

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

→ Séance 5 – Vendredi 19 mars 2010

CONSIDÉRATIONS NON INACTUELLES 1

1. Les mathématiciens non didacticiens et la noosphère

a) J'ai défini autrefois la *noosphère* de l'enseignement des mathématiques comme la sphère où l'on « pense » sur l'enseignement des mathématiques. Cette sphère est métissée, hétérogène ; et c'est bien en ce point que surgit la difficulté dont je voudrais vous entretenir. La noosphère a été longtemps peuplée presque uniquement de personnes qui se reconnaissaient quelque titre à y intervenir du fait d'une position première jugée par elles *en surplomb* par rapport à quelque aspect de l'enseignement des mathématiques – de personnes qui, sur tel ou tel de ces aspects, pensaient en savoir plus,

pensaient savoir mieux, d'une science infuse n'appartenant qu'à elles. Le cas fondamental et pérenne est bien évidemment celui de mathématiciens « savants », petits ou grands, qui, lorsqu'ils entrent dans la noosphère, se situent spontanément en *surplomb mathématique* par rapport aux « simples » professeurs de l'enseignement secondaire, à qui ils se proposent d'apporter leur parrainage, les éclairant, les instruisant, les guidant, les aidant de leur mieux quant à la « chose mathématique ». Même si, à un moment donné, les mathématiciens qui proposent ainsi leurs services ne constituent qu'une minuscule minorité dans leur communauté d'origine, ils constituent aussi, dans la noosphère elle-même, une minorité bruyante, qui prétend dans le même temps ne pas être interrogée sur ses titres à intervenir ainsi, tout en venant occuper ostensiblement des positions de pouvoir au sein de la noosphère, comme si cela était, au fond, naturel. On sait que des reclassements – profitables au plan symbolique au moins – accompagnent généralement cette occupation : tel qui, *en mathématiques*, est en vérité un simple cheveu-léger, ici se voudra roi – au vrai, roitelet – *en enseignement des mathématiques*, du seul fait de ses titres « mathématiques » ; et ainsi de suite.

b) Ce jeu traditionnel est plus ou moins vigoureux selon les époques. Il dépend ainsi du nombre des « vocations » mathématiciennes à accourir auprès du pauvre monde de l'enseignement secondaire, ce nombre dépendant lui-même de bien des facteurs. Pourquoi un honnête travailleur de la chose mathématique se mue-t-il tout à coup en bienfaiteur présomptif de la chose enseignante – au secondaire s'entend ; car, au supérieur, il n'en a guère le loisir (on ne surplombe pas ses pairs présumés) ? Pourquoi voit-on tel mathématicien de bonne facture faire brusquement don de sa personne et de ses lumières à l'enseignement secondaire des mathématiques ? C'est là une question à étudier, car elle touche à la dynamique des conditions et des contraintes gouvernant la diffusion des connaissances mathématiques. On voit ici, au passage, que, pour la didactique des mathématiques, l'étude de la trajectoire de monsieur Machin ou de madame Truc au sein de la noosphère est un objet d'étude parfaitement légitime et même, en certains cas, indispensable. Mais je n'irai pas plus loin là-dessus aujourd'hui.

2. Une bien étrange noosphère

a) Dans le schéma précédent, l'enseignement des mathématiques apparaît comme répondant – de façon plus ou moins déformée, certes – à l'action éclairée de ces évergètes que seraient les mathématiciens noosphériens. (Le grec εὐεργετέω signifie « je fais du bien » ; sur l'évergétisme, voir l'article de ce nom dans *Wikipédia*.) Qu'il en soit ainsi suppose pourtant des conditions tout à fait remarquables, que je voudrais souligner.

b) Le schéma noosphérique « moderne » régissant les principaux systèmes présents dans la vie de nos sociétés est en effet tout différent. Si l'on considère le système de *santé*, par exemple, sa noosphère, qui organise son développement, comporte certes quelques « bienfaisants » et autres évergètes, personnes et associations ; mais elle comporte surtout, elle comporte *d'abord* cette composante essentielle de la vie des sociétés contemporaines qu'est la *recherche* (ici, en matière de santé) ; et l'évergétisme populaire – dont le Téléthon est emblématique – est lui-même centré sur l'aide financière à *la recherche*. Au cœur du système de santé, il y a donc la recherche médicale, qui est la clé des progrès de la *science* médicale et du *système de santé* lui-même. Quoi qu'en dise une certaine idéologie humaniste-populiste, lorsqu'un médecin soigne un patient, c'est *la médecine* plutôt que *le médecin* qui opère. Vous connaissez ce petit apologue que j'ai évoqué bien des fois. Deux médecins sont au chevet d'un patient souffrant d'une appendicite ; l'un est un excellent praticien ; le second est un praticien très ordinaire. Pourtant ces deux médecins, devant ce patient, ne se distinguent guère ! Si la scène se passe, disons, vers 1880, le patient a de fortes chances de mourir (de péritonite et septicémie), car la médecine du temps n'a pas encore les moyens de soigner efficacement cette pathologie. Si la scène se passe en 1980, le patient a les meilleures chances de se rétablir, car la médecine a entre temps conquis les moyens d'une action thérapeutique victorieuse. On peut recommencer : en 1980, devant un patient atteint de sida, nos deux médecins ne se distinguent toujours pas, et le patient mourra, car la médecine d'alors est impuissante devant cette pathologie. Aujourd'hui, ils ne se distinguent pas davantage : la recherche médicale a depuis lors identifié le VIH et mis au point les trithérapies, ce qui change la donne radicalement. La médecine l'emporte sur le médecin.

c) Ce qui est frappant, par contraste, c'est que, en matière d'enseignement des mathématiques, nombreux sont ceux qui croient – je pense notamment à nos évergètes – que, lorsqu'un enseignant fait la classe, ce qui advient est imputable *d'abord à l'enseignant lui-même*, à son talent (ou à son manque de talent), à sa singularité personnelle même, plutôt qu'à la « science didactique » qui devrait opérer par son truchement avisé. Sauf exception, l'enseignant en personne ne pense pas autrement : il se vit seul face au problème didactique qu'il affronte, sans attendre de secours d'une science didactique dont le message ne lui parvient guère, étouffé qu'il est par les émanations idéologiques de la noosphère. Un corrélat de cette « théorie » préscientifique de l'enseignant est le suivant : toute analyse didactique incluant l'enseignant (ou, *a fortiori*, tel membre de la noosphère) est vue comme une « critique » (au sens ordinaire du mot) et, s'agissant de l'enseignant, puisque celui-ci est tout, se trouve regardée de façon acritique

comme une critique *de l'enseignant*, ce que les évergètes compassionnels ne supportent pas. (Je note en passant qu'il est aussi, mais en bien moins grand nombre, des évergètes imprécateurs dont les fulminations à l'endroit des enseignants confirment autrement que l'enseignant serait, en dernière instance, cause de tout.)

