

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

→ Séance 2 – Vendredi 13 novembre 2009

QUELLE RECHERCHE ? QUELLES PUBLICATIONS ?

1. Cul par-dessus tête

a) Qu'en est-il de la diffusion de la TAD ? D'une façon générale, la diffusion d'un complexe praxéologique passe par des *exposés*, soit ce que le *Trésor de la langue française informatisé* définit comme suit :

Discours oral ou écrit, où sont présentés selon un ordre déterminé par les règles d'une discipline ou la situation d'énonciation, des données de fait, le contenu d'une discipline, d'une doctrine ou d'une œuvre, les termes d'un problème dans le but d'informer ou de fournir la matière d'une discussion.

Utilisant le langage de la gestion, j'ajoute que les exposés en question doivent porter aussi bien sur les *stocks* de TAD que sur les *flux* de TAD : il y a l'existant, et il y a ce qui advient et qui modifie l'existant. (Sur les notions utilisées, on pourra voir l'article "Stock and flow" de *Wikipedia*.)

b) Plusieurs problèmes se posent : celui de la *production* de tels exposés, celui de leur *réception* et, entre les deux, celui de leur *publication*. Ces trois conditions de la diffusion sont solidaires. Par exemple, on peut produire un exposé avec l'idée de le faire recevoir d'un certain public à travers une certaine publication. C'est là cependant que les choses se compliquent.

c) Pour produire un exposé, il faut évidemment avoir quelque chose à exposer. Cela suppose donc des *travaux* et, notamment, des *recherches*. À titre illustratif, je reproduis ici les types d'articles que recense l'*American Psychological Association* dans son *Publication Manual* (2009) :

- 1.01 Empirical Studies
- 1.02 Literature Reviews
- 1.03. Theoretical Articles
- 1.04. Methodological Articles
- 1.05 Case Studies
- 1.06 Other types of Articles

La présence de la rubrique "Other types of Articles" laisse entendre que ce repérage de différentes catégories d'articles n'écarte rien *a priori*. Où est donc le problème ? J'ai indiqué plus haut que « pour faire des publications, il faut faire des recherches ». Cette formulation est évidemment fautive : on fait de la recherche pour accroître les connaissances disponibles ; et pour faire connaître cette recherche (questions étudiées, moyens d'étude mobilisés, résultats obtenus, etc.), on expose et on publie – et non l'inverse. Or il semble qu'un autre schéma soit aujourd'hui prévalent : pour d'aucuns, ce qui compte, c'est de publier ; les recherches ne sont plus là que pour fournir matière aux publications : elles sont presque un mal nécessaire. Un pas de plus, et on tente de réduire le plus possible le travail de recherche permettant de publier – ou plutôt, et c'est là un point essentiel, de publier dans de « bonnes » revues supposées. À titre d'illustration, je reproduis ici la liste des revues francophones de sciences de l'éducation publiée par l'AERES (agence d'évaluation de la recherche et de l'enseignement supérieur) en 2008 :

Rang A : Revues francophones de position internationale
– Revue Française de Pédagogie

- Histoire de l'Éducation
- Formation-Emploi
- Recherche et Formation
- Revue des Sciences de l'Éducation (Canada)
- Raisons éducatives (Suisse)

Rang B : Revues nationales à ouverture internationale

- Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle
- Les dossiers des sciences de l'éducation
- Éducation et Société
- Savoirs
- International Journal of School and Violence
- RDM
- Aster
- Repères
- Didaskalia
- Penser l'éducation
- Éducation Permanente
- Éducation et didactique
- Le Télémaque
- Carrefours de l'éducation
- Spirale- Revue de recherches en éducation
- Pratiques
- L'année de la recherche en sciences de l'éducation
- Revue internationale d'éducation familiale

Rang C : Revues nationales

- Cahiers de la recherche sur l'éducation et les savoirs
- Nouvelle revue de l'éducation et de la scolarisation
- Diversité
- Éducation et Formations

D : Revues professionnelles, revues de vulgarisation

- Sciences Humaines
- Cahiers Pédagogiques
- Revue du CIEP
- Questions vives

Bien entendu, ce type de classement pèse sur le travail des chercheurs : en didactique des mathématiques, on devra se contenter de publier dans une revue de rang B, *RDM* ; publier dans une revue de rang A semble impossible, sauf à accepter une démathématisation invalidante de son exposé. Il est vrai que la même AERES propose dans ses documents le codage ci-après, qui code large :

[**ACLI**] Articles dans revues internationales à comité de lecture

- [**ACLN**] Articles dans revues nationales à comité de lecture
- [**OS**] Ouvrages scientifiques
- [**CHAP**] Chapitres d'ouvrages scientifiques
- [**ACTI**] Communications avec actes dans un congrès international
- [**ACTN**] Communications avec actes dans un congrès national
- [**INV**] Conférences invitées dans un congrès national ou international
- [**ASCL**] Articles dans revues sans comité de lecture
- [**COM**] Communications orales sans actes dans un congrès national ou international
- [**AFF**] Communications par affiche dans un congrès national ou international
- [**OV**] Ouvrage de vulgarisation (ou chapitre de ces ouvrages)
- [**DO**] Direction d'ouvrages ou de revue
- [**CORP**] Corpus, bases de données, ressources, logiciel
- [**TRAD**] Travaux de traduction : traductions annotées, travail d'édition (préfaces, notes, commentaires).
- [**AP**] Autres productions : notices, entrées de dictionnaires, rapport de fouille, guide technique, rapports de grands projets, compte rendu d'ouvrage, ...

d) Deux autres points (au moins) doivent encore être notés. Premier point : pour qu'une recherche puisse exister, les chercheurs ont besoin de *financements*. On sait que, aujourd'hui, à moins de se contenter de financements très modestes, voire résiduels, ainsi que je le fais depuis des années, le financement de la recherche se fait sur *projets*. Depuis 2005-2006, la création de l'ANR, l'agence nationale de la recherche, a renforcé encore la *rat race* des chercheurs : « avoir » une « recherche ANR », ce n'est pas seulement, semble-t-il, obtenir un financement ; c'est obtenir un label – le label ANR. La course du rat démarre donc avec l'ANR et se termine idéalement dans une « revue internationale à comité de lecture », une revue « de rang A ». La recherche n'est plus alors que le point d'appui qui permet de passer de l'un à l'autre. Les effets délétères de ce carcan ont été prévus depuis fort longtemps par le physicien américain d'origine hongroise Leó Szilárd (1898-1964) dans une nouvelle – “The Mark Gable Foundation” – publiée dans un livre intitulé *The Voice of the Dolphins* (1961), où le narrateur, un chercheur, se voit interrogé par un milliardaire sur la manière de *ralentir* les progrès de la science, trop rapides à son gré ; le narrateur répond ceci (d'après la réédition publiée par Stanford University Press en 1992) :

“It should be obvious,” I said. “First of all, the best scientists would be removed from their laboratories and kept busy on committees passing on applications for funds. Secondly, the scientific workers in need of funds would

concentrate on problems which were considered promising and were pretty certain to lead to publishable results. For a few years there might be a great increase in scientific output; but by going after the obvious, pretty soon science would dry out. Science would become something like a parlor game. Some things would be considered interesting, others not. There would be fashions. Those who followed the fashion would get grants. Those who wouldn't would not, and pretty soon they would learn to follow the fashion, too." (p. 129)

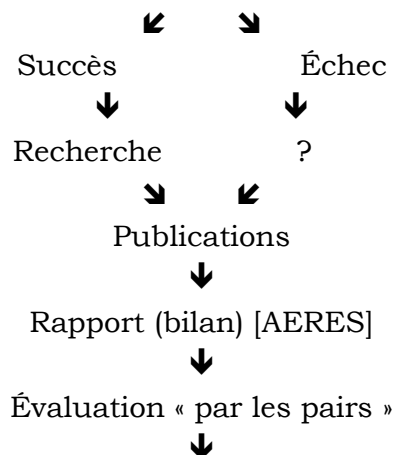
J'emprunte la référence précédente au livre récemment publié (Seuil, 2009) sous le titre *La science à bout de souffle ?* par Laurent Ségalat, « généticien et directeur de recherches au CNRS », ouvrage dont je ne saurais trop recommander la lecture.

e) Le deuxième point annoncé concerne ce qu'on nomme en anglais *peer review*, l'évaluation par les pairs. Je reproduis ci-après, à titre de rappel, le début de l'article "Peer review" de l'encyclopédie *Wikipedia* :

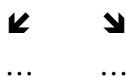
Peer review (also known as **refereeing**) is the process of subjecting an author's [scholarly](#) work, research, or [ideas](#) to the scrutiny of others who are [experts](#) in the same field. Peer review requires a community of experts in a given (and often narrowly defined) field, who are qualified and able to perform impartial review. Impartial review, especially of work in less narrowly defined or inter-disciplinary fields, may be difficult to accomplish; and the significance (good or bad) of an idea may never be widely appreciated among its contemporaries. Although generally considered essential to academic quality, peer review has been [criticized](#) as ineffective, slow, and misunderstood (see [anonymous peer review](#) and [open peer review](#)).

Il s'agit là du maillon faible dans la chaîne qui enserré la recherche aujourd'hui, que je représenterai comme suit :

Projet de recherche → Agence de financement [ANR] → *Peer review*



Projet de recherche → Agence de financement [ANR] → *Peer review*



Bien entendu, pour les financements, il n'existe pas que l'ANR ; mais le schéma précédent reste valable : « le taux de succès aux appels d'offres ouverts par les grandes agences de financement, en Europe et aux États-Unis, est de l'ordre de 20 % », précise L. Ségalat (p. 21). En d'autres termes, quatre sur cinq des projets soumis seraient rejetés. Ainsi refuse-t-on à des personnes que l'on paie la possibilité de travailler : c'est le monde à l'envers.

