

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

Non ridere, non lugere, neque detestari, sed intellegere. Baruch Spinoza (1632-1677)

Le lendemain, Aymery prit la ville. Victor Hugo (1802-1885)

Le séminaire TAD & IDD, animé par Yves Chevallard, a une double ambition solidaire : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment des professions de professeur, de formateur et de chercheur en didactique. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des praxéologies mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 16 h 30 à 18 h 30, la séance pouvant être suivie à distance par visioconférence.

→ Séance 1 – Vendredi 17 janvier 2014

PASSÉ & PRÉSENT

1. « Événements »

a) Comme l'année dernière, le séminaire TAD/IDD ne commence cette année qu'avec la rentrée de janvier. Mais les raisons sont cette fois différentes. Elles tiennent essentiellement à une charge de travail qui, au premier trimestre, m'a conduit à suspendre provisoirement, pendant quelques mois, certaines activités traditionnelles, dont ce séminaire.

b) Je mentionnerai ici trois « événements » de nature bien différente. Tout d'abord, j'ai prononcé une conférence à Marseille le dimanche 20 octobre dans le cadre des Journées nationales 2013 de l'APMEP, journées qui se sont tenues dans cette ville. Ensuite, j'ai donné un cours de trois fois trois heures (le mardi 26 novembre, le mercredi 27 et le vendredi 29) à l'Université nationale de Córdoba (Argentine). Enfin, j'ai prononcé un discours lorsque, le jeudi 28 novembre, m'a été remise la médaille de docteur *honoris causa* de

cette université, qui fêtait en 2013 son 400^e anniversaire (elle a été fondée en 1613).

c) À cela s'ajouteront quelques notations inspirées par des interventions extérieures aux événements évoqués jusqu'ici.

2. Quelques thèmes récurrents

a) Je ne ferai pas, ci-après, un récit événement par événement. J'ai retenu, dans l'ensemble de ce que j'ai eu l'occasion de faire, quelques thèmes plus ou moins insistants, qu'il me semble pertinent d'évoquer dans le cadre de ce séminaire. Ce qui suit est donc un ensemble de notations, thème par thème, tirées de l'ensemble des textes que j'ai été amené à rédiger et à défendre au cours de cette première partie de l'année.

b) Le premier de ces thèmes est ce que j'ai appelé, de manière un peu énigmatique, *la création spontanée de logos*. Le deuxième a trait à ce qu'on peut nommer *Des mathématiques pour les non-mathématiciens ?* Enfin le troisième concerne *L'extension du champ de la TAD*.

LA CRÉATION SPONTANÉE DE LOGOS

1. Un rapport désuet à la calculatrice

a) Dans le cadre du cours de Córdoba, j'ai insisté sur un phénomène qui me paraît explicatif de certains dérèglements des dynamiques praxéologiques : appelons-le, pour faire court, la *création spontanée de logos*. Création spontanée, subreptice, opportuniste, qui pour cela est laissée généralement non analysée, et qui, nous le verrons, bloque l'évolution de la *praxis*. De quoi s'agit-il ? Considérons une praxéologie $\wp = \Pi \oplus \Lambda$ transposée dans une institution I sous la forme $\wp^* = \Pi^* \oplus \Lambda^*$. On suppose que le *logos* transposé Λ^* est, dans I , fragile, incertain, évanescent. Ce que l'on aperçoit alors peut être, en première approximation, décrit ainsi : la place du *logos*, occupée d'abord par Λ^* , commence par s'évider avant de se remplir à nouveau, subrepticement, d'un *logos* Λ^{**} « justifiant » – comme étant « évidente », quasi « naturelle » – la *praxis* Π^* . Je dirai alors que la *praxis* Π^* engendre – sous tout un ensemble de conditions et de contraintes, bien sûr – le *logos* Λ^{**} . C'est un processus que je noterai de façon générale de la manière suivante : $\Pi \hookrightarrow \Lambda^*$.

b) Pour illustrer ce phénomène du *logos* opportuniste, j'ai utilisé un exemple classique pour nous relatif à la « difficile » utilisation de la calculatrice : celui

du calcul de la forme « canonique » d'expressions contenant un radical. Supposons que nous voulions écrire l'expression

$$A = \frac{1}{(4 - \sqrt{3})^2} + (4 - \sqrt{3})^3$$

sous la forme $u + v\sqrt{3}$, avec $u, v \in \mathbb{Q}$. On connaît une technique classique, enseignée au lycée, de « calcul à la main », qui conduit ici à faire ceci :

$$\frac{1}{(4 - \sqrt{3})^2} = \frac{(4 + \sqrt{3})^2}{(4 - \sqrt{3})^2(4 + \sqrt{3})^2} = \frac{16 + 3 + 8\sqrt{3}}{(4^2 - (\sqrt{3})^2)^2} = \frac{19 + 8\sqrt{3}}{(16 - 3)^2} = \frac{19}{169} + \frac{8}{169}\sqrt{3}.$$

Mais supposons alors que nous disposions du théorème technologique suivant :

Théorème. Étant donné une fraction rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes à coefficients rationnels, il existe deux nombres rationnels u et v tels qu'on ait : $f(\varepsilon\sqrt{3}) = u + \varepsilon v\sqrt{3}$, où $\varepsilon = \pm 1$.

On peut engendrer à partir de là une technique qui découle du corollaire suivant :

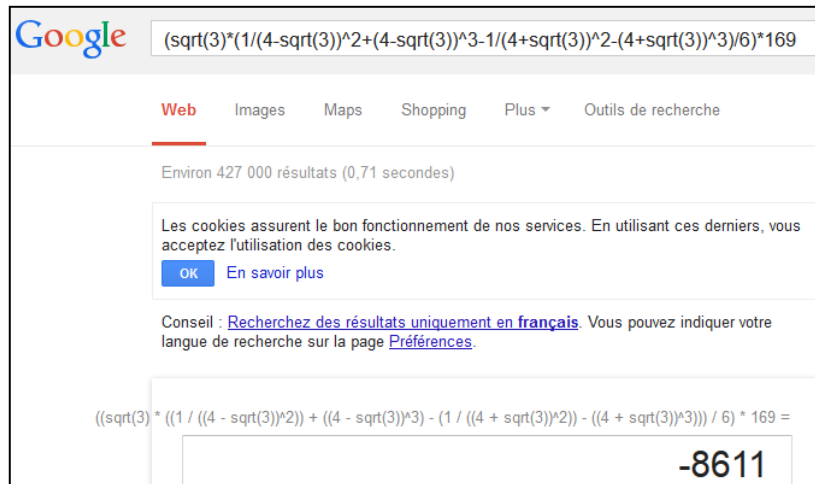
$$\text{Corollaire. On a : } u = \frac{f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3})}{2} \text{ y } v = \frac{\sqrt{3}(f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3}))}{6}.$$

On peut alors utiliser ce résultat pour calculer, par exemple à l'aide de la calculatrice de Google, des valeurs décimales approchées de u et v . En multipliant ces valeurs par $13^2 = 169$, qui est la valeur du dénominateur de

$$\frac{1}{(4 - \sqrt{3})^2} \frac{(4 + \sqrt{3})^2}{(4 + \sqrt{3})^2},$$

on obtient finalement les numérateurs n_u et n_v de u et v mis sous la forme $\frac{n_u}{169}$ et $\frac{n_v}{169}$ (voir les copies d'écran ci-après).





On aura donc finalement l'égalité :

$$\frac{1}{(4 - \sqrt{3})^2} + (4 - \sqrt{3})^3 = \frac{16919}{169} - \frac{8611}{169} \sqrt{3}.$$

Comme 13 ne divise ni 16919, ni 8611, on peut en rester là...

c) Cette technique τ^* , engendrée à partir d'un bloc gnosique $\Lambda^* = [\theta^* / \Theta^*]$ qui *pourrait* exister (dans un cadre mathématique idoine), ne s'est pas diffusée jusqu'à aujourd'hui, et cela pour de multiples raisons sans doute, parmi lesquelles on doit situer une raison *théorique* : la croyance que la calculatrice est une chose incertaine, dangereuse et, en fin de compte, « mauvaise ». Pour que cette technique τ^* soit reçue, il faudrait que le corollaire technologique ci-dessus se trouve intégré à la nouvelle technologie θ^* et que la nouvelle théorie Θ^* permette de dépasser la croyance dominante que la calculatrice est un mauvais objet et propose de celle-ci, tout au contraire, une vision mathématiquement positive. Mais pourquoi la *praxis* mathématique courante a-t-elle engendré cette attitude de défiance à l'endroit de la calculatrice ?

d) Ma réponse – conjecturale – est la suivante : on a reporté sur la calculatrice les « mauvaises » propriétés du calcul numérique antérieur à l'apparition des moyens électroniques de calcul (règles à calcul, tables de logarithmes et autres tables). Ce calcul numérique « à l'ancienne » me semble avoir été caractérisé par deux faits non indépendants : le coût élevé voire insurmontable de l'obtention de suffisamment de décimales exactes, tout d'abord, et l'imprécision des calculs qui en résulte, ensuite. C'est là un type de faits que nous avons déjà commenté. Dans un livre paru en 1954 et dont je vais reparler, *Les mathématiques utiles* de Jean-Louis Pelletier, « agrégé de mathématiques » (1945), l'auteur doit, à un certain moment (pp. 18-19), calculer l'expression numérique

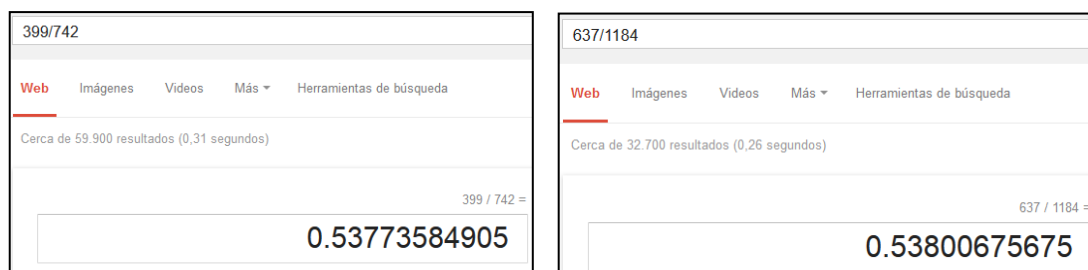
$$\frac{1}{4} (\sqrt{14,472} - 2,140752).$$

Il donne de cette expression la valeur décimale approchée 0,415812. Les calculatrices modernes donnent, elles, la valeur 0,415864049048841... Ces résultats diffèrent dès la 5^e décimale. De façon incontrôlée, et du moins dans l'univers mathématique non spécialisé, le rapport commun au calcul numérique d'autrefois s'est reporté, apparemment, sur le calcul numérique d'aujourd'hui : la *praxis* a engendré du *logos*, et qui perdure.