d) Bien entendu, ce contraste est ubiquitaire. En dépit de la montée en puissance de la science didactique, la noosphère est encore largement occupée par un *establishment* de non-chercheurs qui prétendent y tenir le haut du pavé, pensent majoritairement que la recherche en matière d'enseignement des mathématiques est au mieux un adjuvant improbable de leur magistère, dont il est très généralement possible de se passer entièrement, une minorité ultra disant même sans détour son *hostilité* à la recherche en cette matière, et donc aux didacticiens des mathématiques, et à quelques-uns d'entre eux tout particulièrement.

e) Or depuis les années 1970 environ, la recherche sur l'enseignement des mathématiques a décollé, grâce à quelques pionniers dont Guy Brousseau est la figure superlative. La petite troupe des didacticiens que ces pionniers ont levée a longtemps fait sien cet habitat que furent pour elle les IREM. Bien entendu, la niche (au sens de l'écologie) à y occuper fut plus difficile à trouver. Dès le début, les conflits avec les évergètes, grands ou petits, ont fleuri : dans un IREM, il pouvait y avoir un groupe « Géométrie », un groupe « Analyse » et... un groupe « Didactique » où l'on travaillait sur l'enseignement de la géométrie et/ou de l'analyse ! Un monde d'amateurs tendres ou endurcis mais sûrs de leur légitimité côtoyaient sans aménité un champ encore étroit, mais en voie de professionnalisation, celui de « la didactique ». Or, à travers des hauts et des bas, le renouvellement des cadres de l'évergétisme irémique semble devoir reconduire indéfiniment cette situation, à ceci près que l'essentiel des forces de la recherche a maintenant trouvé d'autres habitats, loin des IREM. En fait, nous sommes saturés d'indices de ce que, pour les bienfaisants, la recherche *n'existe pas*, n'a pas à exister, même si les plus libéraux d'entre eux lui reconnaissent un *droit restreint* à une existence étroitement contenue.

3. Une épistémologie rétrograde

a) Comment l'évidence de la nécessité de la recherche en matière d'enseignement des mathématiques peut-elle être ainsi étouffée ? C'est là en vérité une grande question. Il y a quelque temps – c'était avant le congrès de Sant Hilari Sacalm –, Marianna Bosch m'a demandé comment j'expliquerais ce fait qu'elle avait cru pouvoir constater au contact de chercheurs anglo-saxons (ou d'inspiration anglo-saxonne) en *mathematics education* : pour

ceux-là, disait-elle, la notion de *phénomène* didactique semble n'avoir pas de sens. Dans le cadre de mon exposé de clôture du congrès, j'ai esquissé une réponse à la question soulevée par Marianna ; je la reprends ici, en lui laissant la structure qu'elle avait alors (celle de ce que j'appelle un « PseudoPowerPoint »).

Inachèvements : le cas de la théorie

L'un des principes *théoriques* (au sens de la TAD) qui se trouvent au cœur de la vision commune du didactique est que l'étude des faits didactiques ne relèverait pas d'une *théorie* au sens des sciences, qui vise à décrire, expliquer, comprendre le réel.

Le cas de la théorie (1)

La théorie dominante du didactique énonce en effet que le réel à étudier est *l'effet de nos actions*.

Selon cette théorie, il n'y a pas de *phénomènes* didactiques, ayant leurs *lois propres*, mais de simples *effets* de nos *interventions*, etc.

Le cas de la théorie (2)

À l'instar de ce qui se passe en médecine [*evidence-based medecine*], cette épistémologie des effets s'affirme ainsi dans l'essor actuel de l'*evidence-based education* (EBE), qui a pour principe "that educational policy and practice should be guided by the best evidence about what works".

Le cas de la théorie (3)

Dans les sciences humaines et sociales, plus largement, cette évolution a pour emblème la structure IMRAD imposée aux articles scientifiques – *Introduction, Materials and methods, Results And Discussion* – d'où le *cadre théorique* du travail exposé est absent.

Le cas de la théorie (4)

La TAD prend position, non bien sûr contre les *empirical studies* de l'EBE, mais contre *l'oubli des phénomènes et des lois didactiques*, qui tend à *réduire* la didactique à l'étude de l'empirie *sans médiation théorique*.

b) Selon l'épistémologie des évergètes, ce qui advient est le fruit de l'action humaine. Par exemple, il n'y a pas de lois propres du fonctionnement des systèmes didactiques, il n'y a pas de lois propres non plus de ses environnements. Il n'y a que les effets des comportements des acteurs humains, professeurs, élèves, parents, etc. C'est, toute proportion gardée, comme si les fourmis expliquaient ce qui se passe dans leur monde de fourmis par l'action des fourmis et uniquement par cela ! Selon une telle épistémologie, on n'a pas à connaître ce qui n'a pas d'existence ou ce dont l'existence compte pour du beurre : disons, *les lois de l'écologie du didactique*. Ce que les évergètes s'emploient à faire, c'est prodiguer des conseils, voire des injonctions aux acteurs sur les « bons » comportements à adopter ; c'est, dès lors qu'ils en ont le pouvoir – de droit ou de fait –,

prendre des décisions visant à définir une orthopraxie dont ils n'étudient pas les conditions de viabilité – absence qui conduit inévitablement à un fiasco. À la place de la recherche, c'est une administration, un management qui s'imposent : les non-chercheurs se font managers. *I shall now continue in English for a very short while.*

c) *The world seems straightforward to benefactors: they assume to know what it is best to do; they voice it, and then wait for those concerned to act accordingly. Admittedly, this requires some work, just as all management does. And it does stir up some trouble, because actors often disregard advice and heedlessly ignore the benefactor's demand. Such is indeed the benefactor's plight.*

d) *Let us now switch back to French.* Nous avons donc deux épistémologies qui s'entrechoquent : une épistémologie qu'on peut dire *préscientifique* (même si ses « porteurs » sont d'éminents scientifiques, mais cela à propos d'un autre domaine de réalité), ce qu'on peut appeler une épistémologie *managériale* ; et une épistémologie *scientifique*, où la science et la recherche qu'elle suppose sont les conditions cardinales de l'évolution des systèmes considérés. Le grand problème est évidemment de faire que ces deux épistémologies dialoguent sans s'ostraciser, ce qui suppose d'abord qu'elles *se reconnaissent* l'une l'autre. La chose ne va pas de soi. D'un côté, j'ai toujours critiqué la « tentation académique » de la didactique, celle exactement à laquelle ont succombé, pour leur malheur, il y a longtemps déjà, les sciences de l'éducation : avoir des laboratoires, des postes, des formations doctorales, des maîtres de conférences, des professeurs, bref, tout l'appareil universitaire utile en effet pour simplement exister, mais qui ne saurait par lui-même *faire exister et se développer* un champ scientifique, et conduit souvent à y faire venir à profusion les fleurs mauvaises du formalisme rhétorique, méthodologique, théorique, etc. ; bref, tout ce qui signe l'épuisement d'un champ universitaire. D'un autre côté, les évergètes mathématiciens, je l'ai suggéré, semblent prisonniers de l'idée indurée, non pas seulement de leur supériorité native, mais de l'unicité de la voie à suivre – celle qu'ils ambitionnent indéfiniment d'ouvrir. Le problème est posé et, sans doute, restera sans solution encore quelque temps. *But enough with it!*

LES MATHÉMATIQUES ET NOUS

1. Quelles mathématiques ?

a) Je voudrais rappeler ici ce que j'ai appelé les problématiques *primordiale* et *interventionniste*, qui, on s'en souvient, sont duales l'une de l'autre. La

première se définit ainsi (je reproduis la formulation que adoptée dans le séminaire de l'an dernier) :

Étant donné un projet d'activité dans lequel telle institution ou telle personne envisage de s'engager, quel est, pour cette institution ou cette personne, l'équipement praxéologique qui peut être jugé indispensable ou simplement utile dans la conception et l'accomplissement de ce projet ?

