme au programme du 30 août 1937. Elle est due à deux auteurs des plus estimables, au plan mathématique notamment : Théodore Leconte, alors inspecteur général de l'Instruction publique, et Jean Itard (1902-1979), alors professeur de mathématiques au lycée Michelet (Paris), sur la biographie duquel on pourra consulter l'article « Jean Itard (historien) » de *Wikipédia*. Les extraits qui suivent illustrent ce qui sera notre conjecture : l'incohérence des *écritures de grandeurs* est pour l'essentiel *une conséquence du caractère fondamentalement oral de l'arithmétique traditionnelle*, dont elle constitue un coupable vestige. Le chapitre VII de l'ouvrage de Leconte et Itard est intitulé « Aires ou surfaces ». On y lit notamment (p. 124) que « le centimètre carré (cm^2) est l'aire d'un carré de 1^{cm} de côté » ; et de même pour le mètre carré, le décimètre carré, etc. On retiendra ici la proximité entre « centimètre carré » et « carré d'un centimètre de côté », etc., qui fera que, énonçant le premier, on pourra penser au second. Un peu plus loin (p. 126), les auteurs divisent un grand carré en petits carrés obtenus en divisant chaque côté du grand carré en dix segments de même longueur (voir la figure ci-après). Les auteurs écrivent à ce propos :

La bande inférieure qui est limitée par AD peut être partagée en dix carrés égaux ; il suffit pour cela de diviser AD en dix parties égales et de mener des

parallèles à AB par les points de division. Il en serait de même pour toutes les bandes horizontales. En tout on pourrait tracer :

$$10 \times 10 = 100 \text{ petits carrés égaux}$$

dont les surfaces réunies, donneraient la surface du carré ABCD.

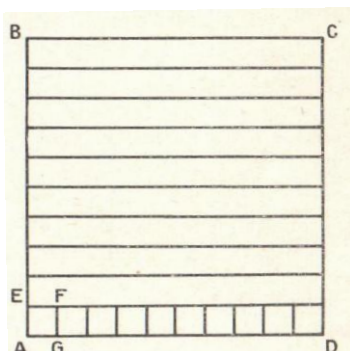


FIG. 100

On aura noté que les *nombres* (écrits en chiffres) sont ici *en gras* – nous reviendrons là-dessus. Ce qui nous intéresse pour le moment, c'est l'énoncé « En tout on pourrait tracer $10 \times 10 = 100$ petits carrés égaux... » Il faut imaginer que l'on *dise* un tel énoncé (au lieu de l'écrire). Considérons par exemple cet autre énoncé *oral* : « Il y aura en tout six couples à notre fête et donc six fois deux égale douze convives. » Mettons-le par écrit : « Il y aura en tout 6 couples à notre fête et donc $6 \times 2 = 12$ convives. » On n'a pas tant ici une écriture dimensionnellement incohérente – à savoir « $6 \times 2 = 12$ convives » – qu'un *calcul auxiliaire* enchâssé dans un énoncé. De tels énoncés découlent de la mise par écrit d'énoncés oraux, mise par écrit utilisant elle-même un certain symbolisme « arithmétique » (en fait, algébrique). Remplaçons alors, dans l'énoncé des auteurs, « petits carrés égaux » par « carrés d'un centimètre carré », puis par « centimètres carrés », enfin par « cm^2 », après y avoir au préalable remplacé « on pourrait tracer » par « le carré contiendrait ». On obtient ceci :

« En tout le carré contiendrait $10 \times 10 = 100$ petits carrés égaux... »
 $\downarrow$
 « En tout le carré contiendrait $10 \times 10 = 100$ carrés d'un centimètre carré... »
 $\downarrow$
 « En tout le carré contiendrait $10 \times 10 = 100$ centimètres carrés... »
 $\downarrow$
 « En tout le carré contiendrait $10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$... »

Nous sommes ainsi arrivés au type d'écriture « fautive » à expliquer.

e) La genèse que nous avons reconstituée est-elle justifiée ? Examinons ce qu'écrivent les auteurs à la page suivante :

148. – Aire d'un carré de côté quelconque.