2. La TAD et le problème éditorial

a) Je n'irai pas plus loin, ici, sur l'évaluation par les « pairs », sur ses anomalies et sur les conséquences trop souvent dénaturantes qu'elle a pour la recherche au service du développement de la connaissance – par opposition à la recherche asservie à la seule visée de « publier ». Un travail de didactique des mathématiques que j'ai cosigné récemment a pu ainsi être soumis à un « pair » qui se déclarait tout à la fois *non* didacticien et *non* mathématicien ! J'imagine que chacun pourrait en raconter, sur ce chapitre, des vertes et des pas mûres. Mais je voudrais maintenant m'arrêter sur la situation de la didactique et, plus précisément, de la TAD.

b) Aucun des maux qui assaillent la recherche en général n'est *a priori* épargné à la recherche en didactique et à la TAD. Lors de la séance 1 de ce séminaire, à propos de la terminologie et du formalisme employés en TAD, j'ai souligné l'autocensure que quelques-uns d'entre nous peuvent être tentés d'accepter pour s'épargner les foudres de la censure des « pairs » – qui, il est vrai, semblent manier sans vergogne la fêrule dès lors qu'ils se croient du bon côté du culturellement correct. J'ajouterai maintenant une autre avanie, que seuls les naïfs (dont je suis) n'avaient pas prévue : les annonces des congrès internationaux sur la TAD déclenchent régulièrement un afflux de propositions de communication dont il appert que les auteurs n'ont qu'une connaissance très vague de la TAD et ne voient dans le congrès qu'une opportunité parmi d'autres de « publier ». On touche ainsi du doigt le cynisme mercenaire auquel conduit tout droit l'organisation bureaucratique actuelle de la recherche : « placer » une communication (ou un article) *où que ce soit*, en recherchant bien sûr les circuits de publication *les plus cotés possibles*, sans engager davantage sa personne dans un projet scientifique collectif, par nature incertain.

c) Le problème essentiel reste cependant celui-ci : étudier les questions que permet de poser la TAD ou qui se posent à la TAD, c'est-à-dire faire de la

recherche ; rédiger des exposés relatifs aux avancées réalisées ; publier ces exposés ; les faire recevoir par le ou les publics visés, ce qui inclut bien sûr leur mise en débat. Il me semble que, dans l'état actuel des choses, et en supposant ici des recherches de qualité, la clé de cette organisation de recherche se trouve dans ce que je nommerai *le problème éditorial* : où publier, sans pasteurisation dirimante, des exposés de nos travaux qui alimentent tout à la fois le développement de la TAD et sa diffusion ? Comment faire connaître – plutôt que méconnaître – les exposés ainsi publiés ? Telles sont les questions que je me contenterai aujourd'hui de poser. Plusieurs idées de réponse pourraient être évoquées. Je n'en ferai rien ici, mais je serais heureux de recevoir suggestions et remarques à ce sujet (y.chevallard@free.fr).

« RECHERCHE ET FORMATION »

1. Une « mascarade »

a) Il y a déjà quelque temps, j'avais accepté de participer à des « assises FSU » qui devaient se réunir le 7 novembre 2009 à l'université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne en vue de « Défendre et rénover la formation des enseignants ». Dans ce cadre, il m'a été demandé d'animer (de 13 h 45 à 15 h 30) un « atelier » qui se déroulait en parallèle avec deux autres ateliers, l'un intitulé « De l'étudiant au fonctionnaire », l'autre, animé par Gilles Baillat, président de la CDIUFM, intitulé « Structures et instances de formation ».

b) Voici la présentation de l'atelier que, de concert avec « un formateur Formation continue » qui avait tenu à garder l'anonymat sur le programme desdites assises, j'ai eu à animer – j'ai découvert cette présentation dans le programme de la journée :

La recherche en éducation a été trop absente jusqu'à présent : quelles sont les conditions de son développement ? Quelle part de recherche dans la formation ? Quelle part de recherche dans la formation initiale et continue ? Peut-on parler de recherche « appliquée » au métier ?

c) Un communiqué de la tendance *Émancipation* du SNESup (que l'on m'avait transmis l'avant-veille du 7 novembre, car je n'en étais pas le destinataire) précisait : « Émancipation ne peut apporter sa caution à cette mascarade du 7 novembre, nouvelle journée des dupes. » C'est donc du thème de mon *intervention* dans une « mascarade » que je voudrais vous entretenir ici, en reprenant l'essentiel des propos que j'y ai fait entendre.

2. La recherche et les domaines sociaux d'activité

a) Devant tout domaine social d'activité, on doit, en tant que citoyen déjà, se poser cette question : *de quelle recherche bénéficie-t-il ?* Que sont les équipes de recherche « attachées » à ce domaine ? Et surtout : que sont les *questions* qui se posent en ce domaine d'activité et qui font l'objet de recherches ? Ce que l'on découvre alors, c'est l'*inégal développement* de la recherche selon les domaines d'activité et, corrélativement, l'inégale distribution des « cerveaux » : depuis deux siècles, il y a sans doute eu davantage de matière grise investie dans les sciences physiques que dans l'éducation, par exemple.

b) Mais il est un autre scandale. Lorsque la recherche est appelée à concourir à la formation des acteurs d'un certain domaine d'activité, on est fréquemment mis face à une *indignité partagée* : du côté des *responsables du domaine*, on acceptera de former les acteurs de ce domaine à l'aide des stocks de savoirs existants, généralement *constitués à d'autres fins*, en espérant qu'ils soient « à spectre assez large » ; du côté du *monde de la recherche* éventuellement sollicité, on proposera *ce que l'on a en stock*, sans engager des recherches sur les questions posées au domaine d'activité correspondant. De là ce que j'ai nommé des formations *indignes*.

3. La recherche et les professions de l'enseignement

a) La situation est en particulier celle-là pour les métiers de l'enseignement : la « recherche en éducation », d'organisation libérale, c'est-à-dire qui détermine « librement » ses choix, de façon en quelque sorte autocentrée, voire autiste, constitue des stocks et gère des flux sans véritablement se soucier des besoins du domaine des métiers de l'enseignement ni des questions qui s'y posent.

b) Corrélativement, la plupart des recherches en éducation se veulent « en surplomb » par rapport au domaine des métiers de l'enseignement : d'aucuns voient même en cela une garantie de leur « valeur ». En conséquence, il n'existe que très peu de *recherches « organiques » des métiers de l'enseignement*. Quand elles existent, elles se sont développées surtout dans les IUFM – même si les IUFM abritent aussi de la recherche « libérale », qui suit ses propres lois.

c) Contre cette situation, il faut introduire dans la culture de la recherche la notion de *problèmes posés à un domaine d'activité*, et en particulier de *problèmes d'une profession*, qui appellent des recherches *finalisées* par ces problèmes – ce qui nécessite généralement aussi de la recherche

fondamentale, bien qu'en dernière instance finalisée. Bien entendu, ce qui nous importe ici, ce sont les problèmes posés *aux métiers de l'enseignement*.

4. La recherche comme problème de notre temps

a) Ainsi que je l'ai suggéré plus haut, nous assistons actuellement à la *dégénérescence bureaucratique* du modèle libéral de la recherche : du *publish OR perish* de naguère on passe aujourd'hui au *publish AND perish* qui signe la faillite de la recherche.

b) L'idée classique de formation *par* la recherche (dont l'une des conditions est une formation *à* la recherche) est fortement mise en cause par l'évolution de la culture de la recherche décrite dans ce qui précède. « Former » par la mise en contact avec cette culture-là, en effet, c'est trop souvent *déformer* en donnant de la recherche une image faussée et en en promouvant une pratique dénaturée. C'est ce que donnent à voir certaines formations en sciences de l'éducation où s'initier à la recherche revient à entrer dans un schéma rituel dont Jean-Marie Barbier a peint avec justesse les incongruités dans un entretien avec Françoise Clerc intitulé « Formation et recherche : ambiguïtés sémantiques et formes d'action spécifiques » (paru dans le n° 59 de la revue *Recherche et formation*, pp. 133-139) :

... on constate fréquemment en recherche un décalage considérable entre la partie dite théorique de la recherche, qui fait un tour d'ensemble ambitieux de toutes les théories connues de l'auteur en rapport supposé avec l'objet, et une grande modestie du travail empirique où les théories citées ne sont pas réellement investies dans le travail d'analyse. Ces recherches produisent peu de résultats et sont en fait une simple mise à plat de la formation et du travail de l'auteur. Ils apportent très peu au lecteur. Quel que soit le plan adopté (séparant ou au contraire mêlant l'exposé du cadre théorique, des hypothèses, de la méthodologie, des résultats, de la discussion et de l'interprétation des résultats), il est important de situer de façon fonctionnelle, les unes par rapport aux autres, les différentes composantes de la recherche : mettre en valeur, par exemple, les outils théoriques réellement investis dans le travail d'analyse, les distinguer des ensembles théoriques plus généraux par rapport auxquels ils prennent signification, mais qui ne pourront pas être éprouvés évidemment dans la recherche. (p. 139)

c) Est-ce cela, la recherche ? Du moins, est-ce à ce type de recherche-là que l'on entend initier les étudiants en sciences de l'éducation et plus généralement les prétendants à un master ? La situation actuelle de la recherche soulève ainsi un très sérieux problème de *transposition didactique*

des activités de recherche – un problème d'autant plus difficile à résoudre adéquatement qu'une « solution » est déjà en place, installée, indurée.