Alors que la problématique *primordiale* conduit à explorer l'ensemble

$$\{ \wp / \mathfrak{I}(\wp, \Pi, U) \},$$

la problématique *interventionniste*, elle, appelle l'étude de l'ensemble

$$\{ \Pi / \mathfrak{I}(\wp, \Pi, U) \}.$$

Dans le premier cas, pour une instance U – personne ou institution – qui souhaite s'engager dans la conception et la réalisation d'un projet Π , on se demande quelles sont les praxéologies $\wp$ utiles ou indispensables ($\mathfrak{I}$). Dans le second, on se demande à quels projets Π formé par une instance U , la praxéologie $\wp$ apparaît utile, voire indispensable.

b) La question plus particulière que je voudrais soulever ici est celle-ci : pour qui projette de faire de la recherche en didactique *des mathématiques*, quelles sont les praxéologies *mathématiques* utiles ou indispensables ? La question relève de la problématique *primordiale* en didactique. Il s'agit donc d'une *question de didactique*, et, puisque apparemment celle-ci est aujourd'hui ouverte, il s'agit d'une question de *recherche* en didactique : elle ne saurait être réglée sur un coin de table par des non-chercheurs à la science infuse. Cette question s'est en vérité posée de façon on ne peut plus concrète récemment, au cours des travaux de conception d'un parcours « Didactique des mathématiques » dans un master de mathématiques. Plus exactement, cette question vient en réaction à une interpellation par des mathématiciens soucieux que le parcours en cause soit mathématiquement appareillé d'une façon qui leur paraisse convenable – mais chacun sait que ce qui apparaît convenable souvent ne convient pas. Bien entendu, il s'agit là d'une attitude qui procède typiquement d'une position de surplomb supposé par rapport à la didactique : nul n'aurait songé à demander aux artisans d'un parcours « Probabilités et statistique » de donner des gages quant au contenu mathématique de ce parcours – une autonomie leur étant à cet égard depuis assez longtemps reconnue. Que, dans un master de mathématiques, un « contrôle de mathématicité » s'exerce sur les différentes spécialités du master et leurs parcours respectifs n'est pas chose anormale, certes, même s'il est vrai que, ici, la rusticité de l'interpellation choque – mais je ne m'étendrai pas davantage là-dessus.

c) Ce qui est vrai, d'abord, c'est qu'il s'agit de former ce que nous pouvons appeler des mathématiciens *didacticiens* – comme on pourrait parler de mathématiciens *statisticiens* –, qui seront titulaires d'un master de mathématiques. Comme il s'agit là d'une variété de mathématiciens aujourd'hui mal reconnue, il n'est pas anormal, je le répète, que des mathématiciens non didacticiens se questionnent et nous questionnent – il est vrai sans délicatesse. Si elle l'est, je l'ai dit, dans son principe, dans quelle mesure et de quelles façons une telle interpellation est-elle recevable ? Je voudrais d'abord énoncer ce que je regarde comme une règle d'or ici comme ailleurs : dans les mathématiques étudiées par les étudiants suivant le parcours DDM, doivent figurer ces mathématiques jugées indispensables par les chercheurs en didactique des mathématiques pour « faire de la didactique des mathématiques » – à ce niveau du cursus des études mathématiques, bien entendu. Il s'agit là d'une règle d'or *universelle* : on pourrait dire de même, je suppose, que, dans les mathématiques étudiées par les étudiants suivant le parcours « Probabilités et statistique », doivent figurer ces mathématiques jugées – à ce niveau du cursus des études mathématiques – indispensables par les chercheurs en probabilités et statistique pour « faire des probabilités ou de la statistique ». En d'autres termes, il faut s'opposer vigoureusement à l'imposition franche ou subreptice de contenus mathématiques *non motivés* qui évinceraient de fait des contenus jugés indispensables par les chercheurs du domaine pour que le parcours porte valablement son titre, celui de « Didactique des mathématiques ».

d) Pour avancer, je voudrais introduire une notion très simple. Dans un domaine de recherche donné, on utilise des connaissances diverses ; en particulier, on peut y utiliser des connaissances mathématiques : je parlerai à leur égard de connaissances mathématiques *manipulées* dans ce domaine. Cela précisé, notons que, dans un domaine mathématique « classique », on manipule des mathématiques pour *produire* des mathématiques ; en didactique des mathématiques, on manipule des mathématiques aussi, mais pour produire des connaissances sur la *diffusion* – scolaire ou non – de connaissances mathématiques : c'est pour cette raison d'abord que la didactique des mathématiques participe à nos yeux du continent des mathématiques. Il semble en vérité que le critère de mathématicité que des mathématiciens souhaitent faire jouer ne s'applique pas tant aux connaissances *produites* qu'aux connaissances *manipulées* pour les produire (et, en second lieu, aux *types de manipulation* mis en jeu). C'est donc sur ces « mathématiques manipulées » par les didacticiens des mathématiques que nous devons nous arrêter : si celles-ci sont pour l'essentiel rudimentaires, ou si leur manipulation est excessivement sommaire, la didactique des mathématiques ne peut, à ce titre, réclamer de place dans le monde à accès

très contrôlé des mathématiques appliquées – même si elle conserve son ticket d'entrée du fait des connaissances qu'on y *produit*, qui concernent des connaissances mathématiques, même si ces connaissances produites ne sont pas regardées elles-mêmes comme des connaissances mathématiques.

e) Les connaissances mathématiques utiles ou indispensables dans la recherche en didactique des mathématiques sont ces connaissances que l'on y manipule *et que l'on y manipulera* : il s'agit, là comme ailleurs, d'un ensemble praxéologique à la fois *flou* et *évolutif*, dont certains éléments pourront être frappés d'obsolescence demain, tandis que d'autres y apparaîtront nouvellement. J'ai indiqué, lors de la séance 4 de ce séminaire, quelques lignes directrices que je reprends ici.

Qu'en est-il pour le chercheur en didactique ? Sans doute peut-on envisager ici une autre tripartition : il y a les praxéologies *pour la profession* didacticienne (incluant *entre autres* des praxéologies linguistiques par exemple), ensuite les praxéologies ou plus généralement les œuvres dont la diffusion est l'objet de la recherche didactique (et que les praxéologies pour la profession doivent permettre d'identifier), enfin les praxéologies *pour la recherche* en matière de diffusion des praxéologies et des œuvres (la catégorie des œuvres incluant à la fois la catégorie des praxéologies et la catégorie des questions, que j'ai distinguées plus haut s'agissant des professeurs). Il y a là un chantier sur lequel je ferai quelques pas maintenant, après avoir une fois de plus souligné ceci : l'équipement praxéologique adéquat du didacticien étudiant la diffusion en telle ou telle institution de tel ou tel complexe praxéologique $\wp$ n'a pas à être imposé par quelque institution que ce soit, mais doit être construite – entre conflit et consensus – par l'institution didacticienne elle-même : c'est là un des grands problèmes « de la profession » – sans que cela limite pour autant la liberté de pensée et d'action du chercheur.

