

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

→ Séance 8 – Vendredi 2 juillet 2010

ENQUÊTER

1. « Démarche d'investigation »

a) Lorsqu'on travaille en didactique de l'enquête, lorsque, en particulier, on prétend étudier le destin des questions qui parviennent à se formuler en telle ou telle institution (ce qui, par définition, « lance » une enquête et « ouvre » un parcours d'étude et de recherche), on ne peut que se demander ce qu'il en est de la « démarche d'investigation » que promeut le ministère de l'Éducation nationale français dans le cadre des programmes du collège. Celles-ci fait son apparition officielle, m'a-t-il semblé, dans le *Bulletin officiel de l'Éducation nationale* n° 5 hors série daté 25 août 2005, dans l'annexe I intitulée « Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques »

(<http://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2005/hs5/annexe1.pdf>). Elle réapparaît, dans les mêmes termes, dans le *Bulletin officiel* spécial n° 6 du 28 août 2008, toujours dans la partie commune aux mathématiques, à la physique-chimie, aux sciences de la vie et de la terre et à la technologie, dont le sommaire est le suivant (http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf) :

- I. La culture scientifique et technologique acquise au collège
- II. Le socle commun de connaissances et de compétences
- III. La démarche d'investigation
- IV. La place des technologies de l'information et de la communication
- V. Les thèmes de convergence
- VI. Utilisation d'outils de travail en langue étrangère

Voici maintenant le texte intégral de la section III :

III. LA DÉMARCHE D'INVESTIGATION

Dans la continuité de l'école primaire, les programmes du collège privilégient pour les disciplines scientifiques et la technologie une démarche d'investigation. Comme l'indiquent les modalités décrites ci-dessous, cette démarche n'est pas unique. Elle n'est pas non plus exclusive et tous les objets d'étude ne se prêtent pas également à sa mise en œuvre. Une présentation par l'enseignant est parfois nécessaire, mais elle ne doit pas, en général, constituer l'essentiel d'une séance dans le cadre d'une démarche qui privilégie la construction du savoir par l'élève. Il appartient au professeur de déterminer les sujets qui feront l'objet d'un exposé et ceux pour lesquels la mise en œuvre d'une démarche d'investigation est pertinente.

La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre.

Repères pour la mise en œuvre

1. Divers aspects d'une démarche d'investigation

Cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de

problèmes (en mathématiques). Les investigations réalisées avec l'aide du professeur, l'élaboration de réponses et la recherche d'explications ou de justifications débouchent sur l'acquisition de connaissances, de compétences méthodologiques et sur la mise au point de savoir-faire techniques.

Dans le domaine des sciences expérimentales et de la technologie, chaque fois qu'elles sont possibles, matériellement et déontologiquement, l'observation, l'expérimentation ou l'action directe par les élèves sur le réel doivent être privilégiées.

Une séance d'investigation doit être conclue par des activités de synthèse et de structuration organisées par l'enseignant, à partir des travaux effectués par la classe. Celles-ci portent non seulement sur les quelques notions, définitions, résultats et outils de base mis en évidence, que les élèves doivent connaître et peuvent désormais utiliser, mais elles sont aussi l'occasion de dégager et d'explicitier les méthodes que nécessite leur mise en œuvre.

2. Canevas d'une séquence d'investigation

Ce canevas n'a pas la prétention de définir « la » méthode d'enseignement, ni celle de figer de façon exhaustive un déroulement imposé. Une séquence est constituée en général de plusieurs séances relatives à un même sujet d'étude.

Par commodité de présentation, sept moments essentiels ont été identifiés. L'ordre dans lequel ils se succèdent ne constitue pas une trame à adopter de manière linéaire. En fonction des sujets, un aller et retour entre ces moments est tout à fait souhaitable, et le temps consacré à chacun doit être adapté au projet pédagogique de l'enseignant.

Les modes de gestion des regroupements d'élèves, du binôme au groupe-classe selon les activités et les objectifs visés, favorisent l'expression sous toutes ses formes et permettent un accès progressif à l'autonomie.

La spécificité de chaque discipline conduit à penser différemment, dans une démarche d'investigation, le rôle de l'expérience et le choix du problème à résoudre. Le canevas proposé doit donc être aménagé pour chaque discipline.

Le choix d'une situation-problème :

- analyser les savoirs visés et déterminer les objectifs à atteindre ;
- repérer les acquis initiaux des élèves ;
- identifier les conceptions ou les représentations des élèves, ainsi que les difficultés persistantes (analyse d'obstacles cognitifs et d'erreurs) ;
- élaborer un scénario d'enseignement en fonction de l'analyse de ces différents éléments.

L'appropriation du problème par les élèves :

Les élèves proposent des éléments de solution qui permettent de travailler sur leurs conceptions initiales, notamment par confrontation de leurs éventuelles divergences pour favoriser l'appropriation par la classe du problème à résoudre.

L'enseignant guide le travail des élèves et, éventuellement, l'aide à reformuler les questions pour s'assurer de leur sens, à les recentrer sur le problème à résoudre qui doit être compris par tous. Ce guidage ne doit pas amener à occulter ces conceptions initiales mais au contraire à faire naître le questionnement.

La formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles :

- formulation orale ou écrite de conjectures ou d'hypothèses par les élèves (ou les groupes) ;
- élaboration éventuelle d'expériences, destinées à tester ces hypothèses ou conjectures ;
- communication à la classe des conjectures ou des hypothèses et des éventuels protocoles expérimentaux proposés.

L'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves :

- moments de débat interne au groupe d'élèves ;
- contrôle de l'isolement des paramètres et de leur variation, description et réalisation de l'expérience (schémas, description écrite) dans le cas des sciences expérimentales, réalisation en technologie ;
- description et exploitation des méthodes et des résultats ; recherche d'éléments de justification et de preuve, confrontation avec les conjectures et les hypothèses formulées précédemment.

L'échange argumenté autour des propositions élaborées :

- communication au sein de la classe des solutions élaborées, des réponses apportées, des résultats obtenus, des interrogations qui demeurent ;
- confrontation des propositions, débat autour de leur validité, recherche d'arguments ; en mathématiques, cet échange peut se terminer par le constat qu'il existe plusieurs voies pour parvenir au résultat attendu et par l'élaboration collective de preuves.

L'acquisition et la structuration des connaissances :

- mise en évidence, avec l'aide de l'enseignant, de nouveaux éléments de savoir (notion, technique, méthode) utilisés au cours de la résolution,
- confrontation avec le savoir établi (comme autre forme de recours à la recherche documentaire, recours au manuel), en respectant des niveaux de formulation accessibles aux élèves, donc inspirés des productions auxquelles les groupes sont parvenus ;
- recherche des causes d'un éventuel désaccord, analyse critique des expériences faites et proposition d'expériences complémentaires,
- reformulation écrite par les élèves, avec l'aide du professeur, des connaissances nouvelles acquises en fin de séquence.

La mobilisation des connaissances :

- exercices permettant d'automatiser certaines procédures, de maîtriser les formes d'expression liées aux connaissances travaillées : formes langagières ou symboliques, représentations graphiques... (entraînement), liens ;
- nouveaux problèmes permettant la mise en œuvre des connaissances acquises dans de nouveaux contextes (réinvestissement) ;
- évaluation des connaissances et des compétences méthodologiques.

b) La question cardinale que ce texte soulève me semble être celle-ci : dans quelles conditions y suppose-t-on qu'une question est formulée, dans une classe, comme *question d'étude et de recherche* ; et quel destin donne-t-on alors à une telle question ? Je ne ferai ici que quelques remarques rapides. Ce qui est frappant d'abord, c'est que la « démarche d'investigation » se situe *à l'intérieur du paradigme de la visite des œuvres*, tout en pointant vers le paradigme de questionnement du monde. Si on l'assimile à une enquête, ainsi, une « investigation » est une enquête *praxéologiquement finalisée*, comme le montre le « moment » du « choix d'une situation-problème », qui part de l'analyse des « savoirs visés » en vue de « déterminer les objectifs à atteindre ». On aura noté aussi, s'agissant du moment relatif à « l'acquisition et la structuration des connaissances », que les « nouveaux éléments de savoir (...) utilisés au cours de la résolution » y sont mis en « confrontation avec le savoir établi », lequel apparaît ainsi (a) bien défini, et (b) non problématique en lui-même (sinon pour l'élève). On est là au cœur de la fiction sur laquelle roule le système ancien, où « le » savoir tient lieu de repère absolu, privilégié, bien qu'il constitue une réalité insaisissable, réputée toutefois être fermement du côté du *magister* et de l'institution mandante.

c) Il est une autre fiction au cœur du système ancien, que le patron de la « démarche d'investigation » semble avoir fait sienne. Tout se passe comme si, devant une question Q , on disposait fréquemment – sinon toujours – des œuvres $O_{n+1}, \dots, O_m$ permettant d'élaborer en autonomie une réponse $R^\heartsuit$ et de la valider, et cela sans avoir jamais recours à la « littérature » spécifique du sujet. Il s'agit, là, certes, d'une situation limite, et qui peut advenir ! Mais ce n'est nullement la règle : si l'on se réfère au schéma herbartien

$$[S(X; Y; Q) \Rightarrow \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \}] \Rightarrow R^\heartsuit,$$

l'usage est d'aller interroger les réponses $R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond$ existantes et accessibles, même si $R^\heartsuit$ doit se construire finalement *contre* ces réponses. Mais surtout, la fiction tient en cela que l'on pourrait, en un laps de temps réduit, fabriquer *ab ovo* une réponse $R^\heartsuit$, sans nourrir sa construction de matériaux trouvés dans la culture, donc à la seule force d'une raison

démonstrative et expérimentale supposée émancipée des aléas de l'histoire de la culture. Ainsi, les mêmes qui diront qu'une formation mathématique, ou physique, ou biologique est une longue affaire prétendront qu'on peut faire quasi instantanément des travaux de mathématiques, de physique ou de biologie, par l'emploi extemporané, à faible coût en termes d'étude, des outils idoines. Ce paradoxe renvoie, me semble-t-il, à une vraie difficulté, la maîtrise de la *dialectique entre étude et recherche*, dont le souci est inscrit dans l'expression même de « parcours d'étude et de recherche ».

d) Comme souvent, en revenant à des clichés éculés mais toujours fonctionnels, le texte examiné trop rapidement ici conforte – au lieu de la réduire – la discontinuité entre sciences expérimentales d'un côté et mathématiques de l'autre, réaffirmant au passage l'antique partage scolaire des « spécialités » (regardées souvent comme exclusives), « expérimentation » pour les premières, « démonstration » pour les secondes, ou encore, de façon intimement corrélée, l'ontologie spontanée qui oppose « le monde réel » et le monde mathématique qui, donc, ne serait pas « réel », même s'il ne laisse pas de résister à l'effort humain (ce qu'une certaine idéologie de l'enseignement des mathématiques tend à oublier, pour son malheur).

e) Je souligne que la « démarche d'investigation », qui, semble-t-il, fait actuellement florès en physique-chimie, concerne aussi les mathématiques. Voyez (nous en reparlerons) ce qui se trouve là-dessus à l'adresse <http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=882> ou à l'adresse http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/UE2007/UE_2007_Internet.htm.