5. Le rapport à la recherche dans l'éducation scolaire : du stock au flux

a) Le rapport à la connaissance culturellement dominant aujourd'hui porte à la conscience du citoyen ordinaire l'existence de *stocks* de savoirs mais maintient l'ignorance des *flux* de connaissances et de la *recherche* qui les engendre. Nous avons là *l'un des grands problèmes éducatifs de notre temps*.

b) Donner une solution à ce problème revient à initier les élèves (et futurs citoyens), non pas tant à la recherche qu'au *fait* de la recherche, aux plans épistémologique, culturel, économique, politique, etc. ; bref, à la recherche comme fait social total. Il s'agit là d'un problème largement ouvert, qui appelle des recherches spécifiques. Les travaux sur l'enquête codisciplinaire et les PER que nous menons participent certainement de la résolution de ce problème ; mais ils ne touchent encore qu'à une *partie* du problème, qui ne se réduit pas à une pratique adéquatement adaptée de la recherche. Il y a là matière à travailler *au sein même de ce séminaire*.

6. Le rapport à la recherche dans la formation des professeurs

a) Pourquoi devrait-on « travailler » leur rapport à la recherche dans la formation des professeurs ? Au vu de ce qui précède, on peut répondre d'abord : parce que les enseignants doivent travailler avec les élèves leur propre rapport à la recherche *s'agissant de la ou des disciplines qu'ils enseignent*. Mais aussi parce que, en vertu même du projet éducatif évoqué ci-dessus, qui s'adresse à *tous* les citoyens, ils doivent développer et entretenir un certain rapport à la recherche relative à *leur domaine d'activité professionnelle* – disciplines enseignées comprises.

b) De là découle l'importance et la spécificité du *rapport à la recherche* des professeurs. Je note qu'un tel rapport ne saurait exister du seul fait que l'enseignant aurait fait « un peu (voire beaucoup) de recherche », surtout s'il s'agit de recherche libérale, formelle et bureaucratique, que ce soit dans la discipline qu'il enseigne ou en matière d'enseignement et d'apprentissage de cette discipline.

7. Que faire ?

a) Je rappelle quelques faits essentiels. Tout d'abord, en amont de la formation des professeurs, il faut situer *le développement de la profession* de professeur, qui commande cette formation. Ensuite, le développement de la

profession se fait dans une dialectique appropriée avec le *développement de la recherche* sur les *problèmes de la profession*. Enfin, la recherche sur les problèmes de la profession suppose des *équipes de recherche organiques*, travaillant sur lesdits problèmes.

b) En quoi peut alors consister l'initiation des futurs professeurs à cette recherche ? Contre l'idée d'en faire des chercheurs au petit pied, qui jouent à la recherche comme des enfants jouent à la marchande ou au docteur, en les maintenant ainsi dans un réel d'opérette, il convient d'*associer* les futurs professeurs à la recherche sur les problèmes de la profession qu'ils veulent embrasser, et cela par le biais d'une immersion bien encadrée dans une équipe de recherche, à propos d'un aspect délimité d'un problème étudié par l'équipe.

c) Insistons sur ce point. La recherche dont le futur enseignant doit être un acteur (et, partiellement, un auteur) ne peut consister en un jeu formel, transposition lointaine d'une authentique recherche organique : ses acteurs, quels qu'ils soient, doivent en assumer solidairement la responsabilité scientifique et sociale. Il faut donc créer les conditions d'une telle assumption.

d) Dans cette perspective, le travail de recherche demandé aux futurs enseignants porterait – c'est un schéma raisonnable – sur un point de difficulté mis au jour par les travaux de l'équipe d'accueil. L'exposé de ce travail serait alors consigné en un mémoire *doublement évalué* : comme mémoire de master, d'un côté, comme production examinée au concours de recrutement (sur l'exemple des TIPE en CPGE), de l'autre.

e) Plus généralement, tout enseignant doit ainsi pouvoir participer à l'effort de recherche touchant les métiers de l'enseignement. Mais l'élaboration (ou la ré-élaboration) du rapport à la recherche d'un enseignant *ne saurait se limiter à cela*. Ce rapport doit en effet lui permettre d'agir, de façon pertinente et efficace, dans le cadre de son enseignement, afin d'impulser, de nourrir, de guider l'élaboration du *rapport des élèves à la recherche* (à tel niveau des études scolaires, en tel domaine). Pour cela, d'une façon générale, la formation des enseignants doit les amener à rencontrer comme *objet d'étude*, selon des problématiques diverses, la recherche (relative à tel domaine d'activité) et les recherches qui lui donnent son visage concret. Comment faire ? Question clé qui désigne un domaine de recherche appelé à devenir crucial en matière de formation de professeurs, mais dont il semble qu'il soit aujourd'hui encore une *terra incognita* du monde de la formation.

ANALYSES DIDACTIQUES

1. Naissance d'un type de tâches « scolaire »

a) Lors de l'ultime séance du séminaire TAD/IDD de l'année dernière, j'ai évoqué un type de tâches dont, dans divers cadres de formation en sciences de l'éducation, j'ai demandé aux étudiants de montrer – à l'examen – une certaine maîtrise. En l'espèce, la consigne était libellée en ces termes :

Rédigez une analyse didactique relative aux situations évoquées dans le texte ci-dessous, intitulé...

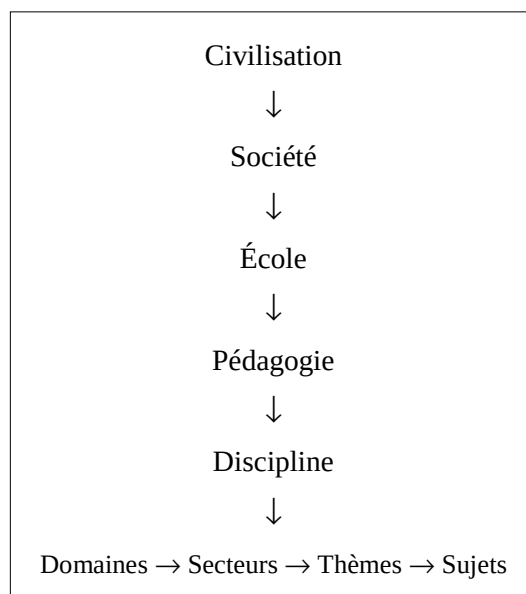
b) « Rédigez une analyse didactique » : je reviens donc ici sur ce type de tâches. Dans l'unité 6 du cours de didactique fondamentale 2008-2009, les étudiants de licence de sciences de l'éducation pouvaient lire ceci.

6.1.2. Faisons le point sur ce qui constitue, à l'orée de cette Unité 6, une *analyse didactique* d'une situation supposée décrite dans un texte (oral ou écrit) : c'est une analyse de ce type, on le sait, qui sera au cœur de l'épreuve d'examen.

a) Cette analyse doit comporter, en fonction bien sûr des informations disponibles et de ce que l'on peut raisonnablement conjecturer, à propos de chaque système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$ présent ou évoqué dans la situation, identifié éventuellement comme étant le SDP ou un SDA, l'examen des questions suivantes :

1. qu'est-ce que X ?
2. qu'est-ce que Y ?
3. que sont les *praxéologies* $[T / \tau / \theta / \Theta]$ composant $\heartsuit$?
4. que font X et Y , quelles *praxéologies didactiques* mettent-ils en œuvre, mobilisant quelles *ressources didactiques*, pour que X « apprenne » $\heartsuit$?
5. quel *équipement praxéologique* peut-il résulter chez X , à court ou moyen terme, du fonctionnement du système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$?
6. qu'est-ce que Y et certains environnements éventuels de $S(X; Y; \heartsuit)$ auront pu apprendre du fait du fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$?

b) Pour espérer pouvoir répondre à ces questions, il convient d'identifier les principaux « paquets » de *conditions et contraintes* qui rendent possibles, facilitent ou au contraire interdisent (ou, du moins, gênent) la survenue de tel ou tel état des systèmes didactiques examinés. À cet égard, rappelons l'*échelle des niveaux de co-détermination didactique* à laquelle on est parvenu jusqu'ici : on peut la représenter de la façon suivante.



c) Plusieurs exemples d'analyse didactique étaient également proposés. J'ai retenu ici le texte suivant.

L'école primaire à Rome

1. ... au point de vue moral, les dangers de la rue et de l'école n'étaient pas moindres, dans l'antiquité, pour les garçons que pour les filles. Aussi les Romains avaient-ils adopté l'usage grec de l'esclave accompagnateur, qu'ils désignaient de leur nom grec de *paedagogus*. Lorsqu'il était bien choisi, il pouvait s'élever au rôle de répétiteur, et surtout d'un véritable gouverneur, assumant la formation morale de l'enfant...

2. Le programme de l'école primaire est toujours d'une ambition très limitée : on y apprend à lire et à écrire, rien de plus ; tout ce qui est au-delà relève déjà du secondaire. On commence bien entendu par l'alphabet, et par le nom des lettres, avant d'en connaître la forme : dans l'ordre, de A à X (Y et Z, qui ne servent qu'à transcrire des mots grecs, sont considérées comme étrangères), puis à l'envers de X à A, puis par couples, AX, BV, CT, DS, ER, puis en brouillant l'ordre par des combinaisons variées, puis à des noms isolés : étapes successives, lentement suivies... Ensuite, avant d'aborder la lecture de textes suivis, on s'exerce sur des petites phrases, des maximes morales d'un ou deux vers... On le voit, c'est, jusqu'en ses plus petits détails, la méthode des écoles grecques ; même pédagogie analytique, même sage lenteur ; Quintilien ne cesse de répéter : « Ne pas chercher à abrégé, ne pas se hâter, ne pas sauter d'étapes »...

3. Enfin, le calcul : comme en pays grec, c'est essentiellement l'apprentissage du vocabulaire de la numération pour lequel on s'aide de petits jetons, *calculi*,

et surtout de la mimique symbolique des doigts : on s'en souvient, c'est à l'époque romaine que l'usage est bien attesté de ce comput digital dont les rites survivront pendant de si long siècles. Mais c'est surtout le vocabulaire des fractions duodécimales de l'unité, fondement de tout le système métrique de l'antiquité, qui demandait beaucoup d'efforts. Horace s'est amusé à les évoquer en vers :

Les petits Romains apprennent par de longs calculs à diviser l'unité de cent façons : « Réponds, fils d'Albinus ; si de $5/12$ on enlève $1/12$, que reste-t-il ? Allons, qu'est-ce que tu attends pour répondre ? – $1/3$. – Bien : tu sauras défendre tes sous ! Si (au contraire) on y ajoute $1/12$, qu'est-ce que ça fait ? – $1/2$.