2. Un rapport bloqué au numérique

a) Le phénomène de non-mise à jour d'un certain *logos* semble tout aussi net à propos d'un autre exemple que nous connaissons bien et que j'ai présenté à Córdoba à travers la question Q_0 suivante (que l'on suppose formulée par un élève) :

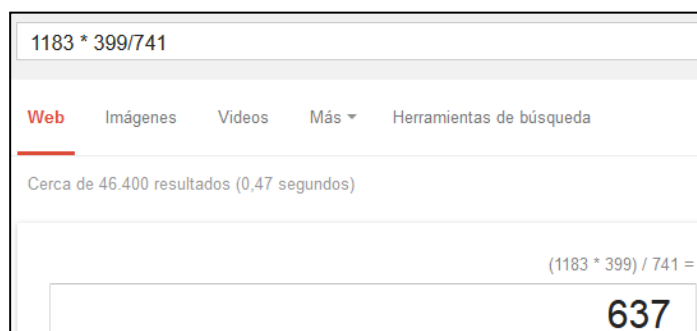
Q_0 . Un professeur dit qu'on ne peut utiliser la calculatrice pour s'assurer de l'égalité d'expressions numériques comme, par exemple, $\sqrt{18}$ et $3\sqrt{2}$ ou $\frac{399}{741}$ et $\frac{637}{1183}$. Pourtant, chaque fois que nous avons pu démontrer l'égalité proposée par un calcul à la main, la calculatrice donnait aussi le résultat correct. Quand, à l'inverse, les deux expressions n'ont pas la même valeur, comme il en va de $\frac{399}{742}$ et $\frac{637}{1184}$, la calculatrice ne se laisse pas tromper, comme on peut le voir ci-après :



Quelle est donc la clé du mystère ? Comment s'explique le « théorème pragmatique » qu'on peut exprimer ainsi : $a = b \Leftrightarrow a \stackrel{\text{calc}}{=} b$, où $\stackrel{\text{calc}}{=}$ désigne la relation d'égalité « de la calculatrice » ?

b) De fait, il semble que, aujourd'hui encore, la profession donnerait foi à ce genre de petit discours moral : « Tout ce que peut nous dire la calculatrice, c'est que les nombres a et b ont leurs premières décimales identiques. Mais il se peut que les décimales de ces nombres diffèrent à des rangs que la calculatrice ne nous fournit pas. S'il en est ainsi, les nombres sont distincts ! Nous ne sommes sûrs de rien. » En fait, l'interdiction de l'emploi de la

calculatrice dans la classe de mathématiques dépend aujourd'hui de l'usage exact qui en est fait. Ainsi, pour vérifier si l'on a $\frac{399}{741} = \frac{637}{1183}$, il *semble* accepté qu'on utilise la calculatrice pour voir si l'on a ou non l'égalité des expressions numériques $1183 \times \frac{399}{741}$ et 637 (voir ci-après).



À plus forte raison acceptera-t-on l'emploi de la calculatrice s'il s'agit « simplement » de comparer les produits en croix 1183×399 et 741×637 . Pourquoi donc la refuse-t-on ailleurs ? Voyons cela.

c) On aura observé que, dans le cas des fractions $\frac{399}{742}$ et $\frac{637}{1184}$, qui ont des valeurs distinctes, la différence entre ces valeurs est « grande » *pour la calculatrice* : elle vaut en effet 0,000270907700..., un nombre que la calculatrice *ne peut pas confondre avec zéro*. Ce phénomène est général. On a en effet :

$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \Rightarrow \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| = \frac{|ad - bc|}{bd} \geq \frac{1}{bd}.$$

Ce résultat peut être amélioré si l'on utilise le PPCM de b et d :

$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \Rightarrow \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| \geq \frac{1}{\text{PPCM}(b, d)}.$$

Par suite, on a :

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| < \frac{1}{\text{PPCM}(b, d)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Dans le cas des fractions $\frac{399}{741}$ et $\frac{637}{1183}$ on a $\frac{1}{\text{PPCM}(b, d)} = \frac{1}{67431} > 0,00001$, ce qui permet de conclure que les fractions sont égales.

d) Le cas des expressions contenant un radical est également classique pour nous. Soit a, b, c des entiers naturels non nuls. Supposons que l'on ait

$$a\sqrt{b} \neq \sqrt{c}.$$

Il vient alors :

$$|\alpha\sqrt{b} - \sqrt{c}| = \frac{|a^2b - c|}{\alpha\sqrt{b} + \sqrt{c}} \geq \frac{1}{\alpha\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

On déduit de là le « théorème technologique » suivant :

$$\alpha\sqrt{b} \neq \sqrt{c} \Rightarrow |\alpha\sqrt{b} - \sqrt{c}| \geq \frac{1}{\alpha\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Cette proposition équivaut à cette autre :

$$|\alpha\sqrt{b} - \sqrt{c}| < \frac{1}{\alpha\sqrt{b} + \sqrt{c}} \Rightarrow \alpha\sqrt{b} = \sqrt{c}.$$

Prenons $a = 3$, $b = 2$ et $c = 18$; il vient :

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \frac{1}{3 \times 3 + 5} = \frac{1}{14} > 0,07.$$

Si l'on avait $3\sqrt{2} \neq \sqrt{18}$, on aurait aussi $|3\sqrt{2} - \sqrt{18}| > 0,07$. Cela implique que, si les nombres $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$ ont leur *deux* premières décimales identiques, alors ces nombres sont *égaux*. Le raisonnement du professeur est donc *faux*. Dans le cas examiné, nous avons $3\sqrt{2} \stackrel{\text{calc}}{=} 4,24\dots$ et $\sqrt{18} \stackrel{\text{calc}}{=} 4,24\dots$. Il en résulte donc que $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$.

e) La croyance non explicitée qui détermine le rejet de l'emploi de la calculatrice est un élément « théorique » qui nous vient de la vieille culture de l'analyse mathématique, à savoir la croyance en un *continuisme numérique*. Cette culture ancienne est beaucoup plus répandue que la culture plus récente des mathématiques discrètes. Une fois de plus, derrière l'erreur mathématique prêtée au professeur de la question Q_0 , c'est la théorie qui mène la danse ! Par contraste, la théorie adéquate aux besoins d'aujourd'hui devrait se construire autour du théorème « théorique » suivant, qui explique les théorèmes technologiques vus plus haut :

Soit f et g deux applications de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{R}$, où p est un entier naturel, et soit des entiers naturels $N_1, N_2, \dots, N_p$. L'ensemble de nombres réels

$$C = \{ r / r = |f(a_1, a_2, \dots, a_p) - g(a_1, a_2, \dots, a_p)| \wedge r > 0 \wedge a_1 \leq N_1 \wedge \dots \wedge a_p \leq N_p \}$$

possède un minimum $\rho > 0$.

La démonstration de ce théorème « fondamental » est immédiate : elle découle du fait que l'ensemble C est *fini*, du fait que l'ensemble de p -uplets d'entiers naturels $\{(a_1, a_2, \dots, a_p) / a_1 \leq N_1 \wedge \dots \wedge a_p \leq N_p\}$ est lui-même fini. Si, donc, la calculatrice employée peut « voir » des différences inférieures à ρ , elle ne pourra pas confondre les réels $f(a_1, a_2, \dots, a_p)$ et $g(a_1, a_2, \dots, a_p)$ lorsque ceux-ci *ne sont pas* égaux. C'est là un fait essentiel en certaines situations technologiques *et techniques*.