2. Enquêtes « mathématiques »

a) Voici une question de mathématiques élémentaires (dont l'origine se devinera) : quelle est la valeur de l'expression $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d}$ pour $a = 12317$, $b = 31879$, $c = 44196$, $d = 1570614571$? Aujourd'hui (car il en eût été autrement vers 1960 encore), dira-t-on peut-être, l'enquête se termine à peine commencée ! Il suffira en d'effet d'interroger ce système « adidactique » qu'est une calculatrice et on aura par exemple ceci :



$$\begin{array}{r} \sqrt{12317} + \sqrt{31879} - \sqrt{44196} + \sqrt{1570614571} \\ \hline .00000002178 \\ \hline \dots - \sqrt{(44196 + \sqrt{(1570614571)})} \end{array}$$

MAIN DEGEFACT FUNC 1/30

On aurait donc : $\sqrt{12317} + \sqrt{31879} - \sqrt{44196 + \sqrt{1570614571}} = 2,17... \cdot 10^{-8}$. En un tel cas, un certain habitus scolaire nous pousse de façon peu réaliste à ne consulter qu'un unique système adidactique. Pourtant, même en supposant de tels systèmes toujours « équivalents » (donnant les mêmes valeurs), ce qu'ils ne sont pas, nous ne sommes pas sûrs d'avoir *adéquatement interrogé* tel ou tel système adidactique ni *fidèlement entendu* sa réponse. Il n'est donc pas inutile de multiplier les « consultations ». Interrogée à propos de la valeur de l'expression $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c + \sqrt{d}}$, la calculatrice de l'ordinateur, ainsi, fait cette réponse :

2,1787795357509838840628524761634e-8.

Mais surprise ! Si l'on effectue le calcul différemment, elle peut afficher ceci

2,1787795357509838840628524766256e-8

ou encore cela : 2,178779535750983884062852476629e-8. Que croire ? Le *Big online calculator* fournit ceci, qui est en désaccord avec les trois résultats précédents :

Big online calculator

Added by: tomek, 2008 V 02, Last modified: 2010 III 15

$\text{sqrt}(12317)+\text{sqrt}(31879)-\text{sqrt}(44196+\text{sqrt}(1570614571))$

☒ Small precision - 512 bits mantissa, 64 bits exponent
☐ Medium precision - 1024 bits mantissa, 128 bits exponent
☐ Big precision - 2048 bits mantissa, 256 bits exponent

calculate

The result is:

0.0000000217877953575098388406285247736819913700809277763434
 692145657415877180395239999719366609373740194604229336327045
 64639048338886588131049569137028860905588

Il y a là un problème de désaccord que je laisserai le lecteur examiner pour son propre compte s'il le souhaite. Je voudrais seulement souligner ceci : dans l'espace de la classe, le « milieu » suprême, *c'est le professeur*. C'est lui qui confirmera à l'élève qui a trouvé (en l'espèce) que l'on aurait

$$\sqrt{12317} + \sqrt{31879} - \sqrt{44196 + \sqrt{1570614571}} = 2,17... \cdot 10^{-8}$$

que son résultat est bien *correct*. Le problème du contrôle du résultat est ainsi *pédagogiquement neutralisé*, c'est-à-dire *annulé comme problème*. Et il en va de même de bien d'autres « résultats ». Je ne vois pas pourquoi, dans la pratique de la « démarche d'investigation » questionnée plus haut, l'habitus scolaire qui fait du professeur le *succédané universel de la culture* cèderait si peu que ce soit. Ce n'est qu'en s'appuyant sur cet habitus que l'on peut feindre d'aller *directement* à la réponse $R^\forall$, par démonstration et/ou expérimentation, sans passer aucunement par la littérature sur le sujet.

b) Vous aurez peut être observé que l'on a $12317 + 31879 = 44196$, c'est-à-dire $a + b = c$. Que faire pour s'en assurer ? On peut recourir à la technique d'addition scolaire mise en œuvre ci-après :

$$\begin{array}{r} 12317 \\ 31879 \\ \hline 44196 \end{array}$$

On peut aussi procéder ainsi qu'on le voit ici : $12317 + 31879 = (12320 - 3) + (31880 - 1) = (12320 + 31880) - 4 = (12300 + 31900) - 4 = (12000 + 32000) - 4 + 200 = 44000 + 200 - 4 = 44196$. On pourrait encore procéder ainsi : $12317 + 31879 = 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 3 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 9 \times 10^0 = 4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 11 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 16 \times 10^0 = 4 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0 = 44196$. Supposons que, pour quelque raison, on ne croie pas à la réponse ainsi « vérifiée ». On peut imaginer faire des manipulations plus « complexes », par exemple en utilisant la formule

$$a + b = ab \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Sur la feuille de calcul Excel reproduite ci-après, on a saisi les entiers $a = 12317$ et $b = 31879$ respectivement en A1 et A2, on a fait calculer le produit ab en A3, les inverses $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ respectivement en B1 et B2, leur somme $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ en B3, et le produit de ab avec $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ en C3 : à nouveau, on obtient que $c = 44196$.

	A	B	C	D
1	12317	8,11886E-05		
2	31879	3,13686E-05		
3	392653643	0,000112557	44196	
4				
5				

F1+ Tools	F2+ Algebra	F3+ Calc	F4+ Other	F5 Pr9m10	F6+ Clean Up	
--------------	----------------	-------------	--------------	--------------	-----------------	--

$\frac{\ln(e^{12317}) + \ln(e^{31879})}{\dots e^{(12317)} + \ln(e^{(31879)})}$			
MAIN	DEGEFACT	FUNC	1/30

1,1992844320256449549924806940175e+19194.

[illegible]

Tout cela a pour but de suggérer que le rôle du professeur dans les contrats didactiques dominants simplifie grandement les situations étudiées, au point de les dénaturer comme objets d'étude et de recherche. Il y a là un obstacle majeur à la construction d'une « pédagogie de l'enquête » dans un monde scolaire façonné par le paradigme de la visite des œuvres, obstacle dont le dépassement porte un nom : celui de *dialectique des médias et des milieux*.

3. Un obstacle caché mais récurrent

a) Revenons une fois de plus au schéma herbartien :

$$[S(X; Y; Q) \Rightarrow \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \}] \Rightarrow R^\heartsuit.$$

Nous avons noté que la recherche et l'étude des réponses $R^\diamond$ n'est pas le fort de l'éducation intellectuelle scolaire, puisque de telles réponses sont *a priori* disqualifiées par le supposé « savoir établi ». Je voudrais souligner ici un aspect de cette situation qui constitue, je crois, un obstacle important à la diffusion du paradigme de questionnement du monde et à l'idée fondatrice de *connaissance par l'enquête*.

b) Mettre en évidence une réponse $R^\diamond$, cela consiste, en pratique, à examiner un document dans lequel celle-ci a été inscrite afin de l'en excrimer pour la réinscrire en un *compte rendu* qui lui soit fidèle. Or la culture scolaire et universitaire semble avoir négligé, voire déprécié le *compte rendu*, dans lequel on se fait le truchement de $R^\diamond$, où l'on « donne la parole » à $R^\diamond$, au profit du *commentaire*, dans lequel l'élève ou l'étudiant *parle de* $R^\diamond$, ou plutôt parle *à propos* de $R^\diamond$, sans souci accablant d'en restituer l'exact contenu. Cette situation avantageuse lui permet de « dire son mot à lui », de faire connaître les profondes réflexions que l'objet commenté suscite en lui : de simple truchement de la culture il se mue en « critique » du monde.

c) Je reviens ici vers un terrain d'observation que j'avais déjà exploité dans le séminaire 2008-2009, lors de la dernière séance, tenue le 9 juillet : celui de l'examen associé à l'UE de licence de sciences de l'éducation intitulée « Théorie de l'apprentissage et didactique pluridisciplinaire », ici dans sa 2^e session. L'épreuve correspondante comporte trois parties, dont la première exige du candidat qu'il réponde à deux « questions de cours ». Ces questions figurent dans une liste de questions constituée au fur et à mesure de l'avancement du cours et qui font écho à ce cours. Dans le cas considéré, la liste comportait 128 questions et avait été arrêtée et rendue publique le 24 décembre 2009. Je rappelle que, lors de l'épreuve, tous les documents sont autorisés, et en particulier le texte du cours, celui du « Forum des questions », celui, enfin des questions de cours. Cela rappelé, lors de la

récente épreuve (le 15 juin 2010), les candidats se sont trouvés devant un sujet ainsi libellé dans sa première partie :

Partie 1. En n'utilisant que les éléments disponibles dans le cours de didactique fondamentale (y compris le « Forum des questions »), rédigez une réponse à chacune des deux questions suivantes :

1. D'où provient la distinction faite par certains auteurs entre *didactique* et *mathétique* ? Comment peut-on expliquer la proximité des mots *mathétique* et *mathématique* ? Pourquoi cette distinction n'est-elle pas recevable en théorie anthropologique du didactique ?

2. Qu'appelle-t-on *praxéologie* ? Quelle relation y a-t-il entre cette notion et l'enjeu didactique ♥ figurant dans la formule générale $S(X; Y; ♥)$ décrivant un système didactique ?