La traduction française donne à tort l'impression d'un calcul de fractions : le latin ne dit pas $5/12$, $1/12$, $1/3$, $1/2$, mais un *quincunx*, une *uncia*, un *triens*, un *semis*, qui sont moins des nombres que des réalités concrètes.

4. Les méthodes de la pédagogie romaine sont aussi grecques que ses programmes ; méthodes passives : la mémoire et l'imitation sont les qualités les plus prisées chez l'enfant. Elles recourent à l'émulation, dont les bienfaits compensent, aux yeux de Quintilien, les dangers de l'éducation collective, mais plus encore à la coercition, aux réprimandes, aux châtiments. Le tableau fameux de Montaigne : « cris d'enfants suppliciés et maîtres enivrés en leur cholère », reste vrai de l'école latine comme il l'était de la grecque ; pour tous les Anciens, le souvenir de l'école est associé à celui des coups : « tendre la main à la fêrule », *manum ferulae subducere*, est en bon latin une élégante périphrase pour « étudier ».

Extrait de Henri Irénée Marrou, *Histoire de l'éducation dans l'antiquité. II. Le monde romain* (Paris, Seuil, 1948).

d) Voici maintenant l'analyse didactique proposée dans le cours, ou plutôt voici ce qui y était présenté comme « une analyse didactique concise du texte précédent » (l'obligation de concision imposée à l'examen contraignant à faire des choix).

Les quatre parties du texte proposé apportent des informations sur le fonctionnement de l'école primaire à Rome et en particulier d'un système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$ de cette école.

La section 1 fait apparaître d'abord une *contrainte* de la *société* sur l'école : parce qu'il y a danger à aller de son domicile à l'école et à en revenir, l'écolier x est nanti d'un « pédagogue », z , qui n'est d'abord qu'un serviteur qui l'accompagne et le protège. Mais ce personnage se mue quelquefois en un aide à l'étude, un *répétiteur*, avec lequel l'écolier x forme un SDA $S(x; z; \heartsuit)$.

La section 2 donne quelques informations sur l'une des disciplines étudiées, ♥₁, la *lecture/écriture*, ainsi que sur l'organisation didactique correspondante. Celle-ci suppose une *analytique didactique* complexe, sur laquelle prend appui une lente progression, strictement définie, dont aucune étape n'est sautée et qui s'étale résolument dans la durée.

La section 3 nous informe de même sur une autre discipline, ♥₂, le *calcul*. Une première information a trait aux *instruments* du calcul : vocabulaire de la numération, jetons (*calculi*) et doigts de la main. Les techniques de calcul ainsi instrumentées ne sont pas indiquées ; mais le calcul digital est mentionné, sans autre précision, notamment pour sa très longue postérité dans nos sociétés. Tout cela concerne, à l'évidence, le calcul sur les nombres entiers, ♥₂₁. À cela s'ajoute le calcul sur les fractions duodécimales, ♥₂₂. Certaines *tâches* de ce calcul sont précisées ; en notation moderne, il s'agit des deux calculs suivants : $\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$; $\frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$. En revanche, on ne sait rien de la *technique* de calcul, hormis que, opérant à l'aide d'un vocabulaire (*quincunx*, *uncia*, *triens*, *semis*) qui désigne et masque à la fois la structure des nombres, elle devait être relativement ardue.

La section 4 met l'accent sur des techniques *pédagogiques* créant des conditions jugées propices à l'étude *en général*. Bien que ces techniques ne soient pas spécifiques d'un contenu particulier, leur mise en œuvre suppose réalisées certaines conditions. Il y a d'abord, ainsi, l'usage de la *mémorisation*, qui demande une matière mémorisable, un « texte » ; il y a ensuite l'*imitation*, qui demande un modèle à imiter (ce peut être le maître) ; il y a enfin un dur effort à fournir, dont les ressorts sont l'*émulation* (qui tire profit de l'existence de la « classe », de l'enseignement collectif) et la *férule*, la violence morale et physique qui s'abat sur l'écuyer, condition « pédagogique » que permet la société au sein de l'école, et que Montaigne, longtemps après, dénoncera vivement.

e) J'ai insisté dans les enseignements que j'ai donnés – et cela se retrouve dans mon cours écrit – sur un fait clé : l'occultation, la scotomisation, le refoulement du didactique. En pratique, il n'est pas fréquent de rencontrer « dans la littérature » une description de situations sociales didactiques qui laisse apercevoir en celles-ci un *enjeu didactique* (le quelque chose, noté ♥, dont l'apprentissage est visé), et certains au moins des *gestes didactiques* (de la part de Y ou de X) visant à provoquer ou à aider cet apprentissage. Il en résulte en particulier que le troisième volet de l'épreuve d'examen évoqué plus haut, pour lequel chaque candidat doit apporter une telle description sélectionnée à l'avance par ses soins, comporte une difficulté spécifique très réelle : la « sélection » du texte que le candidat devra analyser est en soi une tâche délicate.

2. Une situation en vidéo

a) L'occasion m'a été donnée récemment d'examiner une *vidéo*. Cette vidéo, il convient d'abord de la visionner. On la trouvera en ligne sur YouTube à l'adresse suivante : <http://www.youtube.com/watch?v=XbInceML7Ms>.

b) Cela fait, voici l'analyse que j'ai été conduit à rédiger.

Quels systèmes didactiques ?

1. Il convient en premier lieu de s'arrêter sur la *nature* de l'objet à analyser et sur la *fonction didactique* qu'on peut lui prêter. Il ne semble pas qu'il s'agisse, par exemple, d'une vidéo d'un cours de guitare adressé à des personnes qui, quoique se situant hors champ, feraient face à l'acteur $\tilde{y}$ de la situation observée agissant comme professeur de guitare, c'est-à-dire comme un y d'une certaine sorte. Car l'exposé vidéoscopé serait alors, semble-t-il, bien trop rapide, bien trop dense et dépourvu d'assez de redondances pour constituer un fragment d'un cours raisonnable qui, par la nature même de son contenu, ne saurait s'adresser qu'à des débutants absolus.

2. Bien plutôt, il semble qu'il s'agisse, à l'instar d'un exposé sur papier (illustrée d'images, photos ou dessins), d'un exposé en vidéo qui peut être utilisé *en autodidaxie* par une personne x opérant dans un système autodidactique $S(x; \emptyset; \heartsuit)$. Comme avec un exposé sur papier, en effet, il n'existe pas pour x de possibilité d'*interaction didactique en temps réel* avec la personne $\tilde{y}$ qui s'exprime dans la vidéo. Pour cette raison, *il n'existe pas*, à proprement parler, de système didactique $S(x; \tilde{y}; \heartsuit)$. En fait, l'exposé de $\tilde{y}$, soit $\tilde{E}$, porte en lui des éléments praxéologiques, $\heartsuit_{\tilde{E}}$, que la personne x peut se donner comme enjeu didactique et qu'elle peut alors étudier soit seule, soit avec l'aide d'un y – qui peut être un simple « aide à l'étude » – avec lequel elle constituerait alors le système didactique $S(x; y; \heartsuit_{\tilde{E}})$. Comme il en va avec un exposé sur papier, dont x peut reprendre indéfiniment l'examen, x peut ici visionner indéfiniment l'exposé en vidéo, dans un but d'autodidaxie ou d'étude plus ou moins fortement aidée. Bien entendu, comme avec un exposé écrit, x peut accomplir *bien d'autres gestes didactiques* afin d'étudier $\heartsuit_{\tilde{E}}$: l'étude de $\heartsuit_{\tilde{E}}$ excède *a priori* l'étude de $\tilde{E}$ – nous allons y revenir.

Quelles praxéologies « enseignées » ?

3. Il convient maintenant de préciser ce que nous avons noté $\heartsuit_{\tilde{E}}$. Pour aider le lecteur, on reproduit ci-après le texte de l'enregistrement vidéo à analyser.

Alors pour ce cours vous avez besoin d'une guitare électrique ou acoustique, comme ce modèle, ainsi que d'un médiator, et il faut que la guitare soit bien accordée, de préférence.

Ce qui est vraiment très intéressant dans la guitare, c'est que c'est un instrument harmonique, donc où on peut jouer des accords.

Alors bien sûr la guitare est composée de six cordes, *mi, la, ré, sol, si, mi* ; et quand on joue en accord ces six cordes, on est d'accord pour dire que ce n'est pas très joli. Donc l'intérêt de la guitare réside dans ses cases, et le fait que lorsqu'on met les doigts au bon endroit dans la bonne case on peut faire des accords majeurs. D'accord ?

Ici par exemple je vais vous expliquer comment on fait le *do* majeur, qui est un peu l'accord qu'on apprend toujours au début. Avant d'apprendre ce premier accord, il faut bien tenir sa guitare et pour ça on va réaliser une pince entre le pouce qui passe derrière le manche et le haut de la paume de la main qui tient l'autre côté... D'accord ? Une sorte de pince, comme ceci... Ensuite, on va prendre son annulaire et le mettre sur la troisième case de la deuxième corde : donc deuxième corde, un, deux, troisième case. Sur la troisième corde, le majeur était sur la deuxième case, comme vous le voyez ; on va laisser sonner à vide, comme on dit, la quatrième corde, pour mettre l'index sur la première case de la cinquième corde. On compte un, deux, trois, quatre, cinq, six ; donc cinquième corde, première case ici ; et lorsque nous grattons... nous entendons l'accord de *do* majeur, puisque chaque doigt est positionné de manière à ce que l'accord soit parfait.