Il y aurait donc les praxéologies mathématiques dont la diffusion est l'objet de la recherche didactique considérée, les praxéologies mathématiques utiles à la recherche sur la diffusion de ces praxéologies mathématiques, enfin les praxéologies mathématiques « pour le didacticien » : c'est sur celles-là que je m'arrêterai d'abord dans ce qui suit.

2. Les mathématiques pour le didacticien des mathématiques

a) L'idée des « mathématiques pour le didacticien des mathématiques » n'est sans doute pas éloignée de l'idée d'une *culture commune en mathématiques* de la communauté des didacticiens des mathématiques. Vous voyez que cette notion peut être doublement généralisée : étant donné un complexe

praxéologique $\wp$, relevant de telle discipline $\check{D}$, on parlera des connaissances de $\check{D}$ « pour le didacticien de $\wp$ » ; et on parlera de même des connaissances en telle autre discipline $\check{D}_1 (\neq \check{D})$ pour le didacticien de $\wp$. (Un exemple considéré la dernière fois était le cas où $\check{D}$ est la discipline mathématique et où $\check{D}_1$ est l'*anglais*.)

b) Une telle idée est classique, presque banale, bien que nous l'ayons jusqu'ici fort peu travaillée. Je l'illustrerai d'abord sur un exemple au contraire depuis longtemps labouré, au moins depuis Gaspard Riche de Prony (1755-1839), celui des mathématiques *pour l'ingénieur*. Voici pour illustrer cela la table des matières d'un ouvrage de quelque trois cents pages signé de Daniel Fredon et Michel Bridier et intitulé *Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur. Aide-mémoire* (Dunod, 2003).

Partie 1

Analyse

1. Intégration 2
2. Fonctions spéciales 11
3. Approximation de la forme d'une fonction 25
4. Champs scalaires ; champs de vecteurs 29
5. Intégrales multiples 38
6. Intégrales curvilignes 47
7. Intégrales de surface 52
8. Équations aux différences finies 56
9. Suites et séries de fonctions 62
10. Séries entières 68
11. Fonctions d'une variable complexe 76
12. Espaces fonctionnels 89
13. Polynômes orthogonaux 98
14. Séries de Fourier 104
15. Équations aux dérivées partielles 114
16. Distributions 127
17. Convolution 138
18. Transformation de Laplace 144
19. Transformation de Fourier 153
20. transformations discrètes 163
21. Ondelettes 171
22. Calcul des variations 175

Partie 2

Géométrie

23. Courbes 184
24. Surfaces 193
25. Volumes 202

26. Géométrie fractale 209

Partie 3

Probabilités et statistiques

27. Calcul des probabilités 218

28. Variables aléatoires 227

29. Lois usuelles 239

30. Convergences 254

31. Processus aléatoires 261

32. Estimation 268

33. Tests statistiques 276

Je crois pouvoir dire que nous ne sommes pas aujourd'hui en état de broser un semblable tableau des mathématiques « pour le didacticien ». Je complète d'abord les données précédentes par le sommaire de l'un des chapitres, le troisième, intitulé *Approximation de la forme d'une fonction* :

Courbes de Bézier

Polynômes de Bernstein

Courbes de Bézier

Courbes B-splines

Vecteur nœud

Fonctions B-splines

Courbes B-splines

Voici encore le sommaire du chapitre 21, *Ondelettes*.

Analyse temps-fréquence

Transformation de Gabor

Transformation de Wigner-Ville

Transformation en ondelettes

Transformation continue

Transformation dyadique

Ondelette de Haar

Ondelette de Morlet

Application

Voici enfin le sommaire du chapitre 25, *Volumes*.

Polyèdres réguliers

Généralités

Tétraèdre régulier

Cube

Octaèdre

- Dodécaèdre
- Icosaèdre
- Autres volumes
 - Prisme
 - Pyramide
 - Tronc de pyramide
 - Cône circulaire
 - Tronc de cône circulaire
 - Sphère
 - Calotte sphérique
 - Tore
 - Barrique

On aura noté que, dans l'ouvrage précédemment examiné, des mathématiques de type « collège » – sur les volumes par exemple – côtoient des mathématiques « postmodernes » – sur la géométrie fractale par exemple. Ce qui détermine leur présence, ce sont les *besoins* en mathématiques d'une catégorie d'utilisateurs – les ingénieurs, ici –, besoins dont la mise au jour suppose une enquête conduisant à un relevé réaliste. J'ajoute que c'est là pour moi un *critère formel d'authenticité* du fait que le choix d'œuvres mathématiques retenus répond à un critère d'utilité.

d) Voici maintenant un autre exemple, qui date davantage (l'ouvrage a été publié chez Springer-Verlag en 1988), celui du livre classique de Lars Gårding et Torbjörn Tambour, *Algebra for Computer Science* – comme vous le voyez, il ne s'agit ici que d'algèbre. La table des matières de cette « algèbre pour l'informatique » est la suivante :

Chapter 1 Number theory

1.1 Divisibility // 1.2 Congruences // 1.3 The theorems of Fermat, Euler and Wilson. // 1.4 Squares and the quadratic reciprocity theorem // 1.5 The Gaussian integers // 1.6 Algebraic numbers // 1.7 Appendix. Primitive elements and a theorem by Gauss // Literature

Chapter 2 Number theory and computing.

2.1 The cost of arithmetic operations // 2.2 Primes and factoring // 2.3 Pseudo-random numbers // Literature

Chapter 3 Abstract algebra and modules.

3.1 The four operations of arithmetic // 3.2 Modules. // 3.3 Module morphisms. Kernels and images. // 3.4 The structure of finite modules // 3.5 Appendix. Finitely generated modules. // Literature

Chapter 4 The finite Fourier transform

4.1 Characters of modules // 4.2 The finite Fourier transform // 4.3 The finite Fourier transform and the quadratic reciprocity law // 4.4 The fast Fourier transform // Literature

Chapter 5 Rings and fields

5.1 Definitions and simple examples // 5.2 Modules over a ring. Ideals and morphisms // 5.3 Abstract linear algebra // Literature

Chapter 6 Algebraic complexity theory

6.1 Polynomial rings in several variables // 6.2 Complexity with respect to multiplication. // 6.3 Appendix. The fast Fourier transform is optimal // Literature

Chapter 7 Polynomial rings, algebraic fields, finite fields.