La première question était la question 14 de la liste des 128 questions, la deuxième la question 65. La situation est ici la suivante : l'étudiant doit faire un compte rendu (concis) de la réponse apportée à une certaine question dans un certain document dont il dispose effectivement. D'aucuns diraient que c'est là une tâche bien trop facile, à la comparer à la traditionnelle épreuve « sans documents » (mais de nature dissertationnelle). Ce que nous savons, c'est que la lecture excriptive à réaliser est troublée par diverses conditions dont certaines sont portées par les candidats eux-mêmes – tel le fait, qu'on n'observera pas dans ce qui suit, de regarder erronément la formule classique $S(X; Y; ♥)$ comme relative à l'enseignant X et aux élèves Y (les places sont échangées), ou encore, désignant correctement par Y l'enseignant, par X les élèves, d'écrire cette formule $S(Y; X; ♥)$, tant le professeur est *premier* dans l'imaginaire scolaire !

d) Mais c'est à d'autres phénomènes que je m'attacherai dans ce qui suit. La première des deux questions pour lesquelles les candidats devaient rendre compte de la réponse inscrite dans le texte du cours a un mérite : elle parle d'un objet que bien peu de gens connaissent, et sur lequel ils ne sont donc pas enclins à vouloir faire entendre leur propre son de cloche ! Qui, en effet, sait ce qu'est la *mathétique* ? Cela favorisait à l'évidence le fait que les candidats *ne substituent pas*, à la réponse du cours, leur *propre* réponse, cédant en cela à une pulsion narcissique exacerbée par l'éducation scolaire et universitaire ordinaire ; en d'autres termes, on pouvait s'attendre à ce qu'ils restent au plus près du texte du cours, hypothèse dont on va voir qu'elle a été en un sens vérifiée. Mais ce qui va apparaître surtout, c'est un ensemble de déformations, d'erreurs, d'altérations étonnantes par rapport à la réponse inscrite dans le cours. Notons ici que la question proposée était composée en fait de *trois* questions : (1) D'où provient la distinction faite par certains auteurs entre *didactique* et *mathétique* ? (2) Comment peut-on

expliquer la proximité des mots *mathétique* et *mathématique* ? (3) Pourquoi la distinction entre *didactique* et *mathétique* n'est-elle pas recevable en théorie anthropologique du didactique ? Je reproduis maintenant le passage du cours d'où ces questions avaient été « excrites ». (Je rappelle que les candidats avaient à identifier ce passage, ce qu'ils semblent avoir fait sans grande difficulté.) On notera que ce passage ébauche une analyse de la dualité enseignement/apprentissage, analyse dans le cadre de laquelle se trouve lancée une petite enquête à propos du mot « mathétique ».

1.4.2. On voit aussi que le fonctionnement d'un système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$ peut provoquer chez les membres de X des « acquisitions » hétérogènes à l'enjeu didactique officiel $\heartsuit$. Par exemple, en suivant ce cours, certains auront pu apprendre que le mot anglais *soul*, âme, ne se prononce pas comme le français *soûle*. En même temps, ce fonctionnement pourra échouer plus ou moins largement à provoquer « l'apprentissage de $\heartsuit$ » qui était à l'origine recherché.

a) En utilisant un vocabulaire sur lequel on reviendra, on peut dire que le fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$ peut *engendrer*, chez $x \in X$, un *rapport* qui n'existait pas jusque-là à un certain objet $O \neq \heartsuit$, ou encore peut *modifier* le rapport que x avait déjà à cet objet O , mais ne rien faire de tel à propos de l'objet $\heartsuit$, en ne confortant chez x qu'un rapport à $\heartsuit$ grossièrement *inadéquat* au projet social (d'enseignement et d'apprentissage) concrétisé par la formation du système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$.

b) La distinction précédente est parfois durcie de façon arbitraire, de sorte qu'on en vient à séparer la science *de l'enseignement*, qui serait la didactique, et la science *de l'apprentissage*, pour laquelle on découvrira le nom qui a pu être proposé dans le passage suivant de l'article "Didactic method" de l'encyclopédie *Wikipedia* (version du 21 septembre 2009).

Didactics is the theory of teaching and, in a wider sense, the theory and practical application of teaching and learning. In demarcation from *mathetics*, as the science of learning, didactics refers only to the science of teaching.

L'article "Mathetics" (version du 29 avril 2009) de la même encyclopédie précise ceci.

Mathetics is the science of learning. The term was coined by John Amos Comenius (1592-1670) in his work *Spicilegium didacticum*, published in 1680. He understood *Mathetics* as the opposite of *Didactics*, the science of teaching.

c) Nous ne retiendrons pas cette distinction. La science didactique telle que nous l'entendons ici ne serait pas en accord avec la définition donnée plus

haut si elle ne s'assignait, par principe, d'étudier *l'ensemble des effets d'apprentissage* sur X du fonctionnement d'un système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$ supposé viser « l'apprentissage de $\heartsuit$ » (par X). Une raison forte de donner une telle extension au champ d'investigation de la didactique tient à ce que celle-ci doit développer en son sein une *ingénierie des systèmes didactiques* susceptible d'éclairer et d'inspirer l'action tant de l'institution mandante que de l'institution mandataire et de l'institution enseignée : pour « régler » de façon optimale le fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$ et de ses acteurs, il convient d'analyser les effets d'apprentissage de ce fonctionnement sur X tant à propos de $\heartsuit$ qu'à propos d'objets $O \neq \heartsuit$, lesquels par exemple pourraient gêner, voire « asphyxier » l'apprentissage de $\heartsuit$. Notons en outre que la définition de la didactique avancée plus haut conduit de même à étudier les effets d'apprentissage (en subsumant sous cette expression aussi bien ce qui est *désappris*) du fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$ sur Y , ainsi d'ailleurs que sur les personnes et les institutions « en contact » avec $S(X; Y; \heartsuit)$. (Contrairement à une vision dominante mais naïve, l'instruction scolaire *des enfants* est aussi un moyen de renforcer ou d'actualiser l'instruction *des parents*, voire des grands-parents, etc.)

1.4.3. L'étude d'un système de connaissances $\heartsuit$ fait rencontrer des connaissances *associées*, en quelque sorte auxiliaires, dont la présence dans l'environnement de $\heartsuit$ peut être regardée *a priori* comme plus ou moins fortuite. Dans les passages de l'encyclopédie *Wikipedia* cités plus haut, on a rencontré ainsi, d'abord, le terme *mathetics*, si proche en apparence de *mathematics* ; ensuite, le nom de *John Amos Comenius* ; enfin le vocable latin *spicilegium* (dans le titre d'un ouvrage posthume de Comenius). Chaque fois, le problème de la force du lien entre les réalités rencontrées et l'enjeu de l'étude (ici, la définition et l'étude de la didactique, en gros) *se pose*. Est-il pertinent par exemple d'élucider l'origine du mot *mathetics*, de chercher à en savoir plus sur l'auteur du *Spicilegium didacticum* ou encore de « déchiffrer » le mot latin *spicilegium* ? Faut-il donc *enquêter* sur le mot (et la notion) de *mathétique* (pour le dire en français), sur Comenius, ou sur le mot (et la notion) de *spicilegium* ? Pour y voir plus clair, amorçons de telles enquêtes.

a) L'article "Mathetics" se poursuit par les lignes suivantes.

Seymour Papert, MIT mathematician, educator, and author, explains the rationale behind the term *mathetics* in Chapter 5 (A Word for Learning) of his book, *The Children's Machine*. The origin of the word, according to Papert, is not from "mathematics," but from the Greek, *mathēmatikos*, which means *disposed to learn*. He feels this word (or one like it) should become as much part of the vocabulary about education as is the word *pedagogy* or *instructional design*.

On voit tout aussitôt que l'on rencontre ici de nouveaux « objets » – par exemple “Seymour Papert” ou “instructional design” – à propos desquels la question d'enquêter se pose itérativement. Par rapport à notre enquête, on y voit que, selon l'auteur (anonyme) qui cite S. Papert, celui-ci prétendrait que “the origin of the word [...] is not from ‘mathematics,’ but from the Greek, *mathēmatikos*, which means *disposed to learn*”. L'allégation est ambiguë : signifie-t-elle que « mathétique » n'aurait rien à voir avec « mathématique » ? Ou que « mathétique » ne dérive pas de « mathématique » mais que l'un et l'autre dérivent d'une même « racine » ?

b) Pour tenter de répondre, examinons ce que dit le *Dictionnaire historique de la langue française* à propos du terme latin *mathematicus* dont provient le français *mathématique* (Rey et al., 1993, p. 1205).

Le latin l'a repris au grec *mathematikos* « qui désire apprendre, scientifique » et spécialement « qui concerne les mathématiques », substantivé dans *ê mathematikê (tekhnê)* comme nom de science. Ce mot est dérivé de *mathēma* « ce qui est enseigné », employé au pluriel pour « connaissances », par opposition à *mathêsis*, qui met l'accent sur le fait d'apprendre. L'un et l'autre sont dérivés de *manthanein*, verbe passé de sa signification première, « apprendre, par l'expérience, apprendre à connaître, à faire », au sens plus abstrait de « comprendre ».

On arrive ici à une explication qui semble au moins cohérente : le verbe *manthanein* aurait eu deux rejetons, l'un, *mathēma*, du côté de l'enseigner, l'autre, *mathêsis*, du côté de l'apprendre – de là sans doute qu'on ait pu envisager de nommer *mathétique* la science de l'apprendre ; Mais notons que la science de l'enseigner devrait alors être nommée... *mathématique*, si ce mot n'était déjà très « occupé » ! En fait, la didactique telle que nous l'étudions dans ce cours *intègre en une même science* une « mathématique » et une « mathétique », soit une théorie de l'enseignement et une théorie de l'apprentissage. Et retenons aussi que les « mathématiques » étaient par excellence, dans la civilisation grecque, *ce qui s'enseigne et ce qui s'apprend* : raison de plus pour en faire la première pierre de touche d'une science didactique en construction.