L'intérêt, l'intérêt de la guitare, c'est que, quand on additionne deux, trois accords majeurs et mineurs qu'on apprend, à force de les enchaîner on finit finalement par pouvoir faire ce qu'on appelle des grilles d'accords... Ces grilles d'accords sont utilisées dans la plupart des chansons, c'est souvent les mêmes accords qui reviennent. Donc on peut rapidement jouer des chansons, quitte à chanter par dessus, grâce à ces enchaînements d'accords... parfaits, majeurs et mineurs.

4. L'horizon praxéologique de l'épisode observé est le type de tâches *T* suivant : « jouer [à la guitare] des chansons » (plutôt d'ailleurs que « s'accompagner à la guitare en chantant des chansons »). Ce qu'affirme alors *ȳ*, c'est que la technique τ à mettre en œuvre pour cela appelle l'accomplissement de tâches de différents types consistant à produire, à la guitare, des « accords parfaits, majeurs et mineurs », qu'il faut en outre « enchaîner ».

5. Quel est le bloc technologico-théorique $[\theta / \Theta]$ relatif à $[T / \tau]$? Il repose sur une réalité sociale non discutée : les « grilles d'accords sont utilisées dans la plupart des chansons », où ce sont souvent « les mêmes accords qui reviennent ». Cela justifie la technique τ : en enchaînant adéquatement de tels accords on peut jouer « la plupart des chansons ». Qu'il en soit ainsi ne doit pas surprendre : « on est d'accord » pour dire que, « quand on joue en accord » les six cordes d'une guitare, ce qu'on entend n'est pas « joli ». Là se cache une

partie de la théorie Θ : les sons sont jolis ou non, il y a un accord général à ce propos (ce qui est évidemment fort discutable).

6. Le discours technologique de $\tilde{y}$ use de nombreuses notions qui, parce qu'elles semblent aller de soi dans la bouche de $\tilde{y}$, peuvent donner l'impression d'un univers certain, non problématique et, pour le dire nettement, largement *naturalisé*. Ainsi en va-t-il notamment dans l'introduction de son exposé, qui évoque comme s'ils étaient bien connus les types d'objets suivants : guitare électrique, guitare acoustique, médiateur, guitare (bien) accordée, instrument harmonique, accords. Il en va de même des « six cordes » de la guitare et des sons qu'elles émettent. Le bloc technologico-théorique apparaît ainsi comme ce que l'on ne peut que supputer – sans le connaître davantage – derrière cet univers assuré : il est présent *in absentia*.

7. On peut imaginer qu'il s'agit là d'une conséquence d'une certaine technique didactique mise en œuvre par $\tilde{y}$ pour faire qu'un x potentiel s'engage sans plus de façon, si peu que ce soit, dans l'étude du seul type de tâches « enseigné » par $\tilde{y}$: « faire » un accord « de *do* majeur », type de tâches T_{Do} que *motive* (a) au plan praxéologique, la technique τ relative à T , et (b) au plan pédagogique, le fait qu'il serait « un peu l'accord qu'on apprend toujours au début ». Notons que le type de tâches consistant à *reconnaître* (à l'oreille) un accord de *do* majeur *n'est pas* envisagé. Seule la *production* d'un tel accord est prise en charge dans l'épisode observé : ce n'est pas un *son* qui est « enseigné » mais une technique de production d'un son, lequel ne se reconnaît (ici) qu'à sa manière d'être produit.

Quelles praxéologies didactiques et quels apprentissages ?

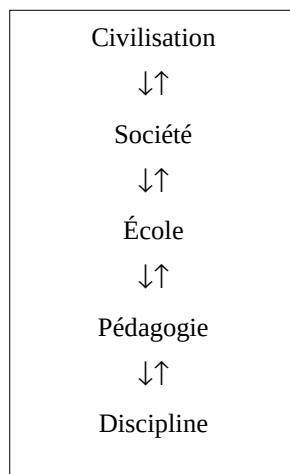
8. Alors que la technique τ relative à T est simplement évoquée (pour être invoquée au plan technologique), la technique τ_{Do} relative à T_{Do} est, elle, montrée et « démontrée », ce pour quoi l'exposé en vidéo a un avantage net par rapport à l'exposé sur papier. L'essentiel de la vidéo est en effet consacré à *montrer* la technique τ_{Do} . Cette monstration, qui associe image dynamique et son, procède nettement d'une volonté de simplification, que trahit au reste une petite omission touchant la désignation des cordes (ce que $\tilde{y}$ nomme première corde peut être aussi bien regardé comme la sixième corde lorsque les cordes sont comptées en partant du bas : voir par exemple <http://six.cordes.over-blog.com/article-5475931.html>). Surtout, la monstration réalisée produit un effet d'évidence sans doute trompeur : saisir le « manche », faire « une pince » avec sa main gauche, etc., sont autant de gestes dont la maîtrise n'est sans doute pas immédiate. On a là un piège classique de la « pédagogie de l'ostension » : $\tilde{y}$ crée une impression de simplicité qui conduit x (et $\tilde{y}$) à croire qu'il sera facile à x de reproduire ce que $\tilde{y}$ prétend montrer. « Lorsque nous grattons, dit ainsi $\tilde{y}$, nous entendons l'accord de *do* majeur, puisque chaque doigt est positionné de manière à ce que l'accord soit parfait. » Voire !

9. Ce que peut apprendre x à partir de $\tilde{E}$ dépend certes de $\tilde{E}$ mais dépend aussi, et à certains égards *surtout*, des gestes (auto-)didactiques qu'accomplira éventuellement x à l'endroit de $\heartsuit_{\tilde{E}}$. En d'autres termes, $\tilde{E}$ n'est qu'une condition *potentielle* d'apprentissages dont l'actualisation dépend de l'engagement didactique de x à l'endroit des enjeux didactiques inscrits dans $\tilde{E}$. On peut imaginer *par exemple* que x commence par enquêter sur au moins certains des termes employés par $\tilde{y}$, notamment sur la notion d'*accord* ou sur celle d'*instrument harmonique*. Dans ce dernier cas, il découvrira peut-être, en consultant simplement l'article « Harmonie » de l'encyclopédie *Wikipédia*, que, « lorsqu'on dit qu'un instrument est "harmonique", cela signifie que cet instrument est capable de jouer au moins deux sons simultanés » (comme il en va de la guitare ou du piano, et au contraire du violon ou de la clarinette, appelés instruments « mélodiques ») ; et encore que « le mot harmonie renvoie généralement aux simultanés sonores dans la musique » mais aussi, plus étroitement, à la « science des accords ». Ainsi lira-t-il peut-être que « dans son sens le plus étroit, et plus précisément en musique classique, le mot harmonie désigne la discipline étudiant la disposition et l'enchaînement des accords ». Il lira aussi que « le mot accord, en tant que concept renvoyant à un ensemble de sons simultanés, ne semble pas antérieur au XVI^e siècle », ce qui peut instiller en lui une attitude critique à l'endroit des « évidences » distillées par $\tilde{y}$.

10. Le même x pourra aussi décider d'ignorer ses ignorances à cet égard et tenter d'apprendre sans plus attendre, à partir de $\tilde{E}$, à produire un accord de *do* majeur selon la technique τ_{Do} . Pour cela, il pourra se procurer « une guitare acoustique bien accordée » ainsi qu'un médiateur et, *mimant* ce que $\tilde{y}$ décrit et montre à travers $\tilde{E}$, s'efforcer de maîtriser la technique τ_{Do} « nue », traitée en simple recette (c'est-à-dire sans technologie explicite, quoique non sans théorie – celle du « joli » son). On peut imaginer aussi que, ne parvenant pas à se procurer la guitare en apparence indispensable, x décide tout de même de se bricoler un dispositif matériel mimant le système cordes/cases d'une guitare pour avancer tout de même dans la maîtrise de τ_{Do} . D'aucuns sans doute verront en cette manœuvre didactique le danger d'un apprentissage à demi sauvage, déréglé, ou du moins insuffisamment régulé faute de y « correcteur ». On répondra que le danger était déjà présent dans la première situation (l'usage par x d'une guitare bien accordée, avec ses six cordes et ses cases, pour mimer $\tilde{y}$) et qu'elle est en fait présente dans $\tilde{E}$ lui-même, nonobstant les vertueux efforts de $\tilde{y}$.

Conditions et contraintes

11. L'analyse des contraintes et des conditions sous lesquelles l'exposé $\tilde{E}$ a été produit et est susceptible d'être utilisé comme ressource didactique permet de mettre en perspective ce qui précède. Rappelons d'abord la structure de l'échelle des niveaux de co-détermination didactique.



12. Le premier paquet de conditions et contraintes qu'il convient de mentionner est évidemment celui dont se nourrit la tradition immémoriale *du didactique* – de ce fait que quelqu'un envisage de faire quelque chose pour que quelqu'un apprenne quelque chose. L'exercice de cette tradition de *l'intervention didactique dans la cité* se réalise ici dans des conditions et sous des contraintes « ultramodernes », engendrées par l'existence de la vidéo, du Web et de sites qui hébergent des vidéos et permettent d'y accéder, tel YouTube. Ce changement dans la *civilisation* crée des conditions qui élargissent les possibilités d'intervention didactique : au lieu d'un livre publié, projet nécessairement lourd et souvent inabouti, voici une vidéo de 2 minutes 8 secondes rendue publique sans coup férir et visionnée, au moment où ces lignes sont écrites, 188 598 fois. Il en résulte dans nos sociétés ce qui semble bien être une dynamique dont on ne sait si elle se maintiendra longtemps ou s'épuisera vite : la métamorphose possible de chacun de nous en une effigie de professeur, en un professeur au petit pied dépourvu des moyens les plus usuels de l'intervention didactique professorale.