3. « Comment l'intuition peut-elle nous tromper à ce point ? »

a) Dans le cours de Córdoba, je suis également revenu sur un exemple déjà présenté ailleurs, celui d'une technique τ_f de recherche du quotient euclidien d'un entier a par un entier b (où $a, b \in \mathbb{N}^*$) qui peut être mise en œuvre « oralement » (ou, si l'on veut, « mentalement »), dès lors du moins que l'on rejette l'absurde tyrannie de l'exigence – cultivée par la tradition scolaire et acceptée par la culture populaire – de quasi-instantanéité des calculs.

b) C'est une technique que vous connaissez : si je veux obtenir le quotient de a par $b = b_1 b_2$, je peux commencer par déterminer le quotient q_1 de a par b_1 , pour déterminer alors le quotient q_2 de q_1 par b_2 : on aura *in fine* $q = q_2$. Ce procédé se généralise au cas où $b = b_1 b_2 \dots b_n$ ($n \geq 3$). Considérons ainsi les nombres $a = 2625$ et $b = 105$. La mise en œuvre de τ_f suppose que l'on identifie un premier facteur de b . Ici, il semble intéressant de commencer par le facteur $b_1 = 5$; le nouveau dividende q_1 peut s'obtenir « mentalement » ainsi : $2625/5 = (2600 + 25)/5 = 260 \times 2 + 5 = 525$. Le nouveau diviseur est, lui, égal à $105/5 = 100/5 + 1 = 21$. On peut alors diviser par 7, ce qui donnera pour nouveau diviseur 3 et pour nouveau dividende $525/7 = 490/7 + 35/7 = 70 + 5 = 75$. Nous devons enfin calculer le quotient de 75 par 3, ce qu'on peut faire ainsi : $60/3 + 15/3$, soit 25. Je souligne au passage, contre la monomanie instantanéiste, le parti-pris des « mathématiques lentes » qui inspire ces calculs « paresseux ».

c) Il est clair que la technique τ_f paraît se heurter à un obstacle considérable lorsque l'un des quotients $q_0 = a, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ (avec $q_n = q$) n'est pas divisible par le facteur b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) du diviseur b . Tenons-nous-en pourtant, même dans ce cas, à la « recette » mise en œuvre dans le cas où nul obstacle de cet ordre ne se présente. Recherchons ainsi le quotient de $a = 84639$ par $b = 24$. Prenons $b_1 = 8$; on a : $84639/8 = (84600 + 32 + 7)/8$



$= 84000/8 + 600/8 + 4 + 7/8 = 10000 + 500 + 75 + 4 + 7/8 = 10579 + 7/8$. Il vient donc $q_1 = 10579$, dividende qu'il faut alors diviser par 3. On a : $10579/3 = 9000/3 + 1500/3 + 60/3 + 18/3 + 1/3 = 3000 + 500 + 20 + 6 + 1/3 = 3526 + 1/3$. On obtient ainsi $q_2 = 3526$. A-t-on bien $q = 3526$? Le recours à la calculatrice de Google (voir ci-contre) donne pour reste $r = 15$, ce qui

permet de conclure positivement. Que donne τ_f si l'on prend $a = 3451$ et $b = 27$? Choisissons $b_1 = 3$; il vient $3451/3 = 3300/3 + 150/3 + 1/3 = 1100 + 50 + 1/3 = 1150 + 1/3$. Divisons alors 1150 par 9 : $1150/9 = 999/9 + 99/9 + 52/9 = 111 + 11 + 45/9 + 7/9 = 122 + 5 + 7/9 = 127 + 7/9$. Le quotient de

3451 par 27 est-il bien égal à 127 ? On recourt ici à nouveau, mais différemment, à la calculatrice de Google :



Si l'on admet (nous y revenons plus loin) que le quotient entier est la partie entière du quotient affiché par la calculatrice, la réponse à notre question est bien positive.

d) Que se passe-t-il donc ? D'aucuns pourront penser que les exemples précédents sont simplement « bien choisis », mais que τ_f ne saurait être valide « dans le cas général », et cela parce qu'elle nous fait « négliger les restes », ce qui ne saurait se faire sans conséquences fâcheuses ! La situation est pourtant curieuse. Si la technique τ_f est valide, pourquoi ne le dit-on pas ? Nous savons en fait que, autrefois, la technique τ_f était officiellement reconnue, comme le montre cet extrait d'un manuel pour les classes de 4^e et de 3^e, cosigné avec sa sœur Anna Cartan (1878-1923) par Élie Cartan (1869-1951), qui le publia en 1934. Les auteurs y présentent d'abord – et y démontrent – le théorème suivant :

Théorème IV. – *Lorsqu'un nombre est divisible par un produit de facteurs :*

1^o *Il est divisible par chacun des facteurs ;*

2^o *Pour obtenir le quotient du nombre par le produit, on peut diviser ce nombre par le premier facteur, le quotient obtenu par le deuxième facteur, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait employé tous les facteurs comme diviseurs ; le dernier quotient obtenu est le quotient cherché. (p. 53)*

Puis ils ajoutent ce commentaire :

Remarque. – Si un nombre n'est pas divisible par un produit de facteurs, on démontre qu'on peut néanmoins trouver le quotient du nombre par le produit en appliquant la deuxième partie du théorème IV [...]. Pour avoir le quotient de 6783 par le produit 100×9 , on peut d'abord diviser 6783 par 100, ce qui donne 67 comme quotient, puis diviser 67 par 9. (p. 54)

e) « On démontre », écrivent Élie et Anna Cartan. Comment cela ? Commençons par le lemme que voici :

Lemme. L'entier q est le quotient de la division de a par b (où $ab \neq 0$) si et seulement si on a : $bq \leq a$ et $a + 1 \leq b(q + 1)$.

Je laisse au lecteur la démonstration de ce lemme. Supposons alors que $b = b_1 b_2$. Soit q_1 le quotient de la division de a par b_1 et q_2 le quotient de la division de q_1 par b_2 . On a $a \geq b_1 q_1$ et $q_1 \geq b_2 q_2$; par suite on a $a \geq b_1 q_1 \geq b_1 b_2 q_2 = b q_2$. De même, on montre que $a + 1 \leq b(q_2 + 1)$, ce qui, puisque $b q_2 \leq a$, permet de conclure que le quotient de la division de a par b est q_2 . On a ainsi démontré (dans le cas $n = 2$) que τ_f est une technique valide. Mais un problème reste ouvert : la plupart des gens semble penser que, parce que la technique τ_f « oublie » les restes $r_1 = a - b_1 q_1$ et $r_2 = q_1 - b_2 q_2$, elle change *ipso facto* – sauf exceptions ! – le quotient « final ». En d'autres termes, beaucoup n'ont pas une « intuition juste » de ce qui se passe *vraiment*.

f) Si la démonstration présentée ci-dessus permet de *prouver* le théorème justificatif de τ_f , il semble clair que cette démonstration ne nous permet pas de « comprendre » τ_f : elle n'est en vérité qu'une *partie* d'une technologie θ_f « complète » de la technique τ_f . Est-il possible de donner à τ_f une plus grande intelligibilité ? Pour tenter du moins de créer un peu plus d'intelligibilité, essayons de suivre ce qui se passe quand on met en œuvre τ_f . On a :

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b_1 b_2} = \frac{q_1 + \frac{r_1}{b_1}}{b_2} = \frac{q_1}{b_2} + \frac{1}{b_2} \frac{r_1}{b_1} = q_2 + \frac{r_2}{b_2} + \frac{1}{b_2} \frac{r_1}{b_1}.$$

Ce que l'on oublie en appliquant la technique τ_f , c'est la somme

$$\rho_2 = \frac{r_2}{b_2} + \frac{1}{b_2} \frac{r_1}{b_1}.$$

Si l'on a $\rho_2 < 1$, le quotient cherché est bien q_2 . Comme l'on a

$$\frac{r_1}{b_1} \leq \frac{b_1 - 1}{b_1} = 1 - \frac{1}{b_1} \text{ et } \frac{r_2}{b_2} \leq \frac{b_2 - 1}{b_2} = 1 - \frac{1}{b_2},$$

il vient :

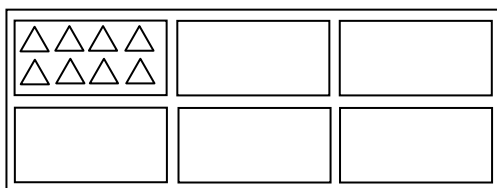
$$\rho_2 \leq 1 - \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_2} \left(1 - \frac{1}{b_1}\right) = 1 - \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1 b_2} = 1 - \frac{1}{b_1 b_2} < 1.$$

Ce résultat se généralise aisément ; dans le cas de n facteurs $b_1, b_2, \dots, b_n$, on a de même :

$$\frac{a}{b} = q_n + \rho_n \text{ avec } \rho_n \leq 1 - \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_n} < 1.$$

Le reste ρ_n est donc toujours strictement inférieur à 1. *Quod erat demonstrandum.*

g) Le sentiment d'intelligibilité est peut-être un peu plus fort lorsqu'on considère la démonstration précédente. On va voir cependant qu'on peut éclairer davantage encore le phénomène examiné jusqu'à le rendre « évident », et cela à l'aide d'un « matériel » très simple. Imaginons en effet un employé d'une fabrique de chocolats qui doit préparer des boîtes de chocolats en respectant les contraintes suivantes : pour des raisons de fraîcheur, les chocolats sont d'abord rangés dans des petites boîtes contenant chacune 8 chocolats (voir le schéma ci-dessous) ; ces petites boîtes sont alors rangées elles-mêmes dans de grandes boîtes contenant



chacune 6 de ces petites boîtes, comme le montre le schéma ci-contre. L'employé, qui dispose d'un nombre non précisé de chocolats, commence son travail ; il remplit q_1 petites boîtes et il lui reste $r_1 = 7$

chocolats. Avec les q_1 petites boîtes, il remplit alors q_2 grandes boîtes et il lui reste $r_2 = 5$ petites boîtes. Il devrait être évident que l'employé ne pourra pas composer une seule grande boîte de plus, ni même une petite ! Le nombre de boîtes de chocolats qu'il parviendra à remplir est définitivement q_2 . Ainsi, q_2 est bien le quotient de la division du nombre de chocolats dont il disposait par $8 \times 6 = 48$.