e) Quelles réponses ce texte apporte-t-il aux trois questions précédemment rappelées ? Si l'on entend la première question – D'où provient la distinction faite par certains auteurs entre *didactique* et *mathétique* ? – comme concernant l'origine *historique* de cette distinction, la réponse est simple : le texte répond (par documents interposés) qu'elle aurait son origine dans le *Spicilegium didacticum* de Comenius paru en 1680, ouvrage où apparaît (en latin) le terme *mathétique* expressément forgé (*coined*) par Comenius. Le questionnement sur la « provenance » de la distinction didactique/mathétique pouvait aussi être compris comme renvoyant aux

phénomènes à l'origine de cette conceptualisation dualiste. À cet égard, le texte du cours semble rapprocher celle-ci du phénomène selon lequel, lorsque Y enseigne ♥ à X , X apprend peut-être ♥ mais apprend aussi, bien souvent, *d'autres objets* O : ce qui est *appris* ne se superpose pas à ce qui est *enseigné*. En revanche, notons-le aussi, la première question n'exigeait pas que l'on se réfère à Seymour Papert : la distinction didactique/mathétique conçue par Comenius *pourrait* aussi bien être morte aujourd'hui (sauf pour l'historien de l'éducation) et même si ce n'est pas le cas (la requête **mathetics** adressée à Google provoque ainsi, le 29 juin 2010 vers 8 h, l'annonce de 12 700 résultats de recherche), ce que le libellé de la question rappelle comme un simple fait, il n'était nullement question d'identifier les auteurs adeptes de la distinction didactique/mathétique *formulée en ces termes*. La deuxième question – Comment peut-on expliquer la proximité des mots *mathétique* et *mathématique* ? – faisait l'objet dans le cours d'une petite enquête déjà évoquée, qui part de la mention d'une « réponse » attribuée à Papert (dans son livre *The Children's Machine: Rethinking School in the Age of the Computer*, 1992) par l'article "Mathetics" de *Wikipedia* et avance à partir de là jusqu'à la réponse proposée (conjecturalement) dans le cours : le verbe grec *manthanein*, « apprendre » puis « comprendre », aurait eu deux rejetons, l'un, *mathêma*, « ce qui est enseigné » et, au pluriel, « connaissances », qui se situe « du côté de l'enseigner », l'autre, *mathêsis*, qui met l'accent sur le fait d'apprendre ; de là que l'on ait pu désigner une supposée science de l'apprentissage par le mot de *mathétique*, dérivé de *mathêsis*, ce qui aurait normalement conduit à désigner par le mot de *mathématique* la science de l'enseignement, si ce mot n'avait été très anciennement « occupé », ainsi qu'on le sait. La troisième question – Pourquoi la distinction entre *didactique* et *mathétique* n'est-elle pas recevable en théorie anthropologique du didactique ? – reçoit dans le texte du cours une réponse articulée sur deux plans : la didactique au sens de la TAD étudiée, notamment dans une perspective d'*ingénierie didactique*, les conditions de la diffusion praxéologique et en particulier, parmi elles, les effets rémanents sur X (et sur ses environnements institutionnels) d'apprentissages antérieurs, qui conditionnent en partie les apprentissages ultérieurs de X , sans toujours porter sur des objets explicitement enseignés à X . Toute l'étude qui suit relève au reste de ce schéma-là : on y découvrira comme obstacle à un apprentissage nouveau un équipement praxéologique ancien dont certaines parties ont été à coup sûr acquises par X sans jamais lui avoir été délibérément « enseignées ».

f) Les rédactions des 12 étudiants ayant participé à l'épreuve sont reproduites ci-après le plus fidèlement possible, compte tenu des écarts difficilement réductibles entre écriture manuscrite et écriture au clavier. Elles seront parcourues une à une, dans un ordre quelconque.

Réponse 1

La différence entre Didactique et Mathétic provient de deux définitions anglaises. La didactique est la science de l'enseignement alors que la mathetic est celle de l'apprentissage. (terme forgé par Comenius) Selon Paupert, les mathetics et les mathématiques ont les mêmes origines mais l'un ne vient pas de l'autre. En latin, mathetic signifie desire apprendre les sciences. En grec, c'est la science de l'apprentissage donc d'enseigner. Les deux références pourraient être associées aux mathématiques. Ce n'est pas recevable car il ne met pas en avant les conditions et contraintes relatif à ces deux termes. Les effets sociaux de la didactique ne sont pas tous étudiés donc on ne peut pas tous savoir sur cette distinction.

Observations 1

Il s'agit là d'un galimatias étonnant où tout se mêle, comme l'illustre bien la dernière phrase de cette rédaction. La simplification arbitraire d'une situation « complexe » conduit à des affirmations absurdes, telle celle-ci : « En grec, c'est la science de l'apprentissage donc d'enseigner. » Mais d'autres aspects sont plus encore surprenants : pourquoi ainsi orthographier « Mathétic » ou « mathetic » ou « mathetics » ce que le texte du cours et le libellé de la question nomment *mathétique* ? Les confusions culturelles abondent. Ainsi la distinction didactique/mathétique proviendrait-elle « de deux définitions anglaises ». L'indication concernant le terme latin *mathematicus* selon laquelle « le latin l'a repris au grec *mathematikos* "qui désire apprendre, scientifique" » devient : « En latin, mathetic signifie desire apprendre les sciences. » Tout se mélange, sans respect aucun pour la réponse à restituer, sans égard non plus pour les règles de la syntaxe. Ainsi dans cette phrase : « Les deux références [sic] pourraient être associées aux mathématiques. Ce n'est pas recevable car il ne met pas en avant les conditions et contraintes relatif à ces deux termes. »

Réponse 2

Pour certains auteurs, la didactique est la science de l'enseignement, tandis que la mathetic serait la science de l'apprentissage. Selon S. Papert, le mot mathétic viendrait du grec *mathēmatikos*, comme mathématiques et donc l'un ne serait pas dérivé de l'autre, mais les 2 proviendraient de la même racine.

Dans le dictionnaire historique de la langue française, à *mathematicus*, on voit que *mathēma* et *mathēsis* sont dérivés de *manthanein*, l'un du côté de l'apprendre, l'autre du côté de l'enseigner.

En théorie anthropologique du didactique, cette distinction n'est pas recevable car nous l'étudions en une seule science qui comprend la théorie de l'enseignement et la théorie de l'apprentissage.

Observations 2

Il s'agit là d'un bien meilleur compte rendu de réponse, qui n'en laisse que mieux voir une faible capacité à effectuer ce type de tâches. Notons tout d'abord qu'on retrouve les orthographes « mathetic » et « mathétic », qui devraient troubler un scripteur francophone natif ! Notons aussi que la réponse attendue à la première question est absente, la première phrase ne faisant que reprendre autrement – et bien inutilement – la formulation de la question. Pour la deuxième question, des matériaux de réponse sont proposés ; mais ils ne sont pas exploités pour donner une réponse explicite. S'agissant de la troisième question, on ne nous dit rien de la raison pour laquelle la didactique ne pourrait accepter la dualité institutionnelle science de l'enseignement/science de l'apprentissage. Bien entendu, la meilleure qualité de cette rédaction se marque à ce qu'on n'y retrouve pas les confusions et autres incohérences qui abondaient dans la réponse 1 ci-dessus.

Réponse 3

La didactique intègre en une même science une « mathématique » et une mathétique soit une théorie de l'enseignement et une théorie de l'apprentissage. Les mathématiques étaient par excellence, dans la civilisation grecque, « ce qui s'enseigne et ce qui s'apprend ».

La proximité des mots mathétique et mathématiques le latin l'a repris au grec *mathematikos* « qui désire apprendre, scientifique », substantivé [en] nom de science. Ce mot est dérivé de *mathema* « ce qui est enseigné », employé au pluriel pour « connaissance », par opposition à *mathesis*, qui met l'accent sur le fait d'apprendre.

L'un et l'autre sont dérivés de *Manthanein*

Observations 3

Ici, un trait présent déjà dans la réponse 2 se distingue mieux peut-être : la candidate *ne répond pas aux questions posées*. Selon l'habitus dissertationnel, elle dit des choses sur le « sujet ». Tout le premier paragraphe est à cet égard exemplaire. Pour la deuxième question, de même, on retrouve l'exposé de « matériaux » bruts, qui, s'il était délivré « de mémoire », ne pourrait que ravir le correcteur, à la syntaxe près ! La troisième question n'est pas abordée ; mais sans doute doit-on voir une « réponse » – qui n'en est pas une, puisqu'elle énonce un fait au lieu d'en donner les raisons – dans le début du premier paragraphe : « La didactique intègre en une même science une «mathématique» et une mathétique... »

Réponse 4

Le terme de mathétique a été employé par John Amos Comenius dans son ouvrage « *Spicilegium didacticum* » en 1680. On peut voir la distinction entre

didactique et mathétique. La didactique est la science de l'enseignement qui s'oppose à la mathétique qui est la science de l'apprentissage. Mais la science didactique étudie l'ensemble des effets d'apprentissage sur X du fonctionnement d'un système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$ supposé viser « l'apprentissage de $\heartsuit$ » (par X).

Pour S. Papert, l'origine du mot mathétique ne vient pas de mathématique mais du grec mathēmatikos qui signifie « qui désire apprendre ». Le verbe mathanein aurait donné mathēma (du côté de l'enseigner) et mathēsis (du côté de l'apprendre). C'est de là qu'on ait pu envisager de nommer mathétique la science de l'apprendre. Donc la science de l'enseigner devrait être nommée mathématique. La didactique étudiée en cours intègre en une même science une « mathématique » et une « mathétique », soit une théorie de l'enseignement et une théorie de l'apprentissage.

Observations 4

Un correcteur bienveillant doit considérer ici, par delà les maladroites stylistiques, que la rédaction proposée restituent à peu près les réponses aux deux premières questions, mais ne va pas plus loin que les rédactions précédentes s'agissant de la troisième question. On notera la difficulté – qu'on peut croire installer par l'habitus essayiste – à formuler son propos comme une *réponse* formelle à une question explicitement formulée : au lieu de « Le terme de mathétique a été employé par John Amos Comenius dans son ouvrage "Spicilegium didacticum" en 1680 », cette exigence voudrait que la candidate écrive quelque chose comme : « Le terme de mathétique a été créé par John [sic] Amos Comenius, qui l'a employé dans son ouvrage *Spicilegium didacticum* paru en 1680. »

Réponse 5

La distinction entre didactique et mathétique Faïtes par certains auteurs provient de la définition que l'on donne à chacun d'eux : la didactique serait la science d'enseigner alors que mathétique serait la science de l'apprentissage ; mathétique serait donc l'opposé de la didactique.

Cette proximité entre les mots mathétique et mathématique est dû à l'origine de ces deux mots en langue grecque : le verbe manthanein aurait eu deux dérivés : mathema (qui se rapproche de l'enseignement) et mathēsis (qui se rapproche de l'apprentissage), et, c'est par cette même racine qui explique comment les mots mathetiq et mathématique sont si proche.

Cette distinction n'est pas recevable en théorie anthropologique du didactique car la définition de la didactique proposé (science d'enseigner) n'est pas en accord avec celle de la théorie anthropologique du didactique qui est l'étude de l'ensemble des effets d'apprentissage sur X du fonctionnement d'un système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$ supposé viser l'apprentissage de $\heartsuit$ par X.