13. Si la *pédagogie* ostensive mise en œuvre par $\tilde{y}$ est, on l'a noté, étroitement classique, la question des conditions et contraintes ayant leur siège au niveau de l'école se pose. Formellement, $\tilde{y}$ semble ici ne s'autoriser que de lui-même : il n'apparaît pas comme le mandataire d'une « institution mandante » qui l'aurait désigné comme « institution enseignante » auprès d'une certaine « institution enseignée » (pour utiliser le vocabulaire de Guy Brousseau). C'est là l'effet, au niveau de l'école, de conditions ayant leur siège aux niveaux de la civilisation et de la société : le faible coût institutionnel et personnel de l'intervention didactique par le truchement d'un exposé mis en ligne et, en particulier, d'un exposé en vidéo. Cette liberté apparente a toutefois un prix praxéologique et didactique que l'on a souligné. N'étant pas autorisé par une école dûment instituée, $\tilde{y}$ doit en effet s'autoriser d'une institution établie, présente dès lors dans son exposé comme un bloc inentamable : « la guitare ». La conséquence en est que les objets présentés – accords, accord de *do*

majeur, etc. – sont tenus hors de toute problématisation qui conduirait à les interroger explicitement sur leur raison d'être, leur nature, leur fonctionnement. Nous sommes par cela même loin de la haute tradition de l'enseignement scolaire, dont le premier principe est de tenir bon sur la question de la problématique du réel étudié. Cela dit, *ȳ* n'en reste pas moins un jeune Occitan fort sympathique.

c) Plusieurs additifs ou commentaires mériteraient d'être apportés. Je m'arrêterai sur un aspect central de l'analyse : la *pédagogie de l'ostension* – qui limite les frais didactiques mais en ne faisant faire, souvent, que de fausses économies. Je me réfère ici à un entretien avec l'ethnomusicologue franco-israélien Simha Arom (né en 1930) publié dans l'ouvrage dirigé par Ruth Scheps, *La science sauvage. Des savoirs populaires aux ethnosciences* (Seuil, 1993) sous le titre « Musiques traditionnelles ». J'en extrais ceci, qui se rapporte au travail de terrain d'Arom chez les Pygmées :



... un jour, aussitôt après avoir enregistré une formule de tambour qui me semblait complexe, je l'ai transcrite, certain de l'avoir notée correctement. Entouré de plusieurs pygmées, tous musiciens chevronnés, j'ai frappé cette formule sur le tambour. Ils m'ont fait de larges sourires, en me laissant entendre que « ce n'était pas ça » ; or j'étais sûr que « c'était ça »... Au bout de nombre d'essais, tous aussi infructueux les uns que les autres, j'ai soudain compris que leur réponse ne concernait pas du tout la formule rythmique que je jouais, mais l'endroit de la peau du tambour que je frappais. (p. 197)

Que faut-il « mimer » de ce qu'on vous laisse voir – mais que vous regardez mal – pour le reproduire de façon « authentique » ? Telle est la question. Dans le cas précédent, l'ethnomusicologue ressemble à un bon élève « occidental » pris en défaut parce qu'il a détaché le son à produire des contingences *apparentes* de sa production : il ne frappe pas « au bon endroit ». Mais sa science de la musique lui permet alors de penser la difficulté rencontrée et de la contourner :

Leur refus était dû à la sonorité de mes frappes et non à leur espacement dans le temps. En d'autres termes, ils réagissaient au paramètre *timbre* là où je m'attendais à ce qu'ils se prononcent sur le *rythme*. Afin de vérifier l'adéquation de ce dernier, il convenait dès lors de neutraliser le premier. Pour ce faire, l'idée m'est venue de frapper la même formule sur le bord de la table de camping autour de laquelle nous étions assis. Tous ont alors acquiescé par des hochements de fête, signifiant : « Nous y voilà ! » (p. 197)

Le réel est compliqué ! Pour qui n'aurait pas en tête ce qu'est le timbre, je reproduis les premières lignes de l'article "Timbre musical" de l'encyclopédie *Wikipedia* (en espagnol) :

El **timbre** es la cualidad del **sonido** que permite distinguir la misma nota producida por dos instrumentos musicales diferentes. A través del timbre somos capaces de diferenciar dos sonidos de igual **frecuencia** fundamental (o **tono**) e **intensidad**.

3. Types de textes

a) Les textes sur lesquels on peut faire porter une analyse didactique relèvent de *types* divers. Le type le plus familier est le compte rendu d'observation d'une situation réellement observée. En voici un fragment, que j'extrais du livre *Un plaisir de collègue* de Luc Cédelle (Seuil, 2008).

Les couleurs en 6^e

« Nous allons travailler le mélange. Comment, à partir de seulement deux couleurs, obtenir le plus de couleurs possible ? On va commencer par s'installer. » Remue-ménage général mais, comme pour un équipage de navire, dans un ordre fixé à l'avance. Des responsables pour tout : pour les pinceaux, les pots, la peinture, le papier, l'eau... Du papier bon marché est disposé sur les tables pour les protéger et de petites feuilles de papier à dessin sont distribuées. Les gros tubes d'acrylique passent de main en main, parfois pressés un peu généreusement – « Hé, je vous rappelle que ça coûte cher... » – pour déposer à chaque place, à même la table, deux noix de couleur.

Le groupe est divisé en trois parties, chacune disposant d'un jeu de couleurs différent : jaune et bleu d'un côté, jaune et rouge au milieu, bleu et rouge de l'autre côté. La consigne est donnée : « Avec ces deux couleurs, vous allez chercher à obtenir douze couleurs différentes, ou douze nuances si vous préférez. Bien entendu, sans compter les deux couleurs d'origine. » Scepticisme général chez les petits 6^e : objections, questions... Mais, rapidement, on n'entend plus que les pinceaux tinter dans les pots. Et différentes méthodes se révèlent. Certains partent d'une couleur pure, du jaune par exemple, pour y ajouter précautionneusement une infime touche de bleu et démarrer ainsi, tache après tache, leur transition du jaune-vert au vert-jaune, etc. D'autres mélangent plus hardiment. Au bout d'un moment, les aventureux et les prudents en sont au même point : à partir de cinq ou six nuances obtenues, l'affaire se complique.

b) Un deuxième type de texte décrit une situation à *faire advenir* ou qui pourrait advenir : ainsi en va-t-il avec les *scénarios didactiques* de séances, qui nous sont également familiers. Dans ce cas, l'utilisateur visé par l'auteur du texte est censé *excrire* de celui-ci une certaine *organisation didactique* en vue de la réaliser en quelque institution. Voici de cela un exemple, proposé lors d'un examen du type évoqué plus haut, où l'institution visée est la famille.

Comment aider l'enfant [élève de CP] à relire ?

► S'il connaît par cœur la phrase à relire, modifier la tâche

En début d'année, quand les parents demandent à l'enfant d'ouvrir son livre et de lire la (ou les) phrase(s) étudiée(s) en classe, ils sont parfois surpris de le voir s'exécuter sans même jeter un œil sur sa page : il la sait par cœur, pourquoi ferait-il semblant de la décoder ?

Que faire dans ce cas-là ? Plusieurs solutions peuvent être retenues :

- lui faire « relire » la phrase en pointant chaque mot avec son doigt et en vérifiant qu'il associe bien le mot prononcé et le mot désigné (la technique du doigt qui accompagne le regard et la voix ne doit pas être systématique mais c'est néanmoins une technique de bon sens dont on aurait tort de se priver : elle met en scène de manière pertinente les relations entre oral et écrit, encore mal assurées en début d'année) ;
- lui demander de faire voir où se trouve dans la phrase un mot donné par l'adulte ;
- relire le début de la phrase, s'interrompre et demander à l'enfant d'indiquer le mot qui suit l'endroit où on s'est arrêté ;
- lui faire lire le dernier mot de la phrase (en lui demandant de le montrer), puis l'avant-dernier et ainsi de suite (lecture à reculons) ;
- masquer la phrase par une bande de papier et la démasquer progressivement pour qu'elle apparaisse mot par mot, puis, éventuellement, syllabe par syllabe. Faire relire ensuite de manière fluide ;
- suggérer à l'enfant de relire en commettant volontairement une erreur que l'adulte devra détecter : permutation, oubli ou ajout de mot, inversion de syllabe, changement de lettre... Puis inverser les rôles : c'est l'adulte qui se trompe et l'enfant qui détecte (sourire garanti) !

► S'il a un peu de mal, l'aider beaucoup

...

Extrait de Roland Goigoux et Sylvie Cèbe, *Apprendre à lire à l'école. Tout ce qu'il faut savoir pour accompagner l'enfant* (Paris, Retz, 2008).

Voici maintenant une analyse didactique de ce texte, proposée à titre de corrigé d'examen.