Nous avons divisé le côté d'un carré en dix parties égales (p. 125, *fig. 100*). Nous aurions pu le diviser en un nombre quelconque de parties égales.

Par exemple, divisons le côté d'un carré en neuf parties égales. Sa surface est divisée en $9 \times 9 = 81$ carrés égaux. Il en résulte qu'un carré de 9^m , de 9^{dm} , etc., de côté contient 81^{m2} , 81^{dm2} , etc.

AUTRE EXEMPLE : Un carré de 316^{cm} de côté contient :

$$316 \times 316 = 99\ 856^{cm2}.$$

Ce résultat peut encore s'énoncer autrement :

Un carré de $3^m,16$ de côté a pour mesure $9^{m2},9856$ (bien remarquer que $9,9856 = 3,16 \times 3,16$).

Pourquoi un carré de $3,16$ m a-t-il pour aire $9,9856$ m² ? Parce que ce carré « contient » 316×316 carrés d'un centimètre carré chacun et que $316 \times 316 = 99\ 856$, en sorte que son aire est $99\ 856$ cm², ou $9,9856$ m². Plus loin dans leur manuel, les auteurs traitent de même du volume d'un cube. Un cube d'un mètre d'arête est découpé en « couches » d'un décimètre de hauteur, chaque couche étant découpée en « petits » cubes d'un décimètre d'arête. On sait déjà que chaque couche contiendra 100 petites boîtes cubiques. Il faut « 10 couches semblables pour remplir toute la caisse, soit $100 \times 10 = 1000$ boîtes ». On retrouve ici le mécanisme déjà analysé, dont témoigne à nouveau le passage suivant (p. 172), semblable au passage précédemment cité :

205. – Volume d'un cube d'arête quelconque.

Au lieu du mètre cube considéré (p. 170), nous pouvons envisager, par exemple, un cube dont l'arête est de 7^{dm} , et dire qu'il contient :

$$7 \times 7 \times 7 = 343\ dm^3,$$

Autre exemple, un cube dont l'arête est 123^{cm} contient :

$$123 \times 123 \times 123 = 1\ 860\ 867\ cm^3,$$

On peut encore énoncer ce résultat en disant qu'un cube dont l'arête a $12^{dm},3$ a un volume de $1860^{dm3},867$, ou encore qu'un cube dont l'arête a $1^m,23$ a un volume de $1^{m3},860\ 867$. D'où la règle suivante :

L'arête d'un cube étant exprimée en mètres, par exemple, au moyen d'un nombre décimal, si l'on multiplie ce nombre par lui-même et le produit obtenu par ce même nombre, le résultat final donne le volume du cube en mètres cubes.

Nous laisserons le lecteur, maintenant averti, prendre connaissance par lui-même de cet autre passage, où les mêmes mécanismes sont à l'œuvre :

211. – Volume du parallélépipède rectangle.

PREMIER EXEMPLE : *Soit une caisse ayant la forme d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont 15^{dm} et 8^{dm} pour le fond, la hauteur ayant 7^{dm} .*

Essayons d'y entasser des boîtes cubiques de 1^{dm} d'arête extérieure.

Le fond de la caisse étant un rectangle de 15^{dm} de long et de 8^{dm} de large, et la base de chaque cube étant un carré de 1^{dm} de côté, nous savons déjà (p. 136) que nous pouvons placer au fond de la caisse :

$$15 \times 8 = 120 \text{ boîtes cubiques.}$$

Cette première couche aura une hauteur de 1^{dm} . Comme la hauteur totale de la caisse est de 7^{dm} , on pourra remplir cette dernière avec **7** couches, soit en tout :

$$120 \times 7 = 840 \text{ boîtes.}$$

Chaque boîte ayant un volume de 1^{dm^3} , le volume de la caisse est de 840^{dm^3} .