h) Pourquoi le phénomène arithmétique qui devient transparent lorsqu'on évoque des boîtes de chocolats se brouille-t-il lorsqu'on emploie le langage pourtant classique de la division ? La réponse me paraît être la suivante : la *praxis* arithmétique traditionnelle ou, plus exactement, la pratique de l'algorithme de division de l'école primaire engendre clandestinement un *logos* qui, lui, peut être vociférant. Quel est son contenu clé ? C'est qu'on ne doit jamais « négliger les restes » ! Lorsqu'on procède comme la technique τ_f nous enjoit de le faire, nous entendons une petite voix qui nous murmure : « On ne doit jamais oublier les restes dans une division ! Jamais ! » Que se passerait-il, en effet, si l'on oubliait les restes dans l'effectuation d'une division par la technique « classique » ? On peut le voir sur l'exemple ci-après :

Technique « correcte » Technique « oublieuse »

6918	5	6918	5
1918	1383	1918	1101
418		418	
18		18	
3		3	

(Notons, pour être exact, que, dans la technique « oublieuse », ce qui est oublié n'est pas le reste mais le premier chiffre de celui-ci.) Cela noté, le seul « reste » que l'on peut oublier sans conséquences pour le quotient est le *dernier* reste, c'est-à-dire l'unique reste qui soit inférieur au diviseur. Ce qui importe surtout, ici, c'est de noter l'influence souterraine, non régulée, de la *praxis* arithmétique. Quoique cet exemple puisse être regardé comme « mathématiquement trivial », on pourrait reprendre à son endroit l'exclamation d'Henri Poincaré touchant la découverte des fonctions continues non dérivables : « Comment l'intuition peut-elle nous tromper à ce point ? » (<http://www.univ-nancy2.fr/poincare/bhp/hp1905vs/sec2.xml>). Plus généralement, on a là un schéma que l'on peut retrouver, je crois, en toute activité humaine : une *praxis* indurée engendre un *logos* jugé « naturel », et ce *logos*, qui est ajusté à une *praxis* depuis si longtemps installée, bloque alors l'évolution du *logos* – et de la *praxis*.

DES MATHÉMATIQUES POUR LES NON-MATHÉMATICIENS ?

1. Quel curriculum mathématique ?

a) Le thème des connaissances mathématiques utiles à tel ou tel public fait l'objet d'un questionnement très actuel, notamment, pour ce qui nous concerne, dans le cadre du travail de thèse de Sineae Kim. Dans ma conférence aux journées nationales 2013 de l'APMEP, j'ai introduit un schéma tripartite, certes grossier, mais qui permet de souligner un fait important. J'ai repris ce schéma dans mon discours de réception du doctorat honoris causa à l'Université nationale de Córdoba le 28 novembre 2013 afin de formuler le projet curriculaire qui, en tant qu'objet à étudier, sera au cœur de certains de nos travaux à venir. Avant d'expliciter tout cela, il me faut dire quelques mots de la genèse de ce que je vais exposer plus loin.

b) À l'origine de ce schéma, il y a un constat que chacun connaît bien, à savoir le fait que la population « générale » ne sait à peu près rien en mathématiques, parce qu'elle a presque tout oublié des mathématiques qui ont pu lui être enseignées au primaire et au secondaire, selon le mécanisme (et quasi-mot d'ordre) « Poubelle. Vider poubelle ». Je souligne que je parle ici de la population *adulte*, non des élèves de 15 ans qu'évalue PISA – le *Programme for International Student Assessment* (en français : *Programme international pour le suivi des acquis des élèves*) –, évaluation à laquelle les médias ont pris l'habitude de donner un écho répété à satiété, qui empêche de voir le problème plus vaste qui est celui, non des adolescents seulement, mais *de toute la population* – et qui touche déjà ceux, journalistes et commentateurs de toute espèce, qui font profession de se désoler de l'état de

dénuement praxéologique, en mathématiques notamment, auquel seraient réduits nos élèves.

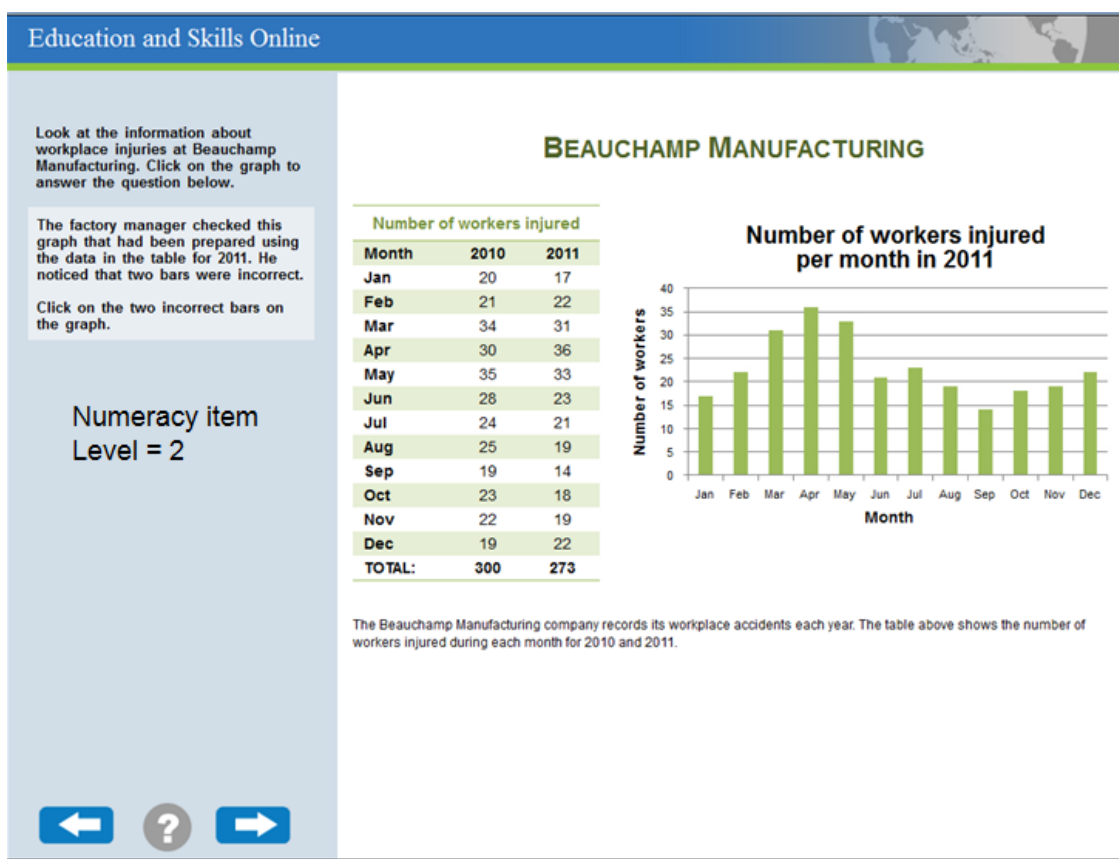
c) Il se trouve que, il y a peu, l'OCDE – l'*Organisation de coopération et de développement économiques* – a publié les premiers résultats de son *Programme pour l'évaluation internationale des compétences des adultes* (PIAAC : *Programme for the International Assessment of Adult Competencies*). Ce programme s'attache, non pas aux élèves de 15 ans, mais *aux personnes de 16 à 65 ans*. Au fond, ce que savent les élèves de 15 ans nous importerait peu si nos sociétés avaient choisi de nous laisser à l'état de sauvages jusqu'à l'âge de 15 ans révolus et requerraient seulement de nous un intense effort de formation à partir de 15 ans et jusqu'à, disons, 25 ans, cet effort se poursuivant d'ailleurs, quoique avec une intensité variable, tout au long de la vie. Qu'en est-il donc des Français de 16 à 65 ans ? Si l'on procède à un classement, les résultats publiés par l'OCDE donnent à la France une place modeste : là encore, le Japon, la Finlande, la Suède se placent au sommet. Mais ce n'est pas à une compétition nationaliste entre pays que ces résultats invitent, à mes yeux, même si, dans les médias, cette compétition est un thème des plus commentés, qui, pour cela, cache ce qui me paraît le vrai problème. S'agissant des résultats obtenus dans le cadre du PIAAC, je ne citerai à cet égard qu'un bref commentaire figurant sur le site de l'OCDE (<http://www.oecd.org/fr/sites/piaac-fr/#d.fr.221854>) :

In the top performing countries Japan and Finland, around 20% of the participants showed proficiency in reading and math at the highest level, almost twice as many as in the OECD on average. But even in these top-performing countries, between 5% and 12% of the population are not able to perform the most basic calculations or understand simple pieces of text.

Il est bon, faute de mieux, de présenter au moins un exemple de question de « numératie ». En l'espèce, j'ai retenu une question qui se situe au niveau 2 de l'échelle de difficulté adoptée, laquelle comporte 5 niveaux (de 1 à 5), plus le niveau inférieur au niveau 1 : on la trouvera sur la copie d'écran proposée ci-dessous. Pour ce qui est plus spécialement de la France, une note de l'OCDE présentant les premiers résultats de l'enquête dresse un constat de langueur mathématique ([http://www.oecd.org/site/piaac/Country_note_France\(FR\).pdf](http://www.oecd.org/site/piaac/Country_note_France(FR).pdf)) :

... seuls 8,3 % des Français (âgés de 16 à 65 ans) se situent aux deux niveaux les plus élevés de compétence en numératie (niveaux 4 et 5) et 29 % au niveau 3, ce qui place également la France assez loin derrière la moyenne (de respectivement 12,4 % et 34,4 %).