7.1 Divisibility in a polynomial ring // 7.2 Algebraic numbers and algebraic fields. // 7.3 Finite fields. // Literature

Chapter 8 Shift registers and coding

8.1 The theory of shift registers // 8.2 Generalities about coding // 8.3 Cyclic codes // 8.4 The BCH codes and the Reed-Solomon codes. // 8.5 Restrictions for error-correcting codes. // Literature

Chapter 9 Groups

9.1 General theory / 9.1.1 Groups and subgroups / 9.1.2 Groups of bijections and normal subgroups / 9.1.3 Groups acting on sets // 9.2 Finite groups / 9.2.1 Counting elements / 9.2.2 Symmetry groups and the dihedral groups / 9.2.3 The symmetric and alternating groups / 9.2.4 Groups of low order / 9.2.5 Applications of group theory to combinatorics // Literature

Chapter 10 Boolean algebra

10.1 Boolean algebras and rings // 10.2 Finite Boolean algebras // 10.3 Equivalence classes of switching functions // Literature

Chapter 11 Monoids, automata, languages

11.1 Matrices with elements in a non-commutative algebra // 11.2 Monoids and languages // 11.3 Automata and rational languages // 11.4 Every rational language is accepted by a finite automaton // Literature

Comme c'était déjà le cas avec l'ouvrage précédent, on notera que se côtoient ici des éléments « bien connus » dans le *folklore* mathématique et des élaborations plus évidemment spécifiques, telle la *theory of shift registers*, la « théorie des registres à décalage ». On tient là un deuxième *critère formel d'authenticité* du choix des œuvres mathématiques : si l'ensemble du panorama proposé apparaît familier d'un point de vue déjà existant sur le continent mathématique, on peut douter du fait que les besoins du domaine considéré soient véritablement pris en charge.

e) Le contraste est fort entre les deux tableaux précédents et celui que propose un ouvrage « généraliste » tel l'*Atlas des mathématiques*, dans son édition française parue en 1997 (Librairie Générale Française). J'en

reproduis non pas la table des matières mais la bibliographie placée en tête d'ouvrage :

1. Généralités

Abrégé d'Histoire des Mathématiques, J. Dieudonné, HER, 1978.
Dictionnaire des mathématiques, A. Bouvier, M. George, F. Le Lionnais, PUF, 1993.
Fondement des mathématiques, M. Combes, PUF, 1971.
Les Mathématiciens de A à Z, B. Hauchecorne, D. Surrateau, ELL, 1996.
Histoire des Mathématiques, J.-P. Colette, VUI, 1979.
Vie et Œuvre des grands mathématiciens, J.-L. Audirac, MAG, 1990.

2. Logique mathématique, théorie des ensembles

Logique mathématique, R. Cori, D. Lascar, MAS, 1994.
Logique et fondement de l'informatique, R. Lassaigne, M. de Rougemont, HER, 1993.
Éléments de logique mathématique, G. Kreisel, J.-L. Krivine, DUN, 1967.
Théorie axiomatique des ensembles, J.-P. Krivine, PUF, 1972.

3. Relations et structures

Cours d'algèbre, R. Godement, HER, 1969.
Arithmétique et théorie des nombres, J. Itard, PUF, 1963.
Leçons d'algèbre moderne, P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, DUN, 1961.
Structures algébriques finies, A. Warusfel, HAC, 1971.

4. Algèbre

Algèbre générale, B. Charles, D. Allouch, PUF, 1984.
Algèbre, S. Mac-Lane, C. Birkoff, GAU, 1970 (2 tomes).
Leçons d'algèbre moderne, P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, DUN, 1961.
Structures algébriques finies, A. Warusfel, HAC, 1971.
Cours d'algèbre, R. Godement, HER, 1969.
Algèbre commutative, J.-P. Lafon, HER.
Sur les groupes classiques, J. Dieudonné, HER.
Algèbre, Bourbaki, HER.
Algèbre générale, E. Artin, GAU, 1972.
Arithmétique et algèbre moderne, A. Chatelet, PUF, 1966 (3 tomes).
Formes quadratiques et groupes classiques, R. Deheuvels, PUF, 1981.
Algèbre commutative, M.-P. Malliavin, MAS, 1985.
Algèbre linéaire et géométrie classique, J.-E. et M.-J. Bertin, MAS, 1981.
Théorie des groupes et de leurs représentations, A. Guichardet, ELL.

5. Les nombres

Éléments de théorie des nombres, R. Descombes, PUF, 1986.
Cours d'arithmétique, J.-P. Serre, PUF, 1970.
Théorie algébrique des nombres, P. Samuel, HER, 1967.
Théorie des nombres, Z.-I. Borevitch, I.-R. Chafarevitch, GAU, 1967.
Les Nombres premiers, J. Itard, PUF, 1969.

6. Géométrie, Géométrie analytique

Méthodes modernes en géométrie, J. Fresnel, HER.
Mathématiques, cours et exercices, algèbre et géométrie, P. Sauser, ELL, 1983.
Géométrie, M. Berger, FEN, 1977 (5 tomes).
Géométrie projective, P. Samuel, PUF, 1986.
Groupes, algèbres et géométries, J.-M. Arnaudies, J. Bertin, ELL (2 tomes).
Géométrie affine, projective et euclidienne, C. Tisseron, HER.
Groupes et géométries, B. Sénéchal, HER.
Géométrie analytique, J. Françoise, PUF, 1995.
Géométrie, M. Carral, ELL, 1995.
L'Enseignement de la géométrie, G. Choquet, HER, 1964.

7. Topologie

Cours d'analyse, Topologie, G. Choquet, MAS, 1964.
Topologie générale, Bourbaki, HER.
Topologie générale, J. Dixmier, PUF, 1981.
Éléments d'analyse, J. Dieudonné, GAU (4 tomes).
La Topologie, A. Delachet, PUF, 1978.

8. Topologie algébrique

Topologie des surfaces, A. Gramain, PUF, 1971.
Géométrie et topologie des surfaces, D. Lehmann, C. Sacré, PUF.
Topologie algébrique élémentaire, M. Zisman, ACO, 1972.

9. Théorie des graphes

Théorie des graphes et ses applications, C. Berge, DUN.
Graphes et programmation linéaire, M. Sakarovitch, HER.
Des points et des flèches... la théorie des graphes, A. Kaufmann, DUN, 1968.

10. Analyse réelle

Suites et séries, J. Combes, PUF, 1982.
Cours d'analyse, G. Valiron, MAS, 1950 (2 tomes).
Analyse réelle, S. Lang, INT, 1977.
Cours d'analyse, L. Schwartz, HER (4 tomes).
Compléments d'analyse, J. Avignan, E. Azouley, MCG, 1990.
Cours de mathématiques, tomes 2 et 3, J.-M. Amaudies, H. Fraysse, DUN.
Cours de mathématiques spéciales, tome 2, B. Gostiaux, PUF, 1993.

11. Calcul différentiel

Cours de calcul différentiel, H. Cartan, HER.
Calcul infinitésimal, J. Dieudonné, HER.
Fondements du calcul différentiel, P. Ver Eecke, PUF, 1983.
Applications du calcul différentiel, P. Ver Eecke, PUF, 1985.
Calcul différentiel, A. Avez, MAS, 1995.
Équations différentielles, J. Geoffroy, PUF, 1983.
Mathématiques pour l'informatique, tome 2, équations différentielles, N. Gastinel, ACO, 1970.

12. Géométrie différentielle

Géométrie différentielle, M. Berger, B. Gostiaux, ACO.
Calcul différentiel et géométrie, D. Leborgne, PUF, 1982.
Géométrie différentielle, J. Lelong-Ferrand, MAS, 1963.
Géométrie différentielle intrinsèque, P. Malliavin, HER, 1972.