Observations 5

Au-delà des fantaisies orthographiques, on note d'abord que la première question ne reçoit pas de réponse : l'explicitation de la distinction didactique/mathématique se substitue à la considération de sa « provenance » (Comenius, si l'on suit le texte du cours). À la deuxième question, le candidat apporte un peu plus que des matériaux bruts : on peut considérer que la réponse du cours est ici restituée presque correctement (même si une vraie réponse eût demandé une explicitation plus poussée). En revanche, la « réponse » à la troisième question, qui part d'un bon pas, échoue à expliciter l'argument sur lequel repose le rejet de la distinction didactique/mathématique. On notera enfin un hapax : l'orthographe « mathetiq », qui appartient peut-être au français « modernisé ».

Réponse 6

La didactique comme nous l'étudions suppose d'étudier l'ensemble des effets d'apprentissage sur X du fonctionnement d'un système didactique $S(X ; Y ; \heartsuit)$ supposé viser l'apprentissage de $\heartsuit$ par X.

Seulement certains auteurs font une distinction entre didactique et mathématique.

Cette distinction vient du fait que l'enjeu didactique officiel $\heartsuit$ peut - être acquis, chez les membres de X, de manière différente. La didactique est définie comme la science de l'enseignement et la mathématique comme la science de l'apprentissage.

Le terme mathématique est inventé par John Amos Comenius vers 1680. Il l'oppose donc à la didactique.

Les effets d'apprentissage du fonctionnement $S(X ; Y ; \heartsuit)$ sur X sont analysés à propos d'objets $O \neq \heartsuit$. ou à propos de $\heartsuit$. Or pour régler de façon optimale le fonctionnement du système didactique il convient d'analyser le tout.

La proximité des mots mathetique et mathématique peut être expliquée par l'origine grecque de ces deux mots.

À la base ils proviennent tous deux du verbe manthanein qui dérive et donne deux autres mots : mathēma qui signifie « ce qui est enseigné » et qui est opposé à mathēsis qui met l'accent sur l'apprendre.

La science de l'apprendre donne donc le mot mathématique

Observations 6

Sous la simplicité rustique du style de la candidate, on découvre quantité de matériaux jetés en vrac et qui dessinent des ébauches de réponse. On pourrait les distribuer ainsi, avec un reste :

Question (1)

« Le terme mathématique est inventé par John Amos Comenius vers 1680. Il l'oppose donc à la didactique. »

« La didactique est définie comme la science de l'enseignement et la mathématique comme la science de l'apprentissage. »

« Cette distinction vient du fait que l'enjeu didactique officiel ♥ peut - être acquis, chez les membres de X, de manière différente. »

Question (2)

« La proximité des mots mathétique et mathématique peut être expliquée par l'origine grecque de ces deux mots.

À la base ils proviennent tous deux du verbe manthanein qui dérive et donne deux autres mots : mathēma qui signifie « ce qui est enseigné » et qui est opposé à mathēsis qui met l'accent sur l'apprendre.

La science de l'apprendre donne donc le mot mathétique »

Question (3)

« Les effets d'apprentissage du fonctionnement $S(X; Y; ♥)$ sur X sont analysés à propos d'objets $O \neq ♥$. ou à propos de ♥. Or pour régler de façon optimale le fonctionnement du système didactique il convient d'analyser le tout. »

« La didactique comme nous l'étudions suppose [donc] d'étudier l'ensemble des effets d'apprentissage sur X du fonctionnement d'un système didactique $S(X; Y; ♥)$ supposé viser l'apprentissage de ♥ par X. »

Reste

« Seulement certains auteurs font une distinction entre didactique et mathétique. »

Là encore, ce qui frappe, c'est la difficulté à articuler une *réponse*, qui soit voulue telle, à une *question*.

Réponse 7

Le verbe manthanein aurait eu deux rejetons, l'un, mathēma, du côté de l'enseigner, l'autre, mathēsis, du côté de l'apprendre. De là sans doute qu'on ait pu envisager de nommer mathétique la science d'apprendre ; nous notons que la science de l'enseigner devrait alors être nommée... mathématique. La didactique telle que nous l'étudions intègre en une même science une « mathématique » et une « mathétique » soit une théorie de l'enseignement et une théorie de l'apprentissage. Les « mathématiques » étaient dans la civilisation grecque par excellence, ce qui s'enseigne et ce qui s'apprend.

Observations 7

Le traitement précédemment appliqué donnerait ici ce que voici :

Question (1)

∅

Question (2)

« Le verbe manthanein aurait eu deux rejetons, l'un, mathēma, du côté de l'enseigner, l'autre, mathēsis, du côté de l'apprendre. De là sans doute qu'on ait pu

envisager de nommer mathetique la science l'apprendre ; nous notons que la science de l'enseigner devrait alors être nommée... mathématique. »

« les « mathématiques » étaient dans la civilisation grec par excellence, ce qui s'enseigne et ce qui s'apprend. »

Question (3)

« La didactique telle que nous l'étudions intègre en une même science une « mathématique » et une « mathetique » soit une théorie de l'enseignement et une théorie de l'apprentissage.

Reste

Ø

Il s'agit là d'une réponse minimaliste et déséquilibrée, qui reprend *verbatim* des passages du texte du cours. À propos de l'omission des accents (mathetique, mathématique(s), théorie), je me demande si la candidate ne verrait pas en cela une simple singularité personnelle de son « écriture », qui ne saurait (donc) pas plus lui être reprochée que sa façon de former les o ou les r !

Réponse 8

La distinction faite entre didactique et mathetique vient du fait que la didactique serait plutôt la science de l'enseignement alors que la mathétique (Comenius) serait celle de l'apprentissage. La proximité de ces deux mots vient de l'origine du mot « mathématique » qui vient du grec « mathematikos » signifiant « désire apprendre ». Ce mot en a donné deux autres dont l'un signifierait plus « enseigner » et l'autre « apprendre ». Cependant, si le mot « mathématique » n'avait pas été autant utilisé alors c'est ainsi qu'aurait dû s'appeler la mathetique.

Observations 8

On notera une confusion déjà rencontrée : la candidate passe du couple didactique/mathétique au couple mathématique/mathétique comme s'il s'agissait d'une seule et même réalité : la proximité des deux mots dont elle parle est celle de *mathématique* et de *mathétique*, non de didactique et de mathématique. On aura noté qu'elle ne répond vraiment qu'à la deuxième question, sans apporter de réponse explicite à la première et sans considérer aucunement la troisième. La valse des accents est ici non moins remarquable : les graphies « mathetique » et « mathétique » semblent tenues pour équivalentes.

Réponse 9

La distinction faite par certains auteurs entre didactique et mathématique.

Seymour Papert, prétendait que « mathétique » n'aurait rien à voir avec « mathématiques » ? ou que « mathétique » ne dérive pas de « mathématiques » mais que l'un et l'autre dérivent une même « racine ».

Comenius étudie en particulier la didactique.

Sans doute qu'on ait pu envisager de nommer mathétique la science de l'apprendre ; Mais notons que la science de l'enseigner devrait alors être nommée... mathématique, si ce mot n'était déjà très « occupé » ! en fait, la didactique telle que nous l'étudions dans ce cours intègre en une même science une « mathématique » et une mathétique », soit une théorie de l'enseignement et une théorie de l'apprentissage. Et retenons aussi que les « mathématiques » étaient par excellence, dans la civilisation grecque, ce qui s'enseigne et ce qui s'apprend : raison de plus pour en faire la première pierre de touche d'une science didactique en construction.

Observations 9

On peut reprendre la même remarque que précédemment concernant les formes « mathétique » et « mathématique ». On notera à nouveau l'incapacité de la candidate à formuler des réponses nettes aux questions posées : la rédaction déploie un fondu-enchaîné qui ne favorise pas la rigueur et qui renvoie typiquement au style dissertationnel, dans lequel l'important est de « dire quelque chose », non de répondre à des questions.

Réponse 10

Le terme mathétique est la science de l'apprentissage qui s'oppose à la didactique selon Rey dans le dictionnaire historique de la langue française.

Le latin a repris au grec le mot mathematikos puis le verbe manthanein qui donne des mots :

- mathêma = enseigner qui renvoi aux mathématiques
- mathêsis = apprendre

La didactique intègre en une même science mathématiques et mathétique comprenant la théorie de l'enseignement et la théorie de l'apprentissage.

Observations 10

Comme en d'autres cas, on voit ici les effets de confusions culturelles diverses. L'orthographe « terme » provient d'une *correction*, sans doute de « terme », mot qui a été recouvert par un correcteur liquide. La candidate prête à Alain Rey, qui a dirigé le *Dictionnaire historique de la langue française*, le fait d'opposer « mathétique » à « didactique », alors que ce dictionnaire ne connaît pas le mot « mathétique ». Selon elle, « le latin a repris au grec le mot mathematikos puis le verbe manthanein »... Surtout, la didactique intégrerait en une même science « mathématiques et mathétique » !

Réponse 11

Les auteurs John Amos Comenius et S. Papert font une distinction entre dialectique et mathématique. La définition de l'étude de la dialectique pose le problème de la force du lien entre les réalités rencontrées et l'enjeu de l'étude. Ils prétendent que « Mathématique » et « Mathétique » ne dérivent ni l'un de l'autre mais d'une même racine.

On explique la proximité de ces Mots par le fait qu'ils proviennent du verbe, Manthanein. L'un mathéma, du côté de l'enseigner, l'autre Mathêsis, du côté de l'apprendre. D'où il aurait pu être envisagé de Nommer Mathétique la science de l'apprendre et Mathématique science de l'enseigner. Les Mathématiques étaient dans la civilisation grecque ce qui s'enseigne et ce qui s'apprend.

Cette Distinction entre Mathétique et Mathématique n'est pas recevable en théorie Anthropologique didactique car ces deux dans la didactique telle que nous l'étudions intègre en une même science une science didactique en construction.

Observations 11

La confusion est ici à son comble. La candidate a remplacé « didactique » par « dialectique ». Elle réunit Comenius, mort en 1670, et Papert, né en 1928, dans une commune opposition de la dialectique et de la... mathématique ! Le passage sur la « force du lien » est un recopiage maladroit d'un passage du cours reproduit ci-dessus. « Dire quelque chose », même maladroitement, est plus important que de tenter de répondre clairement à des questions précises. Bien entendu, la lambada des accents continue.

Réponse 12

La distinction faite entre didactique et mathétique provient d'un mathématicien du nom de Seymour Papert où est mis l'accent sur la proximité de deux termes, mathétique et mathématique : en effet, tous deux sont issus du verbe latin manthanein qui a donné deux autres verbes mathema et mathesis, qui ont respectivement pour sens enseigner et apprendre. L'un serait vu comme la science de l'apprendre et l'autre comme la science de l'enseigner, tous deux regroupant une même science au service de la didactique. C'est pourquoi elle ne peut être recevable en théorie anthropologique du didactique car elles regroupent une même science intégrée à la didactique ; on ne peut les distinguer car la didactique c'est à la fois enseigner et apprendre.