Il ne paraît guère douteux que ces résultats donnent une image d'ensemble proche de la réalité : la culture commune *non mathématicienne* est, en ce qui touche aux mathématiques, à l'étiage.



d) L'absence, dans la population adulte non mathématicienne, de connaissances mathématiques identifiables ne serait pas un vrai problème si, pour nous faire la vie meilleure – sinon pour nous faire la « vie bonne » –, certaines connaissances mathématiques n'apparaissaient utiles, voire nécessaires. Bien entendu, c'est là un point de vue qu'il peut être difficile de faire partager à qui en douterait ! Beaucoup de gens, me semble-t-il, vivent les mathématiques (et les autres matières imposées par l'école) comme une obligation à laquelle, avec les années, on finit par échapper complètement, et avec bonheur. On pouvait dire autrefois qu'un jeune homme était « libéré des obligations militaires » quand il avait accompli son service militaire – cela le rendait plus attractif pour un employeur potentiel. Il semble que la plupart des gens aspirent à être définitivement libérés des « obligations mathématiques » ; et puis aussi des obligations grammaticales, historiques, philosophiques, etc. Il s'agit là d'une problématique individuelle antagoniste de l'attitude d'*encyclopédiste ordinaire* entrant dans le portrait-robot du citoyen de demain que j'ai essayé d'esquisser depuis quelques années. Mais, bien entendu, du point de vue de la conceptualisation pure, la notion d'*encyclopédiste ordinaire* est apte à modéliser cette attitude d'oubli

volontaire même : de celui qui ne désire qu'oublier – même s'il n'y arrive pas aussi parfaitement qu'il le souhaiterait ! –, nous dirons simplement que son « livre de mathématiques » (ou de grammaire française, etc.) est défraîchi, qu'il n'est plus mis à jour, que les pages en sont jaunies, souillées, que ce qui y était écrit s'efface peu à peu, que des pages en ont été arrachées et que la poussière y règne en maîtresse avec le passage du temps.

e) Le schéma tripartite que j'ai avancé ces derniers temps est le suivant. Distinguons dans la population adulte générale trois sous-populations, fort inégalement nombreuses, que j'appelle populations P_1 , P_2 et P_3 . (Entre la conférence aux journées de l'APMEP le 20 octobre et le discours de réception du doctorat honoris causa le 28 novembre, j'ai légèrement modifié les frontières de ces populations ; mais l'essentiel demeure.) La première population, P_1 , est celle des mathématiciens créateurs, qui sont aujourd'hui, très généralement, des mathématiciens professionnels. C'est des exploits de cette population P_1 que l'on régale de temps en temps les profanes, en espérant leur faire ainsi « aimer les maths ». Pour la « famille mathématique », P_1 est la chose du monde la plus précieuse. Au niveau de l'éducation secondaire, sans doute, on ne peut agir seulement pour ces *happy few*. On doit agréger hypothétiquement la future population P_1 avec une seconde population virtuelle, P_2 , qui est celle des ingénieurs et, plus largement, de tous ceux qui œuvrent dans des métiers à teneur mathématique plus ou moins forte : on y rangera, avec les ingénieurs, les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire et autres professeurs de physique (de l'enseignement secondaire ou supérieur). Enfin, il y a la population P_3 qui rassemble tous ceux qui, ayant peu prou fréquenté les mathématiques, s'en considèrent « libérés » et n'ont plus de commerce avec elles, sinon parfois à travers les devoirs de leurs enfants.

f) Je voudrais illustrer cette tripartition par un propos de Cédric Villani, médaille Fields 2010, directeur de l'Institut Henri Poincaré (IHP), publié le 22 mars 2013 dans *Le Monde* à l'occasion du lancement de la série de 40 volumes intitulée « Le monde est mathématique ». À propos des motifs du parrainage accordé par l'IHP à cette entreprise, Villani s'exprime en ces termes :

D'abord, il faut veiller à susciter des vocations en nombre suffisant parmi les jeunes, à une époque où l'on ne pense pas naturellement à une carrière de mathématicien, ou plus généralement de scientifique, comme à un métier qui a de quoi faire rêver. C'est pourtant le cas ! C'est un métier dans lequel subsiste une grande part d'aventure. À quelques exceptions près, ce n'est pas un moyen de faire fortune, mais c'est un métier qui apporte une excellente

combinaison d'éléments matériels confortables et de stimulation, de valorisation intellectuelle. C'est un bon métier, utile à l'individu et à la société. Il est très important qu'un nombre suffisant de jeunes embrasse cette carrière. Pour cela, il faut leur apporter un éclair de rêve, afin de les inciter à se lancer dans des études qui peuvent sembler longues et pénibles, mais qui le sont moins qu'il n'y paraît, et se révèlent souvent très gratifiantes.

Ensuite, il faut aussi s'adresser à tous ceux qui ne feront pas des sciences leur métier, mais qui sont curieux de savoir à quoi ça sert. La vulgarisation remplit la fonction de rapprocher au niveau intellectuel et sensible les chercheurs et les autres. C'est important aussi pour des raisons très pratiques : le jour où les gens ne comprendront plus à quoi servent les scientifiques, les politiques couperont les subventions correspondantes et la recherche s'arrêtera. La communauté scientifique a donc le devoir naturel d'expliquer ce qu'elle fait aux gens qui la soutiennent.

On voit là défiler d'abord la population P_1 , puis, de façon quelque peu subliminale, la population P_2 , amputée toutefois des professeurs de mathématiques du secondaire (ce qui est sans doute révélateur). Enfin vient la population P_3 , ou du moins la sous-population de P_3 constituée de ceux qui seraient « curieux de savoir » à quoi servent les sciences, ce qui ne fait pas, et de loin, toute la population P_3 . Au sein de la famille mathématique, on a jusqu'à présent mis au-devant de la scène le problème de la formation des futurs membres de P_1 , puis, de façon certes un peu secondaire, ou du moins seconde, celle des membres de P_2 . Voici alors le point crucial : le cursus mathématique du secondaire a été fait historiquement pour « nourrir » mathématiquement les futurs membres de P_1 tandis que les membres de P_2 étaient censés s'alimenter des « restes » d'un cursus conçu pour les futurs membres de P_1 , avec, bien sûr, quelques adaptations. Quant aux futurs membres de P_3 , ils étaient censés consommer les « restes des restes », sans qu'on prête sérieusement attention à leurs besoins propres.

g) Il m'est apparu qu'on pouvait se poser le problème d'un *renversement* de cet ordre multiséculaire, ce qui mettrait au premier plan non pas le problème de la formation mathématique de P_1 et, dans son sillage, celui de la formation mathématique de P_2 , mais d'abord et avant tout celui de la formation mathématique de P_3 . Je note ici que les deux premiers problèmes ont, depuis le XIX^e siècle, été posés (celui de P_2 d'abord, puis celui de P_1) et résolus, même si leur solution peut encore et toujours être améliorée, alors que le problème de la formation mathématique de P_3 semble n'avoir jamais été sérieusement posé. Au lieu donc de concevoir le cursus des études secondaires selon un modèle soustractif – les restes et les restes des restes –, on adopterait un modèle additif – un cursus *pour tous*, dûment augmenté pour celles et ceux qui visent ce qu'on nomme aujourd'hui en anglais les

« STEM fields », où STEM est l'acronyme de *science, technology, engineering, and mathematics*. (On aura noté que je passe sous silence la question du cursus primaire, fort instructive et qui mériterait des développements spécifiques.) Le projet d'un tel renversement historique soulève évidemment de très nombreux problèmes, dont de multiples problèmes didactiques. Avant d'avancer un tout petit peu dans cette voie, je voudrais souligner qu'un tel projet paraît de nature à mobiliser de très nombreux acteurs, en suscitant par là un intérêt renouvelé pour le métier de professeur de mathématiques et, plus largement, pour les métiers fortement mathématisés, lesquels cesseraient à terme d'être des isolats culturels comme ils le sont aujourd'hui et verraient du même coup croître le confort intellectuel, culturel et humain de ceux qui les exercent.

5. Des mathématiques pour tous ?

a) Le thème des besoins praxéologiques est central dans ce séminaire. L'idée clé est la suivante : nous avons besoin de certaines connaissances dont nous nous passons souvent de façon non consciente mais parfois aussi de façon délibérée, voire revendiquée. Au fil des années j'ai évoqué divers domaines que met en jeu l'usage de la langue française, à l'oral ou à l'écrit. Avant de revenir aux mathématiques, je prendrai un exemple emprunté au domaine de la prononciation du français et, plus précisément au problème – ouvert pour nombre de locuteurs francophones – des *liaisons*.

b) Sur un forum du site *Wordreference* (qu'on trouvera à l'adresse suivante : <http://forum.wordreference.com/showthread.php?t=387475>), un certain « Charly Parker » soulève cette question : « Est-ce qu'on fait la liaison entre trait et à ? Merci d'avance. » Un certain « FranParis » répond sobrement : « Non, on ne la fait pas. » « Charly Parker » le remercie par ces mots : « Merci. Je dépends des locuteurs natifs. » Cette remarque souligne un problème didactique fondamental : comment une personne peut-elle accéder à une connaissance qui, à l'évidence (à ses yeux, du moins), lui fait défaut ? Ce problème, on s'en aperçoit au passage, en cache un autre : car, contrairement à ce que dit fort civilement « Charly Parker », passer par les locuteurs natifs est rarement la seule voie qui s'offre aujourd'hui à un locuteur non natif. En toute chose, pour des raisons tenant au bon fonctionnement de la dialectique des médias et des milieux, il me paraît judicieux de privilégier des « médias » d'une autre nature – « documentaire », si l'on veut –, sans pour autant écarter le questionnement des personnes. C'est ainsi que « Charly Parker » aurait pu trouver une réponse à sa question dans le *Wiktionnaire* (à l'adresse http://fr.wiktionary.org/wiki/avoir_trait_%C3%A0), comme le montre la copie d'écran ci-après.

avoir trait à

Français [modifier]

 **Étymologie**
 Étymologie manquante ou incomplète. Si vous la connaissez, vous pouvez l'ajouter en cliquant ici.

 **Locution verbale**
 avoir trait à /a.vwaʁ tʁɛ a/ (se conjugue, voir la conjugaison de avoir)
 1. (Familier) Avoir un rapport avec, être en rapport avec, avoir un lien avec, traiter de.