13. Tenseurs

Les Tenseurs, L. Schwartz, HER.
Éléments de calcul tensoriel, A. Lichnérowicz, ACO.

14. Théorie des fonctions

Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, H. Cartan, HER.
Calcul différentiel complexe, D. Leborgne, PUF, 1982.
Les Fonctions analytiques, M. Hervé, PUF, 1982.

15. Calcul intégral

L'Intégrale, P. Deheuvels, PUF, 1980.
Intégration, R. Descombes, HER.
Intégration, analyse hilbertienne, A Guichardet, ELL.
Intégration, A. Gramain, HER.
Intégrale de Lebesgue, Mesure et Intégration, M. Bouyssel, CEP, Toulouse.
Leçons sur l'intégration, H. Lebesgue, GAU, 1950.

16. Analyse fonctionnelle

Analyse fonctionnelle, théorie et applications, H. Brézis, MAS, 1992.
Mathématiques pour l'informatique, tome 1, analyse fonctionnelle, J.-P. Bertrandias, ACO, 1970.
Analyse fonctionnelle appliquée, J.-P. Aubin, PUF, 1970.
Analyse fonctionnelle, W. Rudin, EDI, 1995.

17. Analyse combinatoire

Analyse combinatoire, L. Comte, PUF (2 tomes).
Mathématiques combinatoires, H.-J. Ryser, DUN, 1969.
Principes de combinatoire, C. Berge, DUN, 1960.

18. Calcul des probabilités et statistiques

Probabilités et statistiques, D. Dacunha-Castelle, M. Duflo, MAS, 1993.
Notions fondamentales de la théorie des probabilités, M. Métivier, DUN, 1968.
Calcul des probabilités, A. Tortrat, MAS.
Éléments de calcul des probabilités, J. Bass, MAS, 1962.
La probabilité, le hasard, la certitude, P. Deheuvels, PUF.
Principes de statistique mathématique, A. Tortrat, « Monographies » DUN, 1961.

19. Optimisation linéaire

La Programmation linéaire par l'exemple, Driesbeke, ELL.
Programmation linéaire, Teghem, ELL.
Des points et des flèches... la théorie des graphes, A. Kaufmann, DUN, 1968.

20. Suppléments

Les Objets fractals, B. Mandelbrot, FLA, 1989.
Algèbre linéaire et applications, H. Mascart, M. Stoka, PUF, 1985.

Analyse de Fourier et applications, R. Dalmasso, C. Gasquet, P. Witombski, MAS, 1990.

Mesure, intégration, convolution et analyse de Fourier, Vo Khac, ELL.

Transformation de Fourier, M. Hervé, PUF, 1986.

Théorie des distributions, L. Schwartz, HER.

Distributions et équations aux dérivées partielles, C. Zuily, HER.

Géométrie différentielle et mécanique, C. Godbillon, HER.

Formes différentielles, H. Cartan, HER.

Groupes de Lie, G. Pichon, HER.

Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, R. Mneimné, F. Testard, HER.

Non Linear Analysis on Manifolds Monge-Ampère Equation, T. Aubin, Grundlehren 252, Springer- Verlag, New York, 1982.

21. Cours de mathématiques

Classes préparatoires, A. Doneddu, VUI.

Classes préparatoires, J.-M. Arnaudies, H. Fraysse, DUN, 1988 (4 tomes).

Cours de mathématiques spéciales, E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, MAS, 1977 (5 tomes).

Cours de mathématiques spéciales, B. Gostiaux, PUF, 1993 (4 tomes).

Cours de mathématiques spéciales, J. Bass, MAS, 1971.

On consultera utilement les ouvrages de Bourbaki, aux Editions Hermann.

Notions fondamentales de mathématiques modernes, R. Saint-Guilhem, ELL, 1989 (2 tomes).

Algèbre et Géométrie, P. Sauser, ELL (2 tomes)

À la vue de ce panorama classique, une question vient, toujours la même : pourquoi inclurait-on telle ou telle élaboration mathématique dans les mathématiques pour le didacticien ? La réponse est évidemment celle inscrite dans le schéma herbartien : parce que cette élaboration est apparue comme un outil indispensable ou du moins utile à la recherche en didactique ; parce que, concrètement, elle a été, d'une manière ou d'une autre, « manipulée » par des chercheurs en didactique des mathématiques dans certains de leurs travaux. Bien entendu, si la question avait été posée il y a quarante ans, ces mathématiques-là n'auraient contenu que fort peu de chose ! De là que s'est imposée alors une disjonction originelle qui nous poursuit encore : faute d'assez de travaux dans son domaine, le didacticien *des mathématiques* se définissait à l'époque non pas tant par son *projet scientifique* que par un certain bagage mathématique, par son « paquetage mathématique », pour employer un mot du jargon militaire, qui, faute d'un corpus spécifique non encore défini, était celui, en gros, d'un professeur de mathématiques du secondaire en début de carrière.

3. Des mathématiques appropriées ?

a) Depuis dix, vingt, trente ans, pour faire de la recherche en didactique des mathématiques, nous avons manipulé assez de mathématiques. Mais je crois bien que nous n'avons pas, jusqu'ici, dressé d'inventaire précis de ces mathématiques-là. Le temps est sans doute venu de nous y essayer. Les mathématiques pour le didacticien, tout comme les mathématiques pour le professeur de mathématiques ou les mathématiques pour l'ingénieur, etc., doivent avoir une première vertu : elles sont ces mathématiques avec lesquelles une certaine familiarité est nécessaire pour rendre compréhensible « ce dont on parle ordinairement dans le métier ». Les mathématiques pour le didacticien des mathématiques doivent permettre à celui-ci d'identifier les mathématiques manipulées – d'une manière ou d'une autre – dans les recherches en didactique auxquelles il a accès par le biais notamment des publications dans ce domaine. Bien entendu, cela inclut les mathématiques à enseigner et *donc* les mathématiques pour le professeur de mathématiques – lesquelles permettent notamment à ce dernier d'identifier les mathématiques à enseigner. Mais, évidemment, cela dépasse ces mathématiques-là, parce que les mathématiques pour le didacticien peuvent en venir à intégrer, au fil du temps, ce qui était d'abord des mathématiques *pour la recherche en didactique* et plus précisément pour telle ou telle recherche déterminée.

b) Je voudrais *ébaucher* de cela un exemple. Les nombres sont un domaine important des mathématiques enseignées et des mathématiques à enseigner. Que doit savoir un didacticien des mathématiques à leur propos, hors de toute recherche particulière ? La liste des éléments de mathématiques serait longue et je ne me lancerai pas à la dresser ici. Bien entendu, il doit avoir étudié ce qu'on nomme la « construction » des systèmes de nombres – du système des nombres *réels* notamment – à propos duquel on peut regarder par exemple ce que Marc Rogalski, avec Aline Robert et Nicolas Pouyanne, proposent dans l'annexe 3 de leur ouvrage *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie* (Ellipses, 2001). On sait peut-être – je le note ici en passant – qu'on peut aujourd'hui obtenir un master de mathématiques sans avoir jamais étudié cette question, alors même que c'est là un élément emblématique du critère de mathématicité que tel mathématicien ami veut nous appliquer ! Cela noté, le futur mathématicien didacticien doit aussi apprendre bien d'autres choses. Voici un exemple apparu à l'occasion du travail qui devait aboutir à la thèse de doctorat de Marianna Bosch (1994). Dans le texte du savoir mathématique de l'enseignement primaire supérieur d'autrefois, la notion de *grandeurs proportionnelles* proposée était la suivante – j'emprunte la définition ci-après (qui vient après un exemple concernant le

prix du sucre) à l'ouvrage de Jules Gal et André Marijon, *Les problèmes résolus par la méthode naïve*, paru en 1929 chez Fernand Nathan, p. 25 :