DEUXIEME EXEMPLE : *Cherchons maintenant le volume d'un parallélépipède rectangle de 7^{dm} , 8 de long, 4^{dm} , 45 de large et de 0^{dm} , 76 de haut.*

Les dimensions n'étant plus des nombres entiers, le procédé qui vient d'être employé ne peut plus s'appliquer.

Mais nous pouvons, par un changement d'unité, revenir au cas précédent.

Les trois dimensions sont, en effet : 780^{mm} , 445^{mm} et 76^{mm} .

Nous pouvons imaginer que l'on emplisse le parallélépipède avec des boîtes de 1^{mm} d'arête, comme précédemment.

Nous trouvons ainsi, pour mesure de son volume en *millimètres cubes* :

$$780 \times 445 \times 76 = 26379600^{\text{mm}^3} \text{ (faites le calcul)}$$

ou, en convertissant en décimètres cubes :

$$26^{\text{dm}^3}, 3796.$$

Nous constaterons que la multiplication directe des nombres décimaux **7,8**, **4,45** et **0,76** qui étaient donnés dans l'énoncé, conduirait au même résultat :

$$7,8 \times 4,45 \times 0,76 = 26,3796.$$

Les auteurs font suivre ce passage, qui est en fait une démonstration, par la règle ainsi démontrée (ils l'avaient fait déjà à la suite des passages reproduits jusqu'ici). Dans ce dernier cas, la règle énoncée est la suivante :

212. – Règle.

Nous pouvons résumer ce résultat en disant :

Le nombre entier ou décimal qui mesure en décimètres cubes, par exemple, le volume d'un parallélépipède rectangle s'obtient en multipliant entre eux les trois nombres qui mesurent en décimètres les longueurs de ses arêtes.

On formulerait des règles analogues si l'unité choisie était le mètre cube, le centimètre cube, etc.

Dans ce type de règles, on voit que les longueurs des arêtes doivent s'exprimer dans la *même unité* que celle dont le cube est utilisé pour mesurer le volume du parallélépipède rectangle. Si l'on peut donc envisager de calculer un produit de la forme $a \text{ dm} \times b \text{ dm} \times c \text{ dm}$, on ne peut guère imaginer de « calculer » des produits du type $a \text{ dm} \times b \text{ cm} \times c \text{ mm}$ par

exemple ! C'est par des calculs auxiliaires de *conversion* qu'il faudra *préalablement* convertir les données disponibles pour obtenir leurs mesures par rapport à l'unité choisie – le décimètre dans l'exemple des auteurs.

f) Les mêmes auteurs utilisent aussi une formulation qui, avec la réforme des mathématiques modernes, connaîtra un succès dû à ce qu'elle permet de *séparer* les calculs sur les données numériques – écrites en gras, comme on l'a souligné – et la détermination de l'unité. Voici de cela un exemple, emprunté à un passage (p. 190) dont la diversité notationnelle est frappante (pour nous, modernes) :

EXEMPLE : *Un cône droit a pour base un cercle de **12^{cm}** de diamètre et sa hauteur mesure **10^{cm}**. Quel est son volume ?*

Rayon de base :

$$\mathbf{12^{cm} : 2 = 6^{cm}.$$

Surface de base (πR^2) :

$$\mathbf{6 \times 6 \times 3,14 = 113,04}, \text{ en centimètres carrés.}$$

Volume du cylindre de même base et de même hauteur ($\pi R^2 h$) :

$$\mathbf{113,04 \times 10 = 1\ 130,4}, \text{ en centimètres cubes.}$$

Volume du cône :

$$\mathbf{1\ 130,4 : 3 = 376^{cm^3},8}, \text{ soit } \mathbf{0!,377} \text{ (par excès).}$$

Il est possible que, ici comme en d'autres contextes de calcul, le fait d'obtenir le volume du cylindre sous la forme « **1 130,4**, en centimètres cubes » pousse à écrire le volume du cône sous la forme « **1 130,4 : 3 = 376^{cm3},8** » plutôt que sous la forme (cohérente) « **1 130^{cm3},4 : 3 = 376^{cm3},8** ». En vérité, le « jeu » avec ces différentes notations produit parfois des couacs, même entre des mains expertes ! À la page suivante, ainsi, calculant le volume d'une sphère d'un décimètre de diamètre, les auteurs en viennent à écrire ceci, où deux formulations se télescopent :