Observations12

On note que le candidat aborde successivement – quoique très confusément – les trois questions posées.

Question (1)

« La distinction faite entre didactique et mathétique provient d'un mathématicien du nom de Seymour Papert »

Question (2)

« où est mis l'accent sur la proximité de deux termes, mathétique et mathématique : en effet, tous deux sont issus du verbe latin *manthanein* qui a donné deux autres verbes *mathema* et *mathesis*, qui ont respectivement pour sens enseigner et apprendre. »

Question (3)

« L'un serait vu comme la science de l'apprendre et l'autre comme la science de l'enseigner, tous deux regroupant une même science au service de la didactique. C'est pourquoi elle ne peut être recevable en théorie anthropologique du didactique car elles regroupent une même science intégrée à la didactique ; on ne peut les distinguer car la didactique c'est à la fois enseigner et apprendre. »

Mais on retrouve dans sa rédaction certains traits bien identifiés. Ainsi de la confusion entre le couple de notions didactique/mathétique d'une part, et le couple de mots mathématiques/mathétique d'autre part. La syntaxe, on l'aura vu, est ici étrangement maltraitée. Les confusions « culturelles » sont insistantes : du grec *manthanein*, le candidat fait ainsi un verbe latin. Sa tentative d'argumentation (en relation avec la troisième question) tourne court, pour le moins.

g) L'étude précédente confirme un fait clinique anciennement observé : la formation scolaire usuelle ne prépare pas ou prépare mal à examiner une réponse $R^\diamond$ pour en rendre compte de façon précise. Au mieux, elle conduit à un déballage de notations supposées avoir un certain rapport avec la question Q à laquelle $R^\diamond$ fait écho. On retrouve là l'influence du modèle de l'essayisme dissertationnel ; et l'on voit que l'un des gestes cardinaux de l'enquête, telle que la formalise le schéma herbartien, ne va nullement de soi dans l'équipement praxéologique engendré par l'école.

ENQUÊTES MATHÉMATIQUES

1. Mathématiques pour didacticiens : suite sans fin

a) Je voudrais revenir ici sur deux enquêtes mathématiques évoquées au cours des séances précédentes. La première a trait à la question suivante :

Étant donné deux expressions $f(a, b, c, \dots)$ et $g(a, b, c, \dots)$, où $a, b, c, \dots$, sont des variables *entières positives* majorées par des entiers $A, B, C, \dots$, comment déterminer le minimum (ou un minorant > 0) de $\delta = |f - g|$ sur l'ensemble $M =$

$\{ (a, b, c, \dots) \in I / \delta(a, b, c, \dots) > 0 \}$, où $I = I_A \times I_B \times I_C \times \dots$, la notation I_K ($K \in \mathbb{N}$) désignant l'ensemble d'entiers $[0, K] \cap \mathbb{N}$?

C'est là un problème que nous avons résolu dans quelques cas simples. J'ébaucherai ici un nouvel exemple en me contentant, faute de mieux, d'un petit bricolage mathématique. On connaît trop peu l'identité suivante (où a et b sont des entiers positifs) : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a + b + \sqrt{4ab}}$. Considérons alors les fonctions $f(a, b) = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $g(c, d) = \sqrt{c} + \sqrt{d}$ ainsi que $\delta(a, b, c, d) = |\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d}|$, qui s'écrit encore

$$\delta(a, b, c, d) = |\sqrt{a + b + \sqrt{4ab}} - \sqrt{c} + \sqrt{d}|,$$

et dont on recherche un minorant strictement positif sur un certain ensemble M de quadruplets d'entiers.

b) Considérons le cas où a, b, c vérifient $c \leq a + b$ et où ab est un entier non carré. Considérons alors l'application $d \mapsto \varphi(d) = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d}$. Il est clair que φ est *décroissante*. La suite d'égalités

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (c + \sqrt{d})}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} = \frac{a + b - c + \sqrt{4ab} - \sqrt{d}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$$

montre en outre que $\varphi(d)$ est *positif* lorsque $d < 4ab$ et tend vers $-\infty$ quand d tend vers $+\infty$. La plus petite valeur positive de φ est atteinte pour

$$d_- = E[(a + b - c + \sqrt{4ab})^2]$$

et la plus grande valeur négative de φ est atteinte pour $d_+ = d_- + 1$. À titre de simple illustration, prenons le cas où $a = 7$, $b = 11$ et $c = 15$; on a alors

$$d_- = E[(a + b - c + \sqrt{4ab})^2] = E[(3 + \sqrt{308})^2] = 422$$

et donc $d_+ = 423$. Il vient ainsi : $\varphi(d_-) = \sqrt{7} + \sqrt{11} - \sqrt{15} + \sqrt{422} = 0,00061138\dots$, $\varphi(d_+) = \sqrt{7} + \sqrt{11} - \sqrt{15} + \sqrt{423} = -0,0014283\dots$. On a ainsi par exemple, pour tout entier positif d , $|\sqrt{7} + \sqrt{11} - \sqrt{15} + \sqrt{d}| > 10^{-4}$.

c) Je considère maintenant un autre type de cas particuliers, celui où l'on a $c = a + b$, en sorte que l'on a cette fois :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d} = \frac{\sqrt{4ab} - \sqrt{d}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}.$$

Pour a et b donnés, l'expression $\psi(a, b, d) = \sqrt{4ab} - \sqrt{d}$ est une fonction *décroissante* de d , positive lorsque $d < 4ab$, nulle lorsque $d = 4ab$ et négative lorsque $d > 4ab$. Les deux plus petites valeurs non nulles de $|\sqrt{4ab} - \sqrt{d}|$ sont ainsi $\sqrt{4ab} - \sqrt{4ab - 1}$ et $\sqrt{4ab + 1} - \sqrt{4ab}$. Comme la suite $n \mapsto \sqrt{n} - \sqrt{n - 1}$ (pour $n \geq 1$) est décroissante, ainsi que le montre l'égalité

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}},$$

la plus petite valeur non nulle de $|\sqrt{4ab} - \sqrt{d}|$ est en fait

$$\sqrt{4ab+1} - \sqrt{4ab} = \frac{1}{\sqrt{4ab+1} + \sqrt{4ab}}.$$

Pour $a, b \leq 10^6$ et $d \neq 4ab$, on a donc

$$|\sqrt{4ab} - \sqrt{d}| > \frac{1}{\sqrt{4ab+1} + 2 \cdot 10^6}.$$

On a par ailleurs : $\sqrt{4ab+1} = \sqrt{4ab} \sqrt{1 + \frac{1}{4ab}} < \sqrt{4ab} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{4ab}\right) = \sqrt{4ab} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4ab}} \leq 2 \cdot 10^6 + 0,25 \cdot 10^{-6}$. Il vient ainsi :

$$|\sqrt{4ab} - \sqrt{d}| > \frac{1}{2 \cdot 10^6 + 0,25 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^6} = \frac{1}{4 \cdot 10^6 + 0,25 \cdot 10^{-6}} > 0,2499 \cdot 10^{-6}.$$

Dans le type de cas considéré ($c = a + b$, avec $a, b \leq 10^6$), on aura donc :

$$|\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d}| = \frac{|\sqrt{4ab} - \sqrt{d}|}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} > \frac{0,2499 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}.$$

Comme $\sqrt{a}, \sqrt{b} \leq 10^3$ et $c = a + b \leq 2 \cdot 10^6$, en supposant de plus $d \leq 4ab + 1 = 4 \cdot 10^{12} + 1$, il vient

$$|\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d}| > \frac{0,2499 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^3 + \sqrt{2 \cdot 10^6} + \sqrt{4 \cdot 10^{12} + 1}}$$

en sorte que, finalement, $|\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d}| > 6 \cdot 10^{-11}$.

d) Je m'arrêterai sur cette question : ce qui précède s'étend-il, et comment, au cas où $c < a + b$? Existerait-il d'autres techniques, d'autres technologies utiles, plus efficaces que celles mises en jeu jusqu'ici ?

2. Degrés de liberté

a) L'enquête précédente, à peine amorcée, relève à ce stade de l'enquête « sans littérature » typique de la culture mathématique scolaire. La chose, ici, s'explique, doublement : d'un côté, par le fait qu'il nous est possible de démarrer l'enquête « en autonomie », avec des outils mathématiques très réduits ; d'un autre côté, par le fait que l'identification de réponses $R^\diamond$ apparaît difficile. On est là, classiquement, devant le dilemme qui est au cœur de la *dialectique de l'étude et de la recherche* : faut-il (d'abord) chercher par soi-même, ou faut-il (d'abord) étudier les conclusions de ceux qui ont

cherché ? La situation est à cet égard différente quand on en vient au second sujet d'enquête évoqué à la fin de la séance précédente de ce séminaire.

Q₀. Que peut-on faire, y compris au plan mathématique, pour faire entendre [à des étudiants de SHS] ce qu'est et ce que signifie la notion de degré de liberté introduite à propos du test du χ^2 ?

Bien entendu, ici, on peut tenter de produire une réponse $R^\forall$ sans se référer explicitement à des $R^\diamond$; mais il n'est pas déraisonnable de s'arrêter sur la question que voici, qui peut au reste être regardée comme incluse dans la question à étudier :

Q₁. Que font les auteurs, y compris au plan mathématique, pour faire entendre [à des étudiants de SHS] ce qu'est et ce que signifie la notion de degré de liberté introduite à propos du test du χ^2 ?

b) Enquêter sur Q₀ peut commencer par une enquête sur Q₁ : d'emblée, ainsi, s'introduit la notion de *parcours d'étude et de recherche*. Ce parcours, ici, s'ouvre donc par une phase *d'étude* (alors que dans l'enquête sur le minimum de δ l'enquête s'ouvre par une phase de *recherche*). Comme toujours, il est *a priori* indéterminé. Si, par exemple, on se réfère à la « règle » consistant à « partir de *Wikipédia* », on peut commencer par aller voir l'article « Degré de liberté (statistiques) » ; celui-ci est si court qu'on peut le reproduire ici *in extenso* :

En statistiques le degré de liberté désigne le nombre de valeurs aléatoires qui ne peuvent être déterminées ou fixées par une équation (notamment les équations des tests statistiques).