Ainsi qu'on le voit, cette brève notice donne la prononciation de l'expression « avoir trait à » : /a.vwaʁ tʁɛ a/. À nouveau, on se retrouve là face à une loi d'airain : pour acquérir une connaissance, il faut des connaissances « outils ». Ici, pour lire la réponse du document interrogé, il convient de savoir « déchiffrer » l'écriture phonétique utilisée, ce qui pourrait sans grand dommage faire partie de l'équipement linguistique commun, bien que ça ne soit pas le cas aujourd'hui.

c) Pour avancer dans l'étude du projet de renversement curriculaire que j'ai évoqué, une des tâches clés, toujours recommencée, consiste à dégager des types de tâches *utiles*, point de départ de la détermination de mathématiques *utiles*. Bien entendu, le qualificatif « utile » employé ici n'a rien d'absolu : ce qu'il convient de déterminer, ce sont d'hypothétiques mathématiques *utiles pour...* Pour cette raison, le corpus des types de tâches à composante mathématique (ainsi bien sûr que le *logos* mathématique idoine) que l'on vise à déterminer dépend du domaine d'activité @ visé. La chose est classique pour certains domaines d'activité, et tout particulièrement pour ceux où sont censés évoluer les membres de P_2 . J'ai ainsi devant moi trois ouvrages du type « Mathématiques pour les scientifiques ». Le premier est d'un type tout classique : il s'agit d'un ouvrage de l'éminent physicien Léon Brillouin (1889-1969) paru chez Masson en 1935, intitulé *Notions élémentaires de mathématiques pour les sciences expérimentales*. Ce livre se présente comme étant « à l'usage des candidats au certificat d'études physiques, chimiques et biologiques et à la licence ès sciences » (on pourra se reporter à l'article « Certificat d'études physiques, chimiques et biologiques » de *Wikipédia* ; ce certificat était connu alors par le sigle PCB). Notons que Léon Brillouin, issu d'une brillante lignée de scientifiques (voir l'article « Léon Brillouin » de *Wikipédia*) appartient à l'élite de l'élite. La situation est un peu différente avec le livre déjà cité de Jean-Louis Pelletier, *Les mathématiques utiles* (1954). Beaucoup plus récent, le livre de Hubert Krivine, *Exercices de mathématiques pour physiciens* (Cassini, 2003), qu'ouvre une préface signée par Jean-Pierre Kahane, concernent des besoins plus avancés en la matière,

comme le suggèrent les lignes suivantes, par lesquelles s'ouvre l'introduction rédigée par l'auteur :

Beaucoup d'étudiants en physique considèrent « les maths » comme un mal nécessaire, utiles pour réussir l'examen comme l'huile de foie de morue l'était à la croissance de leurs grands-parents. D'autres, moins scolaires, pensent qu'elles sont également nécessaires pour les calculs qu'elles permettent en physique. Peu s'étonnent de leur « déraisonnable efficacité », selon le mot de Wigner [Note 1. Eugene Paul Wigner (1902-1995), prix Nobel de physique, américain né en Hongrie. « The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences », *Symmetries and reflections*, Indiana University Press, Bloomington, Indiana, 1967], ce qui est normal : il faut à la fois pas mal de métier et avoir conservé toute sa fraîcheur d'âme pour éprouver cet émerveillement. Notons que pour Galilée, 350 ans auparavant, « le livre de la nature » était écrit « en langage mathématique ». En effet, les équations sont beaucoup plus qu'une façon condensée d'écrire des tableaux de chiffres. Une équation aux dérivées partielles, par exemple, c'est déjà un programme de recherche : les ondes radio présentes dans les équations de Maxwell, comme l'électron positif dans les équations de Dirac, ont été recherchées et mises en évidence plusieurs années *après* l'établissement des équations correspondantes. Dans l'autre sens maintenant, ainsi que l'affirme avec force Jean-Pierre Kahane dans la préface, la physique peut donner une approche originale de problèmes typiquement mathématiques comme, par exemple, fournir un lien [Note 2. B. Cifra, *What's happening in the mathematical sciences*, Vol. 4, Amer. Math. Soc. (1999)] entre la conjecture de Riemann (les zéros de la fonction complexe $\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ seraient tous situés sur la droite $x = \frac{1}{2}$) et les valeurs propres de matrices aléatoires [Note 3. Elles interviennent par exemple en physique nucléaire pour décrire les niveaux d'excitation de noyaux atomiques.] (matrices dont les coefficients sont des variables tirées selon une loi de probabilité).

Tout cela, donc, concerne P_2 (et éventuellement P_1 , ainsi que le passage précédent le suggère). Qu'en est-il de P_3 ? Peut-on bâtir un curriculum en dégageant des besoins mathématiques potentiellement utiles à quiconque ? C'est là évidemment une grande question. On sait que l'une des techniques mises en œuvre parfois consiste, non pas à viser directement P_3 , mais à viser les domaines d'activité $\mathcal{Q}$ à teneur mathématique faible ou nulle dans lesquels les membres de P_3 ont le plus de chances de s'engager. Dans ce qui suit je me contenterai de présenter quelques exemples possibles que j'ai déjà utilisés ou que j'ai introduits dans les textes auxquels j'ai fait référence plus haut.

d) Un premier type de tâches mathématiques parmi les plus simples possibles et qui me paraît devoir figurer dans l'encyclopédie ordinaire du citoyen est celui-ci : des objets sont numérotés de n à m ($n, m \in \mathbb{N}^*$, avec $m > n$) ; combien y a-t-il d'objets ainsi numérotés ? C'est bien là un type de tâches « minimaliste », que j'ai considéré dans ma conférence aux journées de l'APMEP : je l'avais rencontré peu de temps auparavant pour compter, dans une colonne d'une feuille du tableur Excel, après un tri de cette colonne, le nombre de cellules de cette colonne dont les numéros de ligne vont de n à m . On apprenait traditionnellement, à l'école primaire, dans la rubrique des « problèmes sur les intervalles », la *règle* qu'on peut exprimer par la *formule* $N = m - n + 1$. Cet exemple fait rencontrer un problème typique : faire apprendre par cœur cette règle, qui délivre immédiatement une technique de calcul, est certes économique ; mais n'est-il pas fonctionnellement plus pertinent d'intégrer dans son équipement praxéologique le geste consistant à faire une *translation des numéros* qui amène le premier numéro, n , en 1 ? Si les objets sont numérotés de 252 à 328, cette translation consiste à retrancher 251 (soit $n - 1$), le numéro 328 étant alors changé en le numéro $328 - 251 = 77$, qui est le nombre d'objets cherché. Dans le cas général, le numéro m devient le numéro $m - (n - 1)$, soit bien sûr $m - n + 1$. Ce nouveau numéro est dans tous les cas le nombre N cherché. Notons que cette technique vaut encore clairement – elle est robuste par rapport à de telles perturbations – si n et m sont des entiers relatifs quelconques : si $n = 0$, ainsi, la translation consiste à augmenter de 1 les numéros en sorte que $N = m + 1$. La formule apprise par cœur résiste aussi, certes, mais la chose est nettement moins évidente. On a là typiquement un problème d'ingénierie mathématique à visée didactique.

e) Dans le cours de Córdoba j'ai également proposé un exemple d'un type dont j'ai déjà fait mention ailleurs, à propos des fractions. Si l'on sait que 7 exemplaires d'un certain article coûtent 15,75 €, pour déterminer le prix de 23 exemplaires de ce même article, en supposant bien sûr le prix proportionnel au nombre d'articles (il n'y a pas de ristourne), il suffit de faire le raisonnement suivant : « 23, c'est $\frac{23}{7}$ fois 7 ; le prix sera donc égal à $\frac{23}{7}$ fois le prix de 7 exemplaires, soit $\frac{23}{7} \times 15,75$ €, soit donc... » Bien entendu, il faut pour cela que, dans le *logos* qui nous baigne, on assume de regarder comme un « nombre de fois » le « nombre rompu » $\frac{23}{7}$... Mais je voudrais maintenant présenter rapidement des exemples destinés à faire entendre l'idée que ce que nous devons connaître, ce sont les conditions et contraintes qui gouvernent notre vie. Un premier exemple concerne le cas des contraintes *physiques*. Si l'on sait que l'énergie cinétique d'un véhicule de

masse m et de vitesse v est donnée par la formule $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, ou même si l'on sait plus simplement que l'on a $E_c \propto m \cdot v^2$, il est simple de conclure qu'un véhicule de 10 tonnes qui se déplace à la vitesse de 35 km/h constitue un danger presque deux fois plus grand qu'un véhicule de 1000 kg qui se meut à la vitesse de 80 km/h, puisque l'on a :

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{m_2 \cdot v_2^2} = 10 \times \frac{35^2}{80^2} = 1,9140625.$$

Le thème des conditions et contraintes de telle ou telle nature est, je le répète, au cœur de l'étude des besoins humains de connaissances. S'agissant des conditions et contraintes purement *mathématiques*, l'un des exemples choisis était simplement le fait que la somme des fractions $1/2$, $1/3$ et $1/6$ est (exactement) égale à 1. Cet exemple est évidemment un écho de l'exploitation humoristique que Marcel Pagnol (1895-1974) fait de ce type de contraintes dans *Marius* (1931), en un dialogue fameux entre César et son fils Marius (voir à l'adresse suivante : <http://www.marcel-pagnol.com/biblio-marius,8.html>) :

CÉSAR

Tu ne sais même pas doser un mandarin-citron-curaçao.