Volume de la sphère :

$$\mathbf{125 \times 4,19 = 523^{cm^3},75}, \text{ en centimètres cubes.}$$

Cela noté, d'où provient ce type de formulation, qui met l'unité « à part » ? Le raisonnement en termes de « petits carrés ou de « petites boîtes », qui vaut pour les aires ou les volumes des polygones et polyèdres, ne vaut pas de façon concrète pour l'aire du disque : dire qu'un disque de rayon 1 cm a pour aire 3,14 cm² (environ) ne se ramène que par un passage à la limite (simplement évoqué, à ce niveau) au comptage et au calcul d'un certain nombre de carrés. Cela peut amener à prendre une certaine distance avec une écriture (fautive) comme « $3,14 \times 1^2 = 3,14 \text{ cm}^2$ », qui, à l'origine, voulait signifier que l'on aurait dénombré 314 carrés d'un millimètre carré. Pour

éviter de se référer à une situation qui n'a jamais existé, on écrira donc pudiquement : « $3,14 \times 1^2 = 3,14$ en centimètres carrés ». En fait, sauf erreur de notre part, la première occurrence d'une telle formulation séparée de l'unité se trouve, dans l'ouvrage de Leconte et Itard, à la page 166, en un passage où il est question, non de l'aire d'un disque, mais de la longueur d'un cercle : les auteurs y écrivent successivement les deux égalités « commentées » « $2\pi \times 1 = 6,28$ en centimètres » et « $2\pi \times 3 = 24,84$ en centimètres ». Ce type de formulation réapparaît p. 184 à propos du volume d'une plaque (dont la forme n'est pas précisée : ce pourrait être un disque ou tout autre forme « circulaire ») de 24 cm^2 et d'épaisseur 3 mm ou 0,3 cm : les auteurs concluent alors que le volume de ladite plaque est « $V = 24 \times 0,3 = 7,2$ en centimètres cubes ». Nous avons rencontré plus haut ce type de formulation dans un contexte où une forme circulaire était en jeu. Pourtant, cet usage n'est pas constant : ainsi, p. 185, calculant le volume d'une boîte cylindrique de 32 mm de diamètre et 34 mm de hauteur, le rayon de la base est calculé par l'égalité (cohérente) « $32^{\text{mm}} : 2 = 16^{\text{mm}}$ », l'aire de la base est obtenue alors par l'égalité (fautive) « $16 \times 16 \times 3,14 = 803^{\text{mm}^2},84$ », le volume demandé étant enfin donné par l'égalité (elle aussi fautive) « $803,84 \times 34 = 27\ 330^{\text{mm}^3},56$ ». Il n'est pas déraisonnable de penser que la pratique – adoptée par les auteurs – d'écrire en gras les différentes valeurs *numériques* figurant dans les calculs prépare la séparation du calcul numérique, d'une part, et de l'indication de l'unité, d'autre part, séparation dont elle serait un signe avant-coureur, comme si nombres et unités se révélaient faiblement miscibles. C'est là que je m'arrêterai, pour aujourd'hui, sur cette question.

QUESTIONNER LES ŒUVRES DU MONDE ?

1. Entre normativité et fragilité praxéologiques

a) L'ensemble des développements relatifs au calcul des grandeurs (longueurs, aires, volumes, etc.) fournit une illustration frappante de plusieurs phénomènes qui sont au cœur de la vie des praxéologies. Le premier phénomène est celui de la *variation personnelle et institutionnelle* des praxéologies, dans le temps et dans l'espace des personnes et des institutions, en synchronie et en diachronie. Le deuxième phénomène est celui de la *normativité praxéologique*, personnelle et institutionnelle, qui, notamment chez les personnes et les institutions regardées comme des autorités en une matière donnée (professeurs, écoles, sphères savantes, etc.), s'exprime fréquemment par une *agressivité normative* plus ou moins insistante, voire violente. Le troisième phénomène, enfin, tient dans une tension entre *fragilité* et *rémanence*, cette dernière propriété se manifestant notamment par des phénomènes d'*hystérésis praxéologique*. Quant à la fragilité praxéologique – on aura peut-être noté la chose à propos de la