Par exemple si l'on cherche deux nombres dont la somme est 12, aucun des deux nombres ne doit être déterminé par l'équation $X + Y = 12$.

X peut être choisi arbitrairement, mais alors pour Y il n'y a alors plus le choix.

Ainsi, si vous choisissez 11 comme valeur pour X, Y vaut obligatoirement 1. Il y a donc deux variables aléatoires (X,Y), mais un seul degré de liberté.

À la fois obscur (pour le non-spécialiste) et trivial, cet article ne permet guère de faire démarrer l'enquête ; mais on pourra lui faire jouer un rôle de *test* de l'étude à mener : dès lors que celle-ci sera un peu avancée, il conviendra que ce court texte devienne une « boîte claire », de part en part intelligible, y compris dans ses approximations ou ses erreurs éventuelles.

c) Comment avancer à partir de là ? Là encore, on peut utiliser une règle proposée aux élèves et aux étudiants dans les enquêtes qu'ils ont à réaliser : *passer à l'anglais*. En l'espèce, l'article correspondant de *Wikipedia*, intitulé

“Degrees of freedom (statistics)”, apparaît d’emblée comme beaucoup plus ambitieux, notamment dans son recours aux mathématiques, et en particulier à la géométrie des espaces à N dimensions. On y lit notamment ceci :

While introductory texts may introduce degrees of freedom as distribution parameters or through hypothesis testing, it is the underlying geometry that defines degrees of freedom, and is critical to a proper understanding of the concept.

L’article se réfère alors à un travail déjà ancien (1940) dû à Helen M. Walker (1891-1983), “Degrees of Freedom” (*Journal of Educational Psychology* : voir http://courses.ncssm.edu/math/Stat_Inst/PDFS/DFWalker.pdf), dont est extrait ce bref constat :

For the person who is unfamiliar with N -dimensional geometry or who knows the contributions to modern sampling theory only from secondhand sources such as textbooks, this concept often seems almost mystical, with no practical meaning.

On voit ainsi que le problème de la compréhension de la notion de degré de liberté dans le champ de la recherche en éducation a été anciennement posé et a fait relativement tôt l’objet de travaux précis. On peut à ce stade marquer l’article de *Wikipedia* – et celui d’Helen Walker – comme contenant des réponses R^0 à examiner, sans le faire immédiatement pour autant.

d) Une tâche peut-être plus pressante est d’identifier le type de situations d’où naît la question Q_0 . Bien entendu, on peut ici se reporter à l’article « Test du χ^2 » de *Wikipédia*, dont voici le début :

Le test du χ^2 (prononcer « khi-deux » ou « khi carré », qu’on écrit également à l’anglaise « chi-deux » ou « chi carré ») permet, partant d’une hypothèse et d’un risque supposé au départ, de rejeter l’hypothèse si la distance entre deux ensembles d’informations est jugée excessive.

Il est particulièrement utilisé comme *test d’adéquation* d’une loi de probabilité à un échantillon d’observations supposées indépendantes et de même loi de probabilité. Un *test d’homogénéité* concerne un problème voisin, la comparaison d’échantillons issus de populations différentes. De manière assez différente, un *test d’indépendance* porte sur des données qualitatives.

L’article développe ensuite les trois cas recensés ici : *test d’adéquation*, *test d’homogénéité*, *test d’indépendance*. Je laisserai chacun se reporter à l’article en question. Pour illustrer le cas du test d’indépendance – car il me semble

qu'une rencontre problématique avec la notion de degré de liberté se fait surtout dans ce cas –, je vous renvoie à la présentation que j'ai donnée dans la séance 5 du séminaire de l'année 2006-2007 et que je reproduis sans changement, ci-après, en annexe.

UN PROGRAMME DE RECHERCHE

1. Le projet de l'UMR ADEF pour 2012-2015

a) Le projet de l'UMR ADEF qui doit être examiné sous peu par le conseil scientifique de l'université de Provence est arrivé à une version stable (en principe). À l'heure actuelle, quatre équipes composent l'UMR. L'équipe dont nous sommes membres a pris pour dénomination « Approches Comparatives et Anthropologiques du didactique et du scolaire » (équipe ACADIS). Cette équipe, dirigée par Alain Mercier, est formée de l'union de quatre sous-équipes dont les dénominations respectives sont « Approches comparatives du didactique » (responsable : Teresa Assude), « Approches socio-didactiques et territorialisées de questions socialement vives » (responsable : Alain Legardez), « Développement de la théorie anthropologique du didactique » (responsable : Yves Chevallard), « Approches des usages des technologies de l'information et de la communication » (responsable : Jean Ravestein).

b) Les contraintes imposées à la rédaction du projet ont provoqué une réduction draconienne de la place allouée à chaque équipe, et donc à chaque sous-équipe, pour expliciter son apport au projet global de l'UMR. Pour ce qui est de l'équipe TAD – ou plutôt, donc, de la sous-équipe « Développement de la théorie anthropologique du didactique » –, ce qui a survécu d'une présentation plus détaillée est ceci, que je ne commenterai pas davantage ici :

Développement de la théorie anthropologique du didactique

Ce programme de recherche se déploie selon trois dimensions correspondant aux grands types de choix inhérents aux institutions didactiques : choix des connaissances à diffuser (les praxéologies), choix des situations didactiques par lesquelles les diffuser, choix des parcours de formation. La variable des choix praxéologiques se conjugue avec deux autres variables : la variable des publics (par exemple les étudiants en sciences de l'éducation) et la variable des univers praxéologiques (par exemple la méthodologie de la recherche et la statistique). Pour l'essentiel, les publics étudiés sont a) les élèves de l'enseignement secondaire, b) les étudiants et les chercheurs en sciences de l'éducation et en didactique, c) les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire, d) les élèves des écoles d'ingénieurs. Les univers praxéologiques sont essentiellement 1) les savoirs mathématiques, 2) les

savoirs de la recherche d'information sur l'Internet, 3) les savoirs du développement durable, 4) les savoirs de la recherche, y compris la statistique et l'analyse de données, 5) les savoirs de la production et de l'édition de textes, 6) les savoirs didactiques de l'étude et de l'enseignement en présence et à distance.

2. Recherche et partage

a) Je voudrais pour terminer faire un commentaire plus général, inspiré par divers épisodes dans le détail desquels, cependant, je n'entrerai pas ici. À l'occasion des discussions qui ont conduit à la partie du projet de l'UMR ADEF concernant l'équipe ACADIS, j'ai pu observer, à vrai dire chez de rares collègues, deux attitudes que je trouve éminemment condamnables. Imaginons qu'un chercheur x travaille sur un secteur ou un thème de recherche désigné ici par l'acronyme IDÉES (Innovations DÉespérément ESpérées) : x fait donc des recherches sur les IDÉES, se veut un spécialiste des IDÉES, dirige des thèses sur les IDÉES, etc. J'imagine en outre – bien que ce ne soit pas nécessaire à ma démonstration – que x est un chercheur « monocorde », je veux dire qui n'a qu'une corde à son arc : il est sur les IDÉES et sur cela seulement, ne travaille sur rien d'autre ; c'est dire s'il est expert en la matière ! Il entend, bien évidemment, que ce thème de recherche soit mentionné dans le projet du laboratoire, ce qui assurera qu'il puisse poursuivre ses recherches dans ce cadre institutionnel. Bien entendu, pour qu'il en soit ainsi, les responsables du laboratoire, de leur côté, doivent s'assurer que l'ensemble des chercheurs s'engageant, en son sein, à travailler sur les IDÉES est non vide. Or, ici, cet ensemble contient au moins x , en sorte que ladite condition est satisfaite. Le thème sera donc dûment inscrit dans le répertoire thématique du laboratoire. Voici alors la première dérive : x considère en vérité que le thème des IDÉES n'occupe pas, dans la formulation du projet, suffisamment de place – quelques lignes, alors qu'il aurait pu fournir une page et demie au moins (et une bibliographie de 20 pages). Il en déduit [sic] que le laboratoire n'aime pas les IDÉES et n'accueille ce thème que du bout du clavier. Comme il a tendance à s'identifier à son thème de recherche, il en déduit encore [re-sic] que le laboratoire ne veut guère de lui, et qu'on ne lui déroule pas un tapis suffisamment rouge et suffisamment long. Bien entendu, vous le savez, tout cela est absurde : le thème des IDÉES est bien là, dûment répertorié, et c'est à x (notamment) de le faire vivre comme objet de recherches – le thème ne saurait exister davantage pour avoir fait l'objet de plus longues palabres ! Mais voici maintenant la seconde attitude que j'ai annoncée : dans la droite ligne de son narcissisme scientifique exacerbé, x considère qu'il aurait, tenez-vous bien, l'*exclusivité* des recherches sur les IDÉES au sein du laboratoire, et qu'aucun autre que lui ne saurait s'arroger le droit d'un

commerce scientifique avec les IDÉES ! Si, par exemple, il découvre qu'un autre chercheur du laboratoire prétend faire inscrire sur son enseigne, disons, « Obsolescence et IDÉES », il interviendra subrepticement pour obtenir que cela soit retiré. S'il le pouvait, x demanderait à avoir l'exclusivité des IDÉES pour toute la France, pour l'Europe, pour la planète entière ! Bien entendu, tout cela n'a rien à voir ni avec l'éthique, ni avec la réalité barbare, forcément barbare du travail scientifique, où quiconque le veut peut travailler sur les IDÉES ou sur tout autre sujet de son choix. Car, en science, on juge l'arbre à ses fruits et le chercheur à ses travaux, non à ses prétentions notariales de petit propriétaire courroucé.

c) Ah ! lecteur crédule ! Tu as donc gobé mon petit apologue ? Tu me déçois, cher lecteur. Tu comprends maintenant ? J'ai cherché, je l'avoue, à t'emberlificoter – sans peut-être y réussir, car ta lucidité, je le sais, est sans pareille ! Mais non, bien sûr, x n'existe pas ! Il n'a jamais existé et – je l'espère désespérément – n'existera jamais que dans mon imagination joueuse, que la fin d'une année non moins laborieuse que les précédentes échauffe quelque peu. Arrêtons donc là cette courte satire ; et faisons ensemble le départ entre la fantaisie, enchantée ou monstrueuse, qui nous est quelquefois nécessaire, à nous les humains, pour comprendre le monde comme il va, et la quiétude désenchantée du réel, à laquelle je vous invite à revenir maintenant : bonnes et studieuses vacances d'été à tous, x compris !

That's all, folks!