Deux grandeurs liées l'une à l'autre comme le sont le poids et le prix d'une même quantité de sucre sont dites proportionnelles. La proportionnalité de deux grandeurs est caractérisée par les conditions suivantes :

Soient deux grandeurs g et G , telles que la grandeur g étant déterminée, G le sera aussi, c'est-à-dire *deux grandeurs fonction l'une de l'autre*.

Il y aura proportionnalité entre ces deux grandeurs :

1° Si g correspondant à G , g' à G' , $g=g'$ entraîne $G=G'$. En supposant que g soit le poids d'une certaine quantité de sucre, G le prix correspondant, cela veut dire que des poids égaux de sucre ont des prix égaux, ou encore qu'il s'agit de considérer toujours du sucre de même qualité.

2° Si g correspond à G , g_1 à G_1 , $g+g_1$ correspond à $G+G_1$. [...]

Des conditions 1° et 2°, il résulte que si la grandeur g est doublée, la grandeur G l'est aussi (à $g+g$ correspond $G+G$) si g est triplée ($2g+g$) G l'est aussi ($2G+G$) et ainsi de suite...

Traduisons : deux grandeurs x et $y = f(x)$ sont proportionnelles si et seulement si f est *additive*. Comme le notent Gal et Marijon, si f est additive, c'est-à-dire si $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a aussi $f(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}f(x)$ et, plus généralement, $f(rx) = rf(x)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$: tout cela est classique. Mais cette égalité demeure-t-elle vraie pour tout $r \in \mathbb{R}$? La définition « classique » des grandeurs proportionnelles manque-t-elle de rigueur sur un point qui est lui-même une difficulté classique – le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. Qu'en est-il ?

c) Deux points sont d'abord à noter. Tout d'abord, il suffit de prêter à f une certaine propriété de régularité pour pouvoir conclure positivement. Si, par exemple, f est additive et *continue en un point*, alors f est $\mathbb{R}$ -linéaire : pour qu'elle ne le soit pas, il faudrait donc que f ne soit continue en aucun point de $\mathbb{R}$! De même, s'il existe un intervalle d'intérieur non vide – si « petit » soit-il – où f est *bornée*, alors l'additivité de f implique sa $\mathbb{R}$ -linéarité : pour qu'il en aille autrement, il faudrait que f ne soit bornée sur aucun intervalle d'intérieur non vide ! Cela suffit à conclure que « l'axiomatique de l'école primaire » est *pratiquement* complète. Mais on peut aller plus loin. On démontre en effet que si f est additive et en même temps *mesurable au sens de Lebesgue*, alors f est $\mathbb{R}$ -linéaire : Marianna Bosch le démontre dans les deux dernières pages de son mémoire de master intitulé *El semiòtic i l'instrumental en el tractament clàssic de les situacions de proporcionalitat* (1991). Certaines avancées relativement récentes permettent pourtant d'aller plus profond. On a donné depuis longtemps des contre-exemples de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont à la fois additive et non $\mathbb{R}$ -linéaire. Ainsi,

dans le chapitre 4 intitulé « Nombres réels » de sa *Topologie générale*, Bourbaki propose-t-il un « exercice » (§ 6, n° 2) dans lequel on construit une fonction f additive mais pas $\mathbb{R}$ -linéaire, qui, bien entendu, s'avère être un « monstre » : pour tout $z \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(z)$ est *partout dense* dans $\mathbb{R}$. La construction en question fait appel à une « base de Hamel », c'est-à-dire à une base de $\mathbb{R}$ regardé comme espace vectoriel sur le corps de scalaires $\mathbb{Q}$ (voir l'article « Georg Hamel » de *Wikipédia*). Mais le recours à une base Hamel suppose lui-même l'appel à l'*axiome du choix*. Or, ainsi que l'a montré Robert M. Solovay (1970), si l'on travaille dans un univers où l'on renonce à l'axiome du choix « fort » (tout en conservant un axiome du choix convenable pour le travail mathématique usuel), on peut admettre sous certaines conditions (à savoir l'existence d'un « cardinal inaccessible ») que *tout ensemble de réels est mesurable au sens de Lebesgue*. Voici à ce propos le théorème que démontre Jean-Louis Krivine dans sa *Théorie des ensembles* (Cassini, 1998, p. 224) :

Théorème 17.8. *Si $ZF + AC + CI$ est non contradictoire, alors $ZF + AF + ACD +$ « toute partie de $\mathbb{R}^n$ est mesurable-Lebesgue » l'est aussi.*

ZF est l'axiomatique de Zermelo-Frænkel de la théorie des ensembles, AC est l'axiome du choix, CI est l'axiome « Il existe un cardinal inaccessible », AF est l'axiome de fondation et ACD est l'axiome du choix dépendant : sur tout cela le lecteur pourra se reporter au livre cité. Mais voici maintenant le commentaire que l'auteur fait du théorème précédent (pp. 224-225) :

Ce résultat est intéressant, car il montre que l'on peut admettre l'axiome : « toute partie de $\mathbb{R}^n$ est mesurable », tout en conservant une forme de l'axiome du choix (à savoir ACD) qui est tout à fait suffisante pour développer la théorie de la mesure de Lebesgue et, en fait, pratiquement toute l'analyse. Bien entendu, on ne peut pas conserver l'axiome du choix lui-même, puisqu'il a pour conséquence l'existence de parties non mesurables de $\mathbb{R}$...

d) La question des fonctions additives relève, de fait et *donc* de droit, des mathématiques *pour la recherche en didactique*. Faudra-t-il la compter (avec certains au moins des outils de logique et de théorie des ensembles qui permettent d'y répondre) au nombre des questions dont se nourrissent les mathématiques *pour le didacticien* ? Cette interrogation, que je laisserai ouverte, me permettra d'illustrer un point essentiel : on ne saurait en tout cas refuser la question des fonctions additives au motif qu'elle n'aurait pas suscité un intérêt semblable *ailleurs* en mathématiques. Ce qui est « mathématiques pour le didacticien » ne saurait résulter d'une simple mise en conformité avec des besoins *qui ne sont pas ceux des didacticiens*, ce qui aurait pour premier effet de nous obliger à jeter par dessus bord des

connaissances utiles, au motif de leur particularisme mathématique (ce qui est en fait le cas de toute élaboration mathématique *en ses débuts*).