Tu n'en fais pas deux pareils !

MARIUS

Comme les clients n'en boivent qu'un à la fois, ils ne peuvent pas comparer.

CÉSAR

Ah ! Tu crois ça ! Tiens le père Cougourde, un homme admirable qui buvait douze mandarins par jour, sais-tu pourquoi il ne vient plus ?

Il me l'a dit. Parce que tes mélanges fantaisistes risquaient de lui gâter la bouche.

MARIUS

Lui gâter la bouche ! Un vieux pochard qui a le bec en zinc.

CÉSAR

C'est ça ! Insulte la clientèle au lieu de te perfectionner dans ton métier ! Eh bien, pour la dixième fois, je vais te l'expliquer, le picon-citron-curaçao. (Il s'installe derrière le comptoir.) Approche-toi !

(Marius s'avance et va suivre de près l'opération. César prend un grand verre, une carafe et trois bouteilles. Tout en parlant, il compose le breuvage.) Tu mets d'abord un tiers de curaçao. Fais attention : un tout petit tiers. Bon. Maintenant, un tiers de citron. Un peu plus gros. Bon. Ensuite, un BON tiers de Picon. Regarde la couleur. Regarde comme c'est joli. Et à la fin, un GRAND tiers d'eau. Voilà.

MARIUS

Et ça fait quatre tiers.

CÉSAR

Exactement. J'espère que cette fois, tu as compris.

(Il boit une gorgée du mélange).

MARIUS

Dans un verre, il n'y a que trois tiers.

CÉSAR

Mais, imbécile, ça dépend de la grosseur des tiers !

MARIUS

Eh non, ça ne dépend pas.

Même dans un arrosoir, on ne peut mettre que trois tiers.

CÉSAR (trionphal)

Alors, explique-moi comment j'en ai mis quatre dans ce verre.

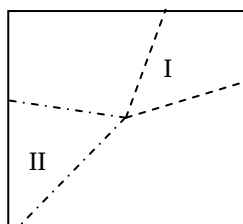
MARIUS

Ça, c'est de l'arithmétique.

CÉSAR

Oui, quand on ne sait plus quoi dire, on cherche à détourner la conversation.

f) Un deuxième exemple évoquait le fait que, pour diviser un gâteau circulaire en 7 parts égales, il ne sert à rien de commencer à le diviser en deux parts égales, parce que 7 n'est pas divisible par 2. Le troisième exemple est celui du gâteau *carré*. Dans un tel cas, une contrainte peu connue, mais qu'il serait peut-être utile de connaître, est que, ainsi qu'on le verra sur le schéma suivant, la masse d'une part de gâteau semblable à celles dessinées ci-dessous est déterminée par la longueur de son périmètre extérieur : ainsi les parts I et II, censées avoir des périmètres extérieurs de même longueur, ont-elles la même masse, la même aire de dessus, de dessous, de côté.



J'ai avancé que cette propriété – mathématiquement triviale – était à peu près inconnue, de même que la technique associée, τ_p . C'est là un phénomène qui relève de ces « mystères » dont la didactique devrait nous donner la clé. Peut-on dire par exemple qu'on a affaire à un *logos* créé spontanément qui interdirait fermement l'émergence d'un *logos* adéquat à la technique de découpage τ_p ? Cela n'est pas impossible, tant la technique τ_c consistant à faire des parts égales en découplant des parts ayant un même « angle au centre » (au centre du carré) semble aller de soi.

g) J'ai été conduit, dans le cours de Córdoba, à aborder un autre point, sur lequel je m'arrêterai ici un instant : comment peut-on savoir que cette

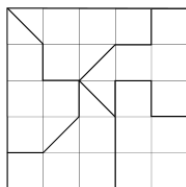
propriété des gâteaux carrés est peu connue ? Bien entendu, on pourrait « interroger des personnes ». Mais voici un autre élément, qui fait parler un média qui n'avait pas d'intention de le faire, et qui de plus avait pour moi le mérite de se situer dans le monde ibéro-américain. Dans un document en ligne intitulé *El Número de Oro. Apuntes de Matemáticas Olímpicas* (« Le nombre d'or. Notes sur les olympiades mathématiques »), publié à Santiago du Chili en 2009, on trouve le problème suivant :

Un pastel cuadrado de altura uniforme se recubre uniformemente de crema, tanto encima como por los cuatro lados. Hallar una forma de cortar el pastel en cinco porciones tales que:

- a) Todos [sic] tengan la misma cantidad de pastel.
- b) Todos [sic] tengan la misma cantidad tanto de pastel como de crema.

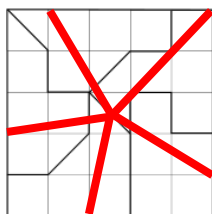
Voici alors la solution proposée par les auteurs de ce document :

Notemos que basta resolver la parte b), pues también cumple la condición de la parte a). En la figura [ci-dessous], se observa la parte superior del pastel que fue dividida en 25 cuadraditos. Las líneas más marcadas representan como se hacen los cortes.



Es evidente entonces que cada pedazo tiene la misma cantidad de pastel y de crema.

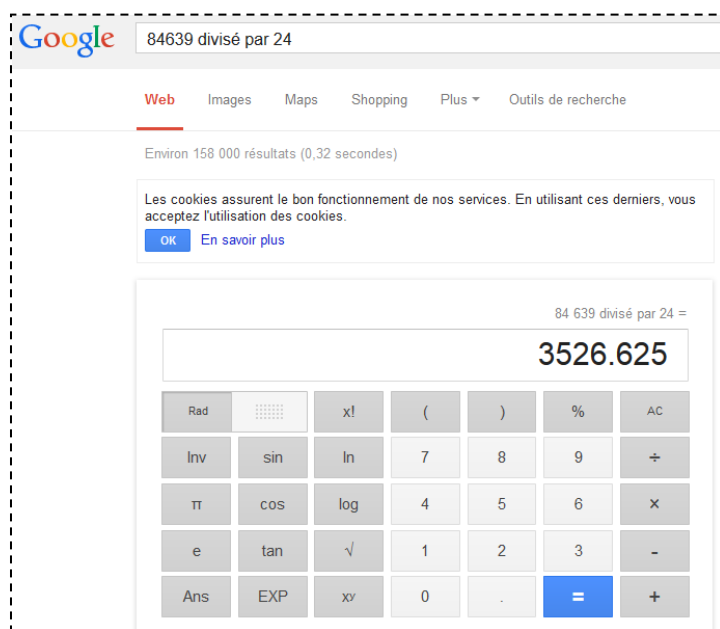
Si ingénieuse soit-elle, cette solution suggère surtout que le « théorème du gâteau carré » (qui justifie la technique de découpe vue plus haut) est étrangère à la culture dans laquelle baignent les auteurs du document. De fait, ce théorème justifie par exemple le découpage suivant :



Il suffit pour le vérifier de s'assurer que les bords de ces cinq portions ont même longueur (à savoir 4 fois la longueur des côtés des 20 carrés isométriques en lesquels les auteurs ont commencé par décomposer le gâteau).

h) Le constat de la non-diffusion de la technique τ_p soulève trois questions cardinales. Tout d'abord, pourquoi serait-il intéressant que la technique τ_p soit largement diffusée dans nos sociétés ? Ensuite, pourquoi est-elle si peu diffusée aujourd'hui ? Enfin, sous quel ensemble de conditions pourrait-elle se diffuser largement ? Autant de questions que je me contenterai de poser.

i) J'ai également développé l'exemple suivant, que j'ai annoncé un peu plus haut. Lorsqu'on recherche le quotient euclidien d'un nombre a par un nombre b , une technique aujourd'hui peu coûteuse et, semble-t-il, assez spontanée, consiste à demander à une calculatrice de vous fournir, sous forme décimale approchée, le quotient exact de a par b (soit a/b). Par exemple si $a = 84639$ et $b = 24$, la calculatrice de Google donne ceci :



Il est tentant de conclure que le quotient euclidien de 84639 par 24 est égal à 3526. Un petit morceau de « mathématiques utiles » consisterait ici en une justification de cette technique, justification qui, sous des conditions et contraintes adéquates, pourrait être la suivante :

Soit a et b deux entiers naturels avec b non nul. L'entier naturel q est le quotient entier de a par b si, et seulement si, il existe un entier r vérifiant les conditions $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Si donc q est le quotient et r est le reste de la division de a par b , on a $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ avec $0 \leq \frac{r}{b} < 1$, soit $\frac{a}{b} = q + \rho$ avec $0 \leq \rho < 1$, où $\rho = \frac{r}{b}$. Inversement, si $\frac{a}{b} = q + \rho$ avec $0 \leq \rho < 1$, alors $a = bq + b\rho$ avec $0 \leq b\rho < b$. L'égalité $b\rho = a - bq$ montre que $r = b\rho$ est un entier. Puisque $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$, on peut conclure q est le quotient cherché.