Annexe au journal de la séance 8

Le test du χ^2

e) Voici tout d'abord un petit schéma de raisonnement, d'abord déterministe, ensuite aléatoire, qui éclaire ce que l'on fait dans un test statistique.

→ Soit deux propositions p et q . On a le schéma de raisonnement suivant (que l'on peut appeler « raisonnement par contraposition ») :

Si p était vraie, alors q serait fausse. Or q est vraie. Donc p est fausse.

Ce schéma s'exprime par la tautologie suivante : $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge q] \Rightarrow \neg p$. Cela rappelé, modifions un peu le vocabulaire et les notations. On suppose que l'on considère une certaine hypothèse H_0 (dite en statistique *hypothèse nulle*) et un certain événement E , liés par l'énoncé suivant :

Si H_0 était vraie, alors l'événement E ne pourrait pas se produire. Or on a observé la survenue de E . Donc H_0 est fausse.

Dans le cas *non déterministe*, on suppose que l'on dispose d'un *modèle probabiliste* qui fournit la probabilité de survenue de l'événement E sous l'hypothèse H_0 , ce qu'on note classiquement $P(E | H_0)$ et qu'on lit dans un langage abrégé : « probabilité de E sachant H_0 ». On a alors le schéma de raisonnement suivant, où δ est un nombre positif inférieur ou égal à 1 :

Si H_0 était vraie, alors l'événement E aurait une probabilité de survenir $P(E | H_0)$ inférieure ou égale à δ . Or on a observé la survenue de E . Donc on a observé la survenue d'un événement de probabilité inférieure δ .

Comme on le voit, le « raisonnement » est incomplet : on s'attendrait à une conclusion touchant la vérité ou la fausseté de H_0 ! Or ce qui manque est moins une conclusion qu'une *décision*. Supposons que l'on se soit fixé la règle d'action suivante : si la probabilité $P(E | H_0)$ est inférieure ou égale à, disons, $1/10\,000$, et si E se produit, je considérerai que ce résultat n'est pas « croyable », en ce sens que *je ne peux pas croire* que je viens de voir se produire sous mes yeux un événement si improbable ; je déciderai alors *de tenir H_0 pour fausse* – on dira que je *rejette H_0* (tout en étant conscient que je peux faire erreur : il est des événements plus rares encore qui se produisent !).

→ On peut s'excentrer de ce schéma « subjectif » *en l'objectivant*. Soit un nombre ε compris strictement entre 0 et 1, par exemple $\varepsilon = 1/100$. On a

observé la survenue d'un événement E tel que $P(E | H_0) \leq \varepsilon$; on dira alors que H_0 est rejeté au seuil ε . Si ε est grand, par exemple $\varepsilon = 0,5 = 50 \%$, on va *rejeter H_0 à tort* en bien des cas : c'est ce qu'on nomme le risque de *première espèce*. Si ε est très petit, par exemple $\varepsilon = 10^{-6}$, on va souvent *accepter H_0 à tort* : c'est le risque de *deuxième espèce*.

➔ Voici maintenant un exemple d'utilisation du test du χ^2 – une praxéologie dont on ne rendra ici claire qu'une partie. On considère une population de personnes. On suppose qu'on en a extrait au hasard un échantillon de 6800 personnes sur lesquelles on a prélevé chaque fois deux informations, la couleur de yeux, X , et la couleur des cheveux, Y . On pense que ces deux caractères *ne sont pas indépendants* – que par exemple, quand on a les cheveux blonds, on a plus souvent les yeux bleus, etc. Considérons le tableau suivant.

	Blond	Brun	Noir	Roux	Totaux
Bleu					2811
Gris-vert					3132
Brun					857
Totaux	2829	2632	1223	116	6800

On va alors formuler l'hypothèse nulle H_0 selon laquelle X et Y seraient indépendants – avec, bien sûr, l'idée que H_0 est *fausse*, et l'espoir de pouvoir *la rejeter*, même en étant exigeant, par exemple en prenant un seuil ε égal à $1/1000$. Si X et Y étaient indépendants, la distribution des différentes couleurs de cheveux parmi les personnes aux yeux bleus serait la même que dans l'échantillon tout entier : il y aurait par exemple une proportion de $\frac{2829}{6800} \approx 41,6 \%$ des enquêtés qui auraient les yeux bleus, soit exactement $\frac{2829}{6800} \times 2811$ personnes ayant les yeux bleus. On aurait pu aussi calculer la proportion de personnes ayant les cheveux blonds parmi les personnes ayant les yeux bleus. Elle devrait être la même que dans l'échantillon tout entier, soit $\frac{2811}{6800}$, en sorte que le nombre de personnes ayant à la fois les yeux bleus et les cheveux blonds serait égal à $\frac{2811}{6800} \times 2829$. On retrouve ainsi le même effectif « théorique », que l'on peut écrire ainsi : $c_{11} = \frac{2829 \times 2811}{6800} \approx 1170$. On remplit de même les autres cellules du tableau :

	Blond	Brun	Noir	Roux	Totaux
Bleu	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	2811
Gris-vert	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	3132

Brun	c ₃₁	c ₃₂	c ₃₃	c ₃₃	857
Totaux	2829	2632	1223	116	6800

Voici maintenant le tableau « empirique » formés par les effectifs *observés*.

	Blond	Brun	Noir	Roux	Totaux
Bleu	1768	807	189	47	2811
Gris-vert	946	1387	746	53	3132
Brun	115	438	1223	16	857
Totaux	2829	2632	1223	116	6800

On voit que, dans le cas des personnes à yeux bleus et cheveux blonds, ce tableau observé s'éloigne du tableau théorique : l'effectif observé (1768) est assez nettement *supérieur* à l'effectif théorique (1170). Cet écart entre tableau théorique et tableau empiriquement observé et les autres écarts (en plus ou en moins) que nous pourrions calculer sont-ils explicables par la fluctuation d'échantillonnage, qui peut expliquer de petites écarts aux effectifs théoriques ? C'est là qu'intervient le teste du χ^2 .

➔ Le χ^2 est un indicateur numérique qui évalue la *distance* ou, disons, la *dissemblance* entre les deux tableaux : si on note n_{ij} les effectifs *observés*, on a de façon générale

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(n_{ij} - c_{ij})^2}{c_{ij}}.$$

Ici, le calcul donne : $\chi^2 \approx 1075$. L'événement E évoqué plus haut est $\chi^2 \geq 1075$. Or il se trouve que la probabilité d'observer cet événement – une distance aussi grande que 1075 – sous l'hypothèse H_0 d'indépendance est *très faible*. En fait, elle est *quasi nulle*. Comment le savoir ? On peut aujourd'hui utiliser un calculateur en ligne comme celui que l'on voit utilisé ci-après (http://www.physics.csbsju.edu/stats/contingency_NROW_NCOLUMN_form.html). Voici le premier écran que l'on rencontre.

r×c Contingency Table: How many rows? columns?

You are about to enter your data for a chi-square contingency table analysis. For this to make sense you should have a table of data (at least 2x2; maximum: 9x9).

Number of rows:

Number of columns:

You must have data for each box in the table: no blanks allowed!

Le nombre de lignes (*rows*) est ici 3, le nombre de colonnes (*columns*) 4. En cliquant sur *Submit*, on voit apparaître un écran comportant une table 3×4 où l'on saisit les effectifs empiriques observés.

Data Entry: 3×4 Contingency Table

Your data have been doubly sorted into one of the 4 "treatments" (A, B, ...) and into one of the 3 "outcomes" (1, 2, ...). In the below table you are to enter the number of data items that fit into a particular (treatment,outcome) pair e.g., (B1 or A2). Enter your data in the below set of boxes and then click on the **Calculate Now** button when data entry is complete. Leave no empty boxes! All entries should be whole numbers!

	A	B	C	D
1	1768	807	189	47
2	946	1387	746	53
3	115	438	288	16

En cliquant sur *Calculate Now*, on obtient alors ceci.

$r \times c$ Contingency Table: Results					
The results of a contingency table χ^2 statistical test performed at 06:34 on 21-MAR-2008					
data: contingency table					
	A	B	C	D	
1	1768	807	189	47	2811
2	946	1387	746	53	3132
3	115	438	288	16	857
	2829	2632	1223	116	6800
expected: contingency table					
	A	B	C	D	
1	1.169E+03	1.088E+03	506.	48.0	
2	1.303E+03	1.212E+03	563.	53.4	
3	357.	332.	154.	14.6	
chi-square = 0.107E+04					
degrees of freedom = 6					
probability = 0.000					

Le logiciel a calculé 1. les effectifs marginaux, 2. les effectifs théoriques, 3. la valeur de χ^2 , 4. le nombre de degrés de liberté (*degrees of freedom*, notion sur laquelle on reviendra : ce nombre vaut ici $(3 - 1)(4 - 1) = 6$), 5. La probabilité de l'événement $\chi^2 \geq 0,107 \cdot 10^4$, qu'il trouve égale à 0,000. Dans cette situation, on ne peut guère que *rejeter* l'hypothèse d'indépendance entre les caractères X et Y . On est ici, en vérité, dans un cas qui illustre cette remarque de l'auteur des *Méthodes d'analyse d'enquêtes* : « On se souviendra que le khi-deux étant sensible aux effectifs, dès qu'une

population d'enquêtés devient importante, il devient rare que le khi-deux d'un tableau croisé ne soit pas significatif. » De fait, à l'aide du calculateur disponible à l'adresse <http://www.fourmilab.ch/rpkp/experiments/analysis/chiCalc.html>, on obtient par exemple ceci.

Calculate X^2 from probability Q and d

To determine the chi-square value indicating a probability Q of non-chance occurrence for an experiment with d degrees of freedom, enter Q and d in the boxes below and press **Calculate**.

Given probability Q = and d =

The X^2 value is:

Autrement dit, pour que la différence entre les deux tableaux – théorique et observé – soit significative au seuil de 1 %, il suffit que χ^2 atteigne ou dépasse la valeur 16,8118. Voici un tableau de valeurs que l'on obtient avec le même calculateur (pour 6 degrés de liberté).

Prob. $\leq$...	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
$\chi^2 \geq$...	16,8118	22.4577	27.8563	33.1070	38.2583	43.3292	48.1824	51.6164

Observer un χ^2 de plus de 52 est, sous l'hypothèse d'indépendance de X et Y , un événement dont la probabilité est déjà inférieure à *un milliardième* ; observer un χ^2 de plus 1070 a donc une probabilité infinitésimale.

Fin de l'annexe au journal de la séance 8