Le texte examiné doit être considéré de deux points de vue solidaires. D'une part, ce texte est porteur d'un enjeu didactique possible pour les parents Y d'un enfant x élève de CP : son ambition est de nourrir un système autodidactique $S(Y; \emptyset; \partial)$, le symbole ∂ (« d rond ») désignant ici une certaine praxéologie didactique que les auteurs du texte s'efforcent de faire connaître aux parents concernés. Sur le fonctionnement possible du système $S(Y; \emptyset; \partial)$ afin d'excrire la praxéologie ∂ inscrite par les auteurs dans leur texte, celui-ci est muet : peut-être doit-on comprendre en ce cas que, pour ces auteurs, l'excription de ∂ ne devrait pas poser à Y de problème particulier. D'autre part, et conséquemment, le texte se réfère à un possible système didactique auxiliaire (SDA) du système didactique principal (SDP) qu'est une classe de CP. Ce SDA peut être écrit $S(x; Y; \heartsuit)$, où x est un enfant élève de CP et où Y sont ses parents. L'enjeu didactique $\heartsuit$ est une certaine praxéologie de « relecture », $[T/\tau/\theta/\Theta]$, où le type de tâches T consiste à *dire* (à haute voix) *des phrases écrites déjà étudiées en classe*, tandis que la technique τ pour ce faire consiste « simplement » à *lire* ces phrases écrites. La praxéologie ∂ adressée à Y se veut alors une réponse à la question suivante : que peut faire Y s'il arrive que x substitue à la technique τ une autre technique, τ^* , consistant, non pas à *lire* les phrases qui lui sont présentées de nouveau, mais à se les *remémorer* après les avoir « apprises par cœur » en classe ? Quelles conditions Y peut-il créer qui contraindraient x à lire réellement ces phrases ? Un premier ensemble de conditions consiste à imposer à x de dire la phrase « en pointant chaque mot avec son doigt » au fur et à mesure de sa lecture supposée, tandis que Y vérifie que x « associe bien le mot prononcé et le mot désigné ». Cette technique didactique (pour Y) contraint x à adopter une technique de lecture (où le doigt accompagne « le regard et la voix ») qui semble critiquée, sans doute comme trop naïvement mécaniste ; aussi les auteurs en proposent une justification, minimale au plan technologique, mais explicite – cette technique, avancent-ils, « met en scène de manière pertinente les relations entre oral et écrit, encore mal assurées en début d'année ». D'une manière générale, la technique didactique proposée à Y par les auteurs revient à changer momentanément le type de tâches T que x devra accomplir, de façon qu'une tâche t^* du nouveau type T^* ne puisse être accomplie si x n'effectue pas un certain repérage dans la phrase écrite, ce repérage étant lui-même censé ne pouvoir se réaliser qu'à travers la *lecture* par l'enfant d'une certaine partie de la phrase. Outre le type T_1^* déjà précisé, ils proposent successivement les types de tâches suivants : x doit montrer « où se trouve dans la phrase un mot

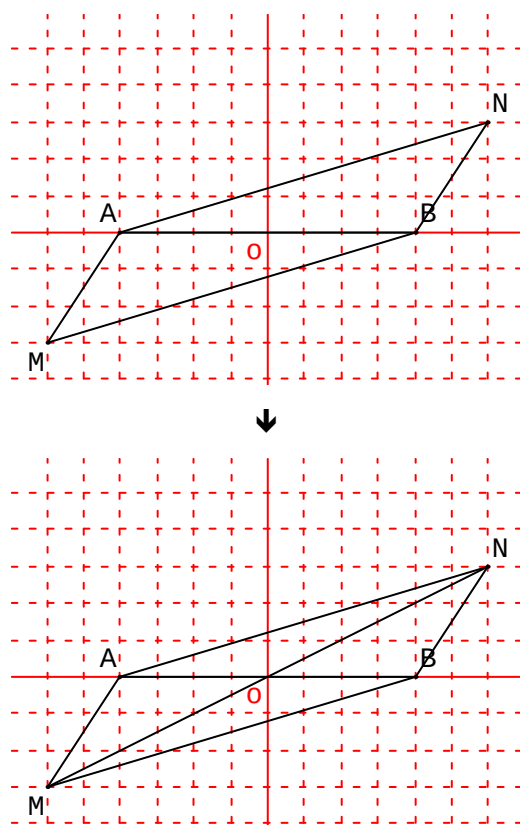
donné par l'adulte » (T_2^*) ; Y lit à haute voix le début de la phrase puis s'interrompt, x devant alors montrer « le mot qui suit l'endroit où on s'est arrêté » (T_3^*) ; x doit lire la phrase « à reculons » en prononçant et en montrant simultanément le dernier mot, puis l'avant-dernier, etc. (T_4^*) ; Y dévoile progressivement les mots ou les syllabes dont la succession constitue la phrase et x doit les lire au fur et à mesure de leur dévoilement (T_5^*) ; x doit lire la phrase en commettant une erreur volontaire que Y devra identifier (T_6^*) ; Y doit lire la phrase en commettant une erreur volontaire que x devra identifier (T_7^*). À l'instar du type *T* lui-même, ces différents types de tâches participent du *moment du travail de la technique de lecture*, qu'ils mettent pour cela en jeu dans des conditions inhabituelles. De tels exercices de « lecture » peuvent paraître arides, comme l'est souvent le travail de la technique ; malgré cela, soulignent les auteurs, le type de tâches T_7^* , qui inverse les rôles habituels, devrait susciter une certaine jubilation chez x. Bien entendu, on peut toujours imaginer (même si une telle issue paraît très improbable) que la technique didactique préconisée ne vienne pas à bout de la propension de x, mis devant une tâche *t* du type *T*, à recourir à la technique τ^* , alors même que, par ailleurs, x aurait appris très rapidement à accomplir fort bien les tâches des types T_1^* à T_7^* .

b) Un troisième type de textes décrit une certaine *organisation praxéologique* ♥ présentée comme enjeu didactique possible d'un certain type de systèmes didactiques. On retrouve ici le cas rencontré avec la vidéo analysée plus haut : le « texte » ne décrit pas une situation didactique observée ou à créer : il est un exposé *E* d'une organisation praxéologique ♥ face à laquelle il se situe comme une aide à l'étude possible d'une étude possible. Ce type de textes comporte des sous-types culturellement bien connus – recettes de cuisine, modes d'emploi, patrons de couture, etc. Pour cela même, il y a une plus grande facilité à rencontrer des textes de ce troisième type, en sorte qu'on vu fleurir dans les copies d'étudiants l'analyse de recettes ou de modes d'emploi. L'expérience et l'analyse aidant, je demande désormais aux étudiants d'éviter ces rencontres du troisième type, qui peuvent certes conduire à une riche analyse *praxéologique* mais dont le traitement didactique relève moins de l'analyse que de l'*ingénierie* : comment utiliser la vidéo analysée plus haut pour (faire) apprendre l'accord de *do* majeur par exemple ?

INGÉNIERIE DIDACTIQUE

1. Le théorique et l'expérimental en géométrie

a) Les développements qui suivent s'inscrivent dans la perspective ouverte lors de la séance précédente à propos du problème d'ingénierie didactique des PER formulé en ces termes : *Que pourrait être un scénario de PER qui fasse vivre les probabilités comme modélisant la variabilité statistique dans une classe de 3^e aujourd'hui ?* À titre introductif, je voudrais pourtant revenir ici sur un cas bien connu : celui de la *géométrie*. La géométrie a pour objet l'espace $\mathcal{E}$ – l'espace autour de nous. Cet objet est de nature physique ; en dernier ressort, c'est donc *l'expérimentation* qui décide de ce qui y est *vrai* ou *faux*. C'est par exemple l'expérimentation (voir ci-après) qui nous dira s'il est vrai que, dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.



b) L'objet de la géométrie *expérimentale* est d'établir, par l'expérimentation, les propriétés de l'espace. L'objet de la géométrie *théorique* est d'organiser fructueusement les propriétés de l'espace sous une forme hypothético-déductive : ainsi la *théorie géométrique disponible* (TGD) devra-t-elle permettre de décider si tel énoncé θ est *déductible*, c'est-à-dire si c'est un *théorème* de ladite théorie. S'il en est ainsi, cet énoncé est alors *vrai* dans l'espace (si la théorie est juste), ce qu'on peut alors vérifier par l'expérimentation. Avec des notations classiques en logique mathématique, on a ainsi l'implication suivante :

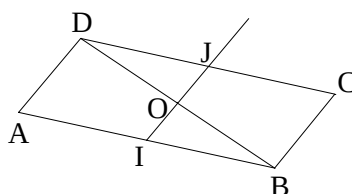
$$\vdash_{\text{TGD}} \theta \Rightarrow \models_{\mathcal{E}} \theta.$$

Bien entendu, on doit avoir aussi la réciproque :

$$|=_{\mathcal{E}} \theta \Rightarrow \vdash_{\text{TGD}} \theta.$$

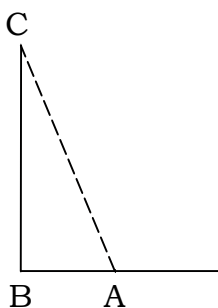
En d'autres termes, si θ est vrai dans $\mathcal{E}$, alors θ doit être déductible dans la TGD (faute de quoi la TGD sera à compléter). Dans le cas de l'énoncé θ relatif aux diagonales d'un parallélogramme, on peut le déduire comme suit (on notera que le travail déductif effectué ci-après *n'est pas* homologue au travail expérimental évoqué ci-dessus).

Dans la figure ci-après, ABCD est un parallélogramme, I est le milieu de [AB] et (IJ) est parallèle à (BC).



D'après le 2^e théorème des milieux, dans le triangle ABD, (IJ) coupe [BD] en son milieu O ; par suite, dans le triangle BDC la droite (OJ) coupe [CD] en son milieu, J. D'après le 3^e théorème des milieux, dans le triangle ABD, on a $IO = AD/2$ et, dans le triangle BDC, on a $OJ = BC/2$. Comme $AD = BC$, on a $IO = OJ$: O est donc le milieu de [IJ] et on en conclut que la diagonale [BD] passe par le milieu de [IJ], qui est aussi le milieu de [BD]. On montre de même que la diagonale [AC] passe par le milieu de [IJ], O, qui est aussi le milieu de [AC]. Les deux diagonales se coupent donc en leur milieu.

- c) En règle générale, on peut *mesurer* une grandeur. Mais, dès lors qu'on dispose d'une théorie de l'espèce de grandeurs à laquelle elle appartient, on peut en général la *calculer* – moyennant le mesurage d'autres grandeurs. Considérons l'exemple élémentaire suivant. On pose une échelle [AC] de 8,2 m de longueur contre un mur ; à quelle hauteur BC arrive-t-elle si $AB = 3,2$ m ? Si l'on ne peut pas mesurer [BC], on peut *calculer* sa longueur : d'après le théorème de Pythagore, on a en effet :



$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{8,2^2 - 3,2^2} \text{ m} \approx 7,4 \text{ m}.$$

C'est là le miracle de la géométrie : les longueurs que l'on ne peut mesurer – la distance de la Terre à la Lune, par exemple –, on peut les calculer. On va voir que tout cela reste vrai avec les fréquences et les probabilités.