discussion examinée plus haut sur l'intégration ou la non-intégration des unités dans les calculs –, elle est certes un aspect davantage caché à l'acteur ordinaire leurré par le ton magistral de médias normatifs (professeur, manuel, etc.). Mais elle peut, en certaines circonstances, engendrer le sentiment d'un véritable *arbitraire*, entre caprice et tyrannie, dans l'exercice de leur normativité praxéologique par les personnes et les institutions.

b) Quelles sont les conséquences de cet état de fait en ce qui concerne l'enquête sur le monde ? L'étude d'une œuvre *O* suppose que l'« étudiant » *x* établisse, nourrisse, développe son rapport personnel à *O*, $R(x, O)$. Or, pour cela, minimalement, *x* doit pouvoir accéder à l'œuvre *O*, à la fois *in absentia* et *in praesentia*. Il se trouve pourtant qu'un quatrième phénomène tyrannise la vie des praxéologies : la variation des praxéologies est un autre visage de *l'accaparement institutionnel* (et, dans des cas limites, *personnel*) des praxéologies, de leur *confiscation* au profit de « propriétaires » réputés seuls légitimes détenteurs et, le cas échéant, seuls « vendeurs » patentés en la matière. On connaît à cet égard l'intransigeance des disciplines scolaires, toutes promptes à surveiller leur domaine des intrusions de « forains ». J'emprunterai ici une expression au sociologue Gérard Bronner (dont, toutefois, je ne reprendrai pas les thèses *en général*) : ce que l'on constate, c'est qu'il existe un « marché cognitif » qui a très généralement une structure *oligopolistique*, voire *monopolistique*. À cet égard, je me permettrai de citer un passage de l'ouvrage intitulé *L'empire des croyances* que Bronner a publié aux PUF en 2003 :

L'étrange fable de Abbott (1968), *Flatland... une aventure à plusieurs dimensions*, présente un exemple presque parfait de ce que peut être le plus exigeant des monopoles cognitifs. En effet, les habitants de cette contrée imaginaire sont confinés dans un monde à deux dimensions. Le héros, un carré, pas plus qu'aucun des habitants de ce pays, n'est en mesure d'imaginer l'existence d'une troisième dimension. D'ailleurs, lorsque le fils du héros, un hexagone, lui demande ce que pourrait bien constituer un côté élevé à la puissance trois, le père affirme un peu agacé à l'enfant qu'il s'agit là d'un non-sens.

On peut dire que, dans ce monde, il règne un monopole cognitif quant à la perception de la réalité, c'est-à-dire que la vision du monde physique est traduite par un énoncé qui ne souffre aucune concurrence et qui affirme *que* la réalité est à deux dimensions. D'ailleurs, l'ordre circulaire des prêtres veille à ce qu'il en soit ainsi, et les coûts sociaux de la contestation cognitive peuvent être très importants, comme notre héros carré en fait la cruelle expérience. En effet, à la suite de la vision d'une sphère faisant irruption chez lui, un être affirmant appartenir à *Spaceland*, le monde de la troisième dimension, il a la révélation de ce que peut être un volume. Il n'a de cesse

alors de tenter de convaincre ses concitoyens que la réalité n'est pas à deux dimensions, mais qu'une troisième dimension peut exister. Ce n'est pas une très bonne idée, car il est finalement interné, le Grand Cercle (chef des prêtres) lui rendant visite chaque année pour tenter, sans succès, de lui faire abjurer son hérésie. (p. 186)