Bien entendu, l'étude du projet de renversement de l'ordre curriculaire suppose d'étudier à nouveau frais une foule de questions « bien connues ». Le premier problème est celui des types de tâches à sélectionner. Le second grand problème est celui des techniques à diffuser en chaque cas et de leurs technologies, qui ne doivent pas seulement justifier mais qui, dans un cadre théorique éventuellement renouvelé, doivent créer de l'intelligibilité, qui crée elle-même de la mémoire et du contrôle. Pour ne prendre ici qu'un seul cas, très simple mathématiquement (mais rebutant pour le *logos* dominant), que penser de la technique de calcul du quotient notée τ_f ci-dessus ? Quelle technologie lui donner ? Le chantier est vaste !

L'EXTENSION DU CHAMP DE LA TAD

1. Une notation

a) La TAD n'est pas moins soumise que d'autres élaborations théoriques aux besoins de développement qui ne manquent pas de se manifester dans les situations particulières en lesquelles nous sommes amenés à l'engager. C'est là un autre thème important, sur lequel je ne ferai ici que quelques remarques trop rapides.

b) Je commencerai en mentionnant des notations introduites dans le cours de Córdoba. Je noterai $\partial(U, V, \heartsuit, \clubsuit)$ la relation quaternaire qui est réalisée, dans une situation sociale donnée, lorsqu'une instance U accomplit un « geste », noté ici $\clubsuit$, pour aider une instance V à étudier une œuvre $\heartsuit$. (En fait, en espagnol, j'ai écrit $\delta(U, V, \heartsuit, \clubsuit)$, en y échangeant d'ailleurs la signification de U et V ; toutefois, au moins en mathématiques, nos collègues hispanophones prononcent *delta* le « d rond » ∂ , qui s'appelle pourtant dans cette langue, sauf erreur, « *d redondeada* » ou « *d de Jacobi* ».) Ce qui m'importe ici, c'est le fait que cette simple notation permet de penser ensemble et de confronter des types de situations sociales que le didacticien « classique » ne semble pas vouloir rapprocher. Il reconnaîtra comme « sien » un épisode où se trouve vérifiée la relation $\partial(U, V, \heartsuit, \clubsuit)$ si par exemple U est un professeur y , V est le groupe X des élèves d'une classe, $\heartsuit$ est un exercice de physique, le geste $\clubsuit$ consistant, de la part de y , à donner à X une indication relative à l'exercice en question. En revanche, il ignorera comme hors du champ de sa juridiction scientifique le cas où U est le conseil municipal d'une ville qui prend la décision de financer un atelier ($\clubsuit$) pour élèves « en difficulté » (V) en mathématiques ($\heartsuit$). On sait que je qualifie de *didactiques* les gestes $\clubsuit$, même si le premier geste $\clubsuit$ est plus spécifique de l'enjeu didactique $\heartsuit$ que ne l'est le second geste $\clubsuit$. (On aura noté que, bien entendu, les enjeux didactiques $\heartsuit$ ne sont pas les mêmes.) De même,

j'appelle *épisode didactique* la suite de situations au cours de laquelle la relation $\partial(U, V, \heartsuit, \clubsuit)$ se réalise.

2. « Penser » le développement durable

a) Depuis plusieurs années, j'ai eu la possibilité de confronter la TAD à ce qu'on peut appeler la *didactique du développement durable*. Même si la notion de développement durable est floue, ne serait-ce que parce qu'il s'agit d'une notion « en travail », on peut dire d'abord que cette expression désigne un ensemble – extensible – de *conditions à satisfaire* : une action humaine, à une échelle déterminée, peut être dite « conforme » à l'exigence de développement durable, ou au contraire peu compatible avec cette exigence. On voit au passage la proximité formelle avec une exigence *morale*, ambiguïté qui attire certains et que repoussent vivement quelques autres. Peut-on échapper à cette ambiguïté ?

b) Je suis arrivé cette année à des formulations de *schémas de questions* que je voudrais présenter et commenter rapidement. Ces schémas de questions ont trait respectivement à l'*analyse praxéologique* et à l'*analyse didactique*. Le premier schéma de questions, Δ_ϕ , se laisse formuler ainsi :

Δ_ϕ . $\mathcal{Q}$ est un certain domaine d'activité humaine.

1. Que sont les praxéologies ϕ (personnelles et institutionnelles) mises en jeu dans $\mathcal{Q}$ à propos de tel ou tel sous-type d'activité dans ce cadre ?
2. Quelles positions p de quelles institutions I du domaine $\mathcal{Q}$ sont-elles concernées par ces praxéologie ϕ mises en jeu dans $\mathcal{Q}$?
3. Quels sont les effets du fonctionnement praxéologique (personnel ou institutionnel) induit par ces praxéologies ϕ sur tel ou tel type de systèmes (naturels ou artificiels) ?
4. Quels changements d'équipements praxéologiques sont-ils envisagés, et par qui, concernant ce sous-type d'activités à propos des personnes et des institutions intervenant dans le domaine d'activité $\mathcal{Q}$?

Je prends deux exemples de domaines d'activité qui me semblent être, pour nous, culturellement dissemblables : on peut imaginer que $\mathcal{Q}$ est le domaine de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques au secondaire ou (c'est mon deuxième exemple) celui de la production de lait (de vache). Dans le premier exemple (qui nous rappelle qu'une analyse didactique est une analyse praxéologique particulière), le sous-schéma de questions 1 est classique ; dans le second cas, il se conçoit sans grande difficulté (« Qu'est-ce qu'on fait pour produire du lait ? »). Ce sous-schéma de questions se situe au cœur de toute analyse praxéologique et peut s'explicitier ainsi :

Quels *types de tâches* T sont-ils accomplis dans $\mathcal{Q}$? Et *comment*, c'est-à-dire selon quelles *techniques* τ ? Et encore *pourquoi*, c'est-à-dire en vertu de quelles *technologies* θ et de quelles *théories* Θ ?

Mais on voit que, dans la formulation adoptée dans $\Delta_{\wp}$, deux autres variables s'introduisent : le domaine d'activité $\mathcal{Q}$ et un sous-domaine d'activité non précisé, qu'on pourrait noter $\mathcal{Q}^*$. Le sous-schéma de questions 2 « trie » alors les praxéologies recensées et analysées selon les positions p des institutions I participant de $\mathcal{Q}^*$ (« Qui fait quoi dans $\mathcal{Q}^*$? ») Il est implicite qu'il convient ici de faire l'inventaire des institutions I concernées et des positions p qu'elles recèlent. Là encore, si l'on prend pour $\mathcal{Q}$ le domaine de la production de lait, on réalise que ce n'est pas là un petit travail ! Poursuivons.

c) Rappelons le sous-schéma de questions 3 :

3. Quels sont les effets du fonctionnement praxéologique (personnel ou institutionnel) induit par ces praxéologies $\wp$ sur tel ou tel type de systèmes (naturels ou artificiels) ?

Il s'agit là d'un sous-schéma de questions sans doute inhabituel mais que le thème du développement durable pousse en avant. Dans la liste de questions proposée aux étudiants dans mon cours de didactique fondamentale (que j'ai donné pendant plusieurs années en licence de sciences de l'éducation), j'avais introduit l'idée de l'effet de l'activité d'un système didactique sur certains environnements, comme le montre notamment la question Σ_6 ci-dessous (qui étonne souvent les étudiants) :

Σ_0 . Quelle est l'institution mandante de $S(X; Y; \heartsuit)$?

Σ_1 . Qu'est-ce que X ?

Σ_2 . Qu'est-ce que Y ?

Σ_3 . Qu'est-ce que $\heartsuit$?

Σ_4 . Que font X et Y pour que X « apprenne » $\heartsuit$?

Σ_5 . Qu'est-ce que X aura-t-il pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$?

Σ_6 . Qu'est-ce que Y et certains environnements éventuels de $S(X; Y; \heartsuit)$ auront-ils pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$?

Σ_7 . Quels changements le fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$ a-t-il pu apporter dans les conditions et les contraintes gouvernant son fonctionnement ultérieur ?

Il est clair que le sous-schéma de questions 3 joue un rôle crucial dans la didactique du développement durable. Rappelons alors le sous-schéma de questions 4 :

4. Quels changements d'équipements praxéologiques sont-ils envisagés, et par qui, concernant ce sous-type d'activités à propos des personnes et des institutions intervenant dans le domaine d'activité @ ?

Ce sous-schéma de questions est, lui aussi, crucial. Bien entendu, une fois les changements d'équipements praxéologiques réalisés, il convient de répéter le schéma de questions Δ_{ϕ} : de quelles praxéologies fait-on usage au juste (1), qui le fait (2), avec quels effets sur quoi (3), en sorte qu'on envisage quels nouveaux changements (4) ? Etc.

d) On voit que le questionnement traditionnel en didactique se trouve notablement élargi. Mais j'en viens au second schéma de questions annoncé, relatif à l'analyse didactique :

Δ_{ϕ} . Par quels systèmes de conditions et de contraintes, c'est-à-dire à travers quelles successions de situations, telle praxéologie de @ est-elle parvenue, parvient-elle ou pourrait-elle parvenir à s'intégrer à l'équipement praxéologique de telle institution ou de telle personne ?

À l'évidence, cette formulation est elle-même « élargissante ». Elle conduit notamment à prendre du recul par rapport au regard didacticien porté traditionnellement sur la classe. Mais c'est là que je m'arrêterai aujourd'hui.

That's all, folks!