2. Le cas des probabilités (suite)

- a) De même qu'on a parlé de géométrie expérimentale, on peut parler de *statistique expérimentale*. Imaginons par exemple que nous disposons de

deux générateurs aléatoires de nombres entiers compris entre 1 et 4 dont on suppose que, sur de longues séries, ils donnent à peu près le même nombre de sorties égales à 1, à 2, à 3 et à 4, ce qu'on énoncera encore ainsi : les *fréquences théoriques* des sorties de 1, 2, 3, 4 sont égales à 0,25. Lors d'une sortie, la somme des nombres obtenus varie entre 2 et 8. Quelle sera la fréquence d'obtention de la somme 6 sur une longue série de sorties ? Pour répondre, on peut aujourd'hui *simuler* une telle expérimentation (ci-après).

Rang	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4
19980	3	3	6	0,18253253
19981	3	4	7	0,1825234
19982	1	4	5	0,18251426
19983	2	3	5	0,18250513
19984	2	4	6	0,18254604
19985	2	4	6	0,18258694
19986	2	2	4	0,1825778
19987	1	4	5	0,18256867
19988	4	1	5	0,18255954
19989	1	3	4	0,1825504
19990	3	4	7	0,18254127
19991	4	2	6	0,18258216
19992	2	4	6	0,18262305
19993	4	4	8	0,18261391
19994	1	1	2	0,18260478
19995	4	2	6	0,18264566
19996	3	4	7	0,18263653
19997	4	1	5	0,18262739
19998	4	3	7	0,18261826
19999	2	1	3	0,18260913
20000	2	4	6	0,18265

Sur le tableau précédent, obtenu avec Excel, les colonne 1 et 2 donnent les sorties des deux générateurs aléatoires, la colonne 3 la somme des sorties, enfin la colonne 4 la fréquence de l'obtention de la somme 6. L'échantillon est de taille 20 000 ; la fréquence obtenue est 0,18265.

b) Qu'en est-il de la « fréquence limite » postulée ? Comment passer à une statistique *théorique*, qui nous permette de la *calculer* ? Lors de la séance précédente, on a vu, en suivant Gnedenko et Khintchine, une première théorisation permettant un calcul rudimentaire très efficace dans les cas simples. Désignons par X et Y respectivement les sorties affichées par le premier et par le second générateur aléatoire. La somme $X + Y$ est égale à 6 dans trois cas : $X = 2$ et $Y = 4$; $X = 4$ et $Y = 2$; $X = 3$ et $Y = 3$. Supposons effectués 10 000 tirages ; dans un quart des cas, soit dans 2500 cas, on a $X = 2$; sur ces 2500 cas, on a $Y = 4$ dans un quart des cas, soit dans 625 cas. On observera donc 625 fois les sorties simultanées $X = 2$ et $Y = 4$. On observera de même 625 fois $X = 4$ et $Y = 2$ et encore 625 fois les sorties $X = 3$ et $Y = 3$. La somme $X + Y$ sera donc égale à 6 dans $3 \times 625 = 1875$ cas sur

10 000 : la fréquence d'apparition d'une somme égale à 6 est donc 0,1875 ou 18,75 %.

c) Les résultats de la simulation évoquée ci-dessus montrent que, au bout de 20 000 sorties, la fréquence *empirique observée*, égale en l'espèce à 0,18265, est proche de la fréquence *théorique calculée*, 0,1875, mais n'en est pas très proche : l'erreur relative, soit,

$$\frac{|0,18265 - 0,1875|}{0,1875}$$

est de l'ordre de 3 %. On peut réduire cette erreur en multipliant les échantillons (ce qui se fait d'un clic avec Excel). On a ainsi, ci-après, les fréquences observées sur 50 échantillons de taille 20 000, les valeurs étant rangées par ordre croissant (elles vont de 0,1819 à 0,19535).

0,1819 ; 0,18275 ; 0,1832 ; 0,1834 ; 0,18425 ; 0,18445 ; 0,18505 ; 0,1851 ;
0,18515 ; 0,18525 ; 0,1854 ; 0,18585 ; 0,1859 ; 0,186 ; 0,1863 ; 0,1864 ;
0,1865 ; 0,1867 ; 0,1868 ; 0,18725 ; 0,1873 ; 0,18735 ; 0,1874 ; 0,1874 ;
0,1874 ; 0,18765 ; 0,1877 ; 0,1878 ; 0,18795 ; 0,1881 ; 0,1881 ; 0,1881 ;
0,18835 ; 0,1885 ; 0,18855 ; 0,1887 ; 0,1889 ; 0,1891 ; 0,1892 ; 0,18925 ;
0,18925 ; 0,18965 ; 0,18995 ; 0,19 ; 0,1908 ; 0,1913 ; 0,19135 ; 0,19155 ;
0,1918 ; 0,19535

La *moyenne* des fréquences *empiriques* (qui est également une fréquence empirique) est alors égale 0,187548, ce qui est beaucoup plus proche de la fréquence *théorique calculée*, 0,1875.

3. Les probabilités et la statistique théorique

a) La définition de la notion de probabilité comme « fréquence limite » (ou fréquence théorique) est en fait traditionnelle. J'ai commencé à le montrer lors de la séance précédente de ce séminaire. Je voudrais ici ajouter quelques pièces au dossier. Je citerai d'abord l'ouvrage de Yakov G. Sinai intitulé *Probability theory : An introductory course* (Springer-Verlag, 1992). Dans le passage qui suit, $\mathcal{F}$ désigne une σ -algèbre de parties de Ω , c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω tel que : 1) $\Omega \in \mathcal{F}$; 2) si $C \in \mathcal{F}$ alors $\Omega \setminus C \in \mathcal{F}$; 3) si $C_1, \dots, C_k, \dots \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$.

We now return to the general case and turn our attention to the central concept of our theory, the concept of probability. We noted earlier that probability is a special case of measure. Now consider an arbitrary measurable space $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definition 1.7. A probability measure is a function P , defined on $\mathcal{F}$, which satisfies the following conditions:

- 1) $P(C) \geq 0$ for any $C \in \mathcal{F}$;
- 2) $P(\Omega) = 1$;
- 3) if $C_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$ and $C_i \cap C_j = \emptyset$, then

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i).$$

The number $P(C)$ is called the probability of the event C .

We now discuss the meaning of properties 1) – 3). The concrete idea of probability of an event or a phenomenon or an occurrence is the frequency of occurrence of this event, or the “chances” of its taking place. Since the frequency of occurrence is always non-negative, a probability must be non-negative. Property 2) means that when we consider an experiment whose outcome can be any point $\omega \in \Omega$ we are dealing with a situation where some outcome of the experiment will be observed. Sometimes property 2) is called the normalization property. Those events C for which $P(C) = 1$ are called certain (they have a 100% chance of occurrence). Since $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ and $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$, and so $P(\emptyset) = 0$. Those events C for which $P(C) = 0$ are called impossible (0% chances of occurrence). The meaning of property 3) will be developed gradually. It is called the property of countable additivity, or σ -additivity of probability measures. It is fundamental to general measure theory. Properties 1) – 3) show that probabilities are normed measures.

Definition 1.8. The triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is called a probability measure. (pp. 6-7)

b) Voici maintenant un extrait du chapitre 2, intitulé « La probabilité », du traité classique d’Alfred Rényi, *Calcul des probabilités* (Dunod, 1966) où l’on retrouve la manière d’élaborer la théorie des probabilités comme modélisant les fréquences « limites ».

§ 3. ALGÈBRES DE PROBABILITÉ

La théorie que nous développerons dans ce livre a été fondée par A. N. Kolmogorov. Elle est la base du développement moderne du calcul des probabilités. Dans cette théorie on part habituellement de l’hypothèse suivante : à chaque résultat possible d’une épreuve (ou du moins à chacun des résultats envisagés), autrement dit à chaque élément d’une algèbre d’événements, correspond un nombre : la probabilité de l’événement considéré. Si nous effectuons une épreuve n fois et si l’événement A se produit k fois, on a

$$0 \leq k \leq n, \text{ d'où : } 0 \leq k/n \leq 1 ;$$

la fréquence relative d'un événement est donc toujours un nombre compris entre 0 et 1. Il est clair que la probabilité de chaque événement devra aussi être comprise entre 0 et 1. De plus la fréquence relative d'un événement certain est évidemment égale à 1 et celle d'un événement impossible égale à 0. De même la probabilité de l'événement « certain » sera donc égale à 1 et celle de l'événement « impossible » égale à 0. Si A et B sont deux résultats possibles de la même épreuve qui s'excluent mutuellement, si, quand on répète n fois l'épreuve, A se produit k_A fois, et B , k_B fois, l'événement $A + B$ s'est produit $k_A + k_B$ fois. Si f_A, f_B, f_{A+B} sont les fréquences relatives de A, B et $A + B$, on a

$$f_{A+B} = f_A + f_B.$$

En d'autres termes, la fréquence relative de la somme de deux événements incompatibles est toujours la somme des fréquences relatives de chacun des deux événements. Il doit donc en être de même pour les probabilités. C'est pourquoi nous poserons les axiomes suivants :

$\alpha)$ À tout élément A d'une algèbre d'événements $\mathcal{A}$ correspond un nombre non négatif $P(A)$ que nous appelons probabilité de A .

$\beta)$ La probabilité de l'événement certain égale 1, $P(I) = 1$.

$\gamma)$ $AB = 0 \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Une algèbre d'événements $\mathcal{A}$ dans laquelle, à tout élément A , correspond un nombre $P(A)$ qui satisfait à $\alpha), \beta), \gamma)$ s'appelle une *algèbre de probabilité*.

Étudions d'abord quelques conséquences des axiomes :

Théorème 1 