Le livre d'Edwin A. Abbott (1838-1926) a paru en 1884 sous le titre *Flatland – A Romance of Many Dimensions*. (On en trouvera le texte original à l'adresse suivante : <http://www.geom.uiuc.edu/~banchoff/Flatland/>.) Par-delà cette fable lumineuse, on peut aussi utiliser le jargon informatique de langue anglaise en distinguant, idéal-typiquement, des œuvres ouvertes (*open*) et des œuvres propriétaires (*proprietary*). L'appropriation « privée » d'une œuvre *O* a des conséquences importantes sur lesquelles il convient de s'arrêter un instant.

c) Lorsqu'une œuvre *O* a pour *habitat* telle institution *I*, elle a aussi, dans *I*, une *niche*, une *fonction*, et tout cela – habitat et niche – va de pair avec des contraintes institutionnelles qui participent souvent moins de l'œuvre *O* « en-soi » que de son économie et de son écologie *dans l'institution I*. Ces contraintes, l'étudiant *x* n'a pas de raison de les assumer, de les reprendre à son compte dans son rapport à *O*, si ce n'est, éphémèrement, par opportunisme ou par courtoisie vis-à-vis de *I*. Imaginons donc un étudiant *x* « intéressé » par *O* et ayant repéré sa présence dans *I*. Étudier la version *O_I* de l'œuvre *O* a pour *x* un certain *coût*, à la fois *didactique* et *cognitif*, dont une partie est liée non tant à l'œuvre *O* qu'aux « particularismes » de *I*, à ses « idiosyncrasies institutionnelles ». Par ailleurs, ce que *I* permet à *x* de rencontrer et d'étudier, ce n'est pas *O* « en-soi », ce qu'on doit certes regarder comme une hypostase, c'est-à-dire une réalité supposée « se tenir » (*stasis*) « sous » (*hypo*) les manifestations particulières en lesquelles on la reconnaît, mais une *certaine* version de *O*, que j'ai notée *O_I*. Le coût didactique de l'étude de *O_I* peut être à la fois diminué (par rapport au coût d'étude d'autres versions institutionnelles de l'œuvre), ce qui est souvent le cas lorsque *I* se veut une institution « didactique » par rapport à *O*, mais *en même temps* augmenté de « faux frais » institutionnels : pour « apprendre » *O*, on étudie *O_I* et, pour cela, on doit « apprendre » (un peu, beaucoup, etc.) l'institution *I* elle-même. Le cas limite en la matière est connu : c'est celui dans lequel l'étudiant *x*, venu en quelque façon s'assujettir *provisoirement* à *I*, est finalement « absorbé » par *I*, dont il devient le sujet *permanent*, au prix de rompre les assujettissements qui lui avaient donné la force de venir jusqu'à *I* en quête de *O*. C'est ainsi par exemple qu'on a vu des didacticiens débutants devenir des informaticiens, des historiens, des gestionnaires, etc. Je n'ose dire : et réciproquement. Mais le risque existe toujours !

2. La tension entre particularisme et ouverture

a) L'œuvre hypostasiée O est parfois identifiée à la version observable en telle ou telle institution faisant autorité en la matière, soit à ce qu'on nomme la (ou une) version « savante » de l'œuvre. Mais l'attitude la plus commune consiste à *nier* cette multiplicité des versions de l'œuvre : on parlera ainsi *du* calcul des aires comme si toutes les versions existantes ou possibles de cette œuvre pouvaient être subsumées sous *la* version hypostasiée de l'œuvre. Cette identification à une hypostase – c'est-à-dire à une « abstraction faussement considérée comme une réalité », comme le dit le *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* d'André Lalande (1926/2006, p. 428) – est sans doute à l'origine d'une *paix cognitive* que permet un langage faussement univoque. Mais elle suppose un univers praxéologique figé et entre donc en conflit avec les dynamiques didactiques qui viendraient à le perturber.