4. Une différence assumée ?

a) Pour beaucoup de communautés scientifiques, les mathématiques sont un *genre prochain*. Mais la plupart d'entre elles parviennent à définir et à assumer – voire à revendiquer quand la chose paraît incontournable – leur *différence spécifique*, où se marquent leurs besoins mathématiques et la manière qui est la leur d'y répondre. À l'opposé de ce type de rapports spécifiques aux mathématiques – celui du statisticien, de l'informaticien, du topologue, etc. – existe un autre rapport auquel sont exposés tous ceux qui pensent n'avoir pas de différence propre et donne alors, de ce fait, dans ce que j'appellerai un *fréjolisme mathématique*, croyant être analystes quand ils manipulent de l'analyse, géomètres quand il s'agit de géométrie, probabiliste lorsqu'ils manient des probabilités, des informaticiens lorsqu'ils ont commerce avec des programmes, etc. Or ce que nous devons construire et assumer, c'est précisément, non pas un tel mimétisme infécond et burlesque (qui, au mieux, finira par faire ici un analyste, là un géomètre, etc.), mais un rapport didacticien aux mathématiques qui soit le moyen – non la fin – de la production de connaissances justes, pertinentes, utiles relatives à la diffusion et à la non-diffusion des connaissances mathématiques.

b) À titre d'exemple, je voudrais proposer le motif d'un petit chantier mathématique encore ouvert. Vous connaissez les exemples que j'ai utilisés pour mettre à mal certaines idées fausses sur l'usage des calculatrices dans la classe de mathématiques : si ma calculatrice affiche les mêmes chiffres pour les expressions $\alpha\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ et si a , b et c ne sont pas trop grands, alors *c'est qu'on a l'égalité* $\alpha\sqrt{b} = \sqrt{c}$. La raison de la chose peut être exprimée ainsi :

$$\alpha\sqrt{b} \neq \sqrt{c} \Rightarrow |\alpha\sqrt{b} - \sqrt{c}| = \frac{|a^2b - c|}{\alpha\sqrt{b} + \sqrt{c}} \geq \frac{1}{\alpha\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Si a , b , $c < 10^6$ (par exemple), on a $\alpha\sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 10^9$ et il vient donc :

$$\alpha\sqrt{b} \neq \sqrt{c} \Rightarrow |\alpha\sqrt{b} - \sqrt{c}| \geq 10^{-9}.$$

Or sur une calculatrice d'aujourd'hui, une différence supérieure à 10^{-9} se voit à l'affichage : si la différence entre $\alpha\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ ne se voit pas, c'est qu'il n'y en a pas ! Ma question est alors : comment généraliser ce type de résultats ?



CONSIDÉRATIONS NON INACTUELLES 2

Comme beaucoup d'entre vous le savent sans doute, j'ai appris il y a peu que le comité compétent, présidé par Mogens Niss, de la Commission internationale de l'enseignement des mathématiques – en anglais, *the International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) –, qui est une commission de l'*International Mathematical Union* (IMU), l'Union mathématique internationale, m'a décerné le *prix Hans Freudenthal 2009* – en même temps qu'il attribuait le *prix Felix Klein* à notre collègue australienne *Gilah Leder*. À cet égard, je me permets de reproduire ici, sans commentaire, l'annonce diffusée récemment par Bill Barton, président de l'ICMI.

Dear ICMI Representatives,

The ICMI Awards Committee has reached a decision concerning the 2009 Felix Klein and Hans Freudenthal Awards.

It is my very great pleasure to announce that the Klein Award goes to Gilah Leder, Australia, and the Freudenthal Award goes to Yves Chevallard, France. My warmest congratulations to Gilah and Yves for this recognition by our community of their outstanding contributions. We are delighted to celebrate your achievements.

Bill Barton

ICMI President

Chers Représentants ICMI,

Le Comité des Prix ICMI a pris une décision au sujet des prix 2009 Felix Klein et Hans Freudenthal et c'est avec un grand plaisir que je vous annonce que le Prix Felix Klein est décerné à Gilah Leder, Australie, et le Prix Hans Freudenthal à Yves Chevallard, France. Mes félicitations les plus chaleureuses à Gilah et à Yves pour cette reconnaissance par notre communauté de leurs contributions exceptionnelles. Nous sommes enchantés de célébrer vos accomplissements.

Bill Barton

ICMI Président

The citation for Gilah reads:

It is with great pleasure that the ICMI Awards Committee hereby announces that the Felix Klein Medal for 2009 is given to IAS Distinguished Professor and Professor Emerita Gilah C. Leder, La Trobe University, Bundoora, Victoria,

Australia, in recognition of her more than thirty years of sustained, consistent, and outstanding lifetime achievements in mathematics education research and development. With a background as a highly recognised secondary teacher of mathematics, Gilah Leder moved, through a number of steps, into research in mathematics education, with a particular emphasis - from the very beginning of her research career - on gender success and equity in mathematics education, but also more broadly on students' affects, attitudes, beliefs, and self-concepts in relation to mathematics education, at educational levels ranging from school to university. To a very high degree her work has contributed to shaping these areas and made a seminal impact on all subsequent research. Moreover, Gilah Leder has done significant work with regard to assessment in mathematics education, mathematically able students, research methodology, supervision of graduate students, and teacher education. A characteristic feature of Gilah Leder's work - published in almost two hundred scholarly publications - is its application of perspectives and theories from sociology and psychology along with mathematical perspectives.

Gilah Leder's achievements include a remarkable amount of work for national, regional, and international mathematics education communities in a leadership role, as well as a committee or board member, an editorial board member for several journals and book series, as a mentor and supervisor of graduate students, as a visiting scholar in several countries, and as an invited key note speaker at numerous conferences in all continents.

The citation for Yves Chevallard reads:

It is with great pleasure that the ICMI Awards Committee hereby announces that the Hans Freudenthal Medal for 2009 is given to Professor Yves Chevallard, IUFM d'Aix-Marseille, France, in recognition of his foundation and development over the last two and a half decades of a very original, fruitful and influential research programme in mathematics education. The first part of the programme, developed in the 1980s, was focused on the notion of didactical transposition of mathematical knowledge from outside school to inside the mathematics classroom, a transposition which also transforms the very nature of mathematical knowledge. This idea has been further developed, in the 1990s and beyond, into a more general study of the varying institutional characteristics and cultures within which mathematics is being practised in terms of different praxeologies (combining praxis and logos). This gave rise to the so-called anthropological theory of the didactic (ATD) which offers a tool for modelling and analysing a diversity of human activities in relation to mathematics. On that basis Yves Chevallard has developed an entirely new approach to teacher training focusing on the needs and problems of the profession operating in what he calls "clinics for training" which are also cumulatively establishing "archives for training".

It is a characteristic feature of Yves Chevallard's work and impact that he continues to collaborate closely with colleagues in France and Spain and that his work has had a great impact internationally, and not the least so in Latin America. This is reflected in a large number of doctoral dissertations that have been written in various countries about, or within the framework of, his theory. International conferences on ATD have been held in 2005, 2007, and 2010, each of which has gathered about a hundred researchers from Europe, America, Africa, and Asia. In some countries, including Chile and Mexico, Yves Chevallard's work also has exerted a direct influence on curriculum development and in-service teacher training.

That's all, folks!