b) Lorsqu'une enquête sur une question Q est lancée par une équipe $(X; Y)$, la réponse R recherchée doit satisfaire à des contraintes imposées par le système didactique $S(X; Y; Q)$ et certains de ses environnements. Telle est la signification de la notation $R^\forall$, qui rappelle que R doit satisfaire certaines exigences « contextuelles », tenant aux *particularismes* de $S(X; Y; Q)$, de l'école où ce système didactique déploie ses activités, etc. Il doit donc s'y créer une *synnomie*, une loi propre au système, qui organise le système des conditions et contraintes gouvernant le processus d'enquête et ses produits. L'activité de $S(X; Y; Q)$ a pour « matière première » les œuvres des types que recense, à l'enseigne du milieu didactique M , le schéma herbartien développé : réponses R_i^ϕ , autres œuvres O_j , autres questions Q_k . Or toutes ces œuvres ne sont accessibles qu'à travers des versions institutionnelles *particulières*, auxquelles le système $S(X; Y; Q)$ doit donc accéder afin de les étudier. Cette étude engage un double processus, d'abord de *départicularisation* puis de *reparticularisation*, afin de produire des matériels et des matériaux conformes à la loi du système didactique, adaptés à l'élaboration de $R^\forall$. C'est alors que, dans l'organisation sociale et scolaire du didactique, apparaît une variable clé : il s'agit du *degré d'ajustement* à $S(X; Y; Q)$ des œuvres O_l accessibles à $S(X; Y; Q)$, degré qui dépend bien sûr des conditions et contraintes d'accès aux œuvres utiles.

c) Je soulignerai à nouveau, ici, que la tendance historique dans l'organisation didactique de nos sociétés a, depuis des siècles, consisté en un double mouvement solidaire : *accroître fortement le degré d'ajustement des œuvres à utiliser au prix de réduire fortement le cercle des œuvres « accessibles »*. En tant que profession, les professeurs se sont toujours davantage définis par leur capacité de proposer aux élèves des œuvres « bien

ajustées » : livre bien choisi (dans la pédagogie de régent), devoir bien combiné (dans la pédagogie de l'étude), cours « impeccable » (dans la pédagogie de professeur), activité ou situation bien pensée (dans la pédagogie contemporaine). Par contraste, la *pédagogie de l'enquête*, telle qu'on l'entend ici, se sépare de cette visée pour déplacer le point où le professeur, devenant « chef d'enquête », vient peser dans le processus d'étude. D'une part, l'étude d'une question Q suppose une certaine capacité d'exploiter – et donc de « départiculariser » – des œuvres O_I qui, quoique toujours marquées (y compris dans la sphère « savante ») par des intentions didactiques antérieures, ne visent nullement, en règle générale, à faciliter l'étude de l'œuvre par $S(X; Y; Q)$, sous les contraintes et dans les conditions prévalentes. D'autre part, et réciproquement, l'enquête sur Q doit permettre aux élèves x (respectivement, aux aides à l'étude y) de progresser dans leur maîtrise des praxéologies de l'enquête en position d'élève (respectivement, d'aide à l'étude). Or la réduction de l'univers des œuvres « utiles » à une sélection d'œuvres très apprêtées annule à l'avance – ou, du moins, cherche à annuler – le travail de départicularisation-reparticularisation et son assomption explicite par le système didactique $S(X; Y; Q)$: une part importante de ce qui mériterait d'être étudié et appris est ainsi en grande partie refoulé dans l'inconscient didactique.

d) La pédagogie de l'enquête telle que je m'efforce de concourir à son essor s'impose donc cette condition : que l'on ne cherche pas à toute force à faire que les œuvres dont se nourrit l'enquête soient apprêtées en vue d'un usage réputé « optimal » au sein de $S(X; Y; Q)$ – l'optimalité étant, au reste, bien rarement réalisée dans les œuvres scolairement apprêtées ordinairement disponibles. Le rôle du professeur est ailleurs : dans la conduite de l'enquête afin que celle-ci aboutisse et, solidairement, afin que la capacité d'enquêter dans un domaine donné s'accroisse. Il y a là une mission en grande partie nouvelle, qui commence à peine à émerger alors que l'ancien monde didactique est en déclin.

That's all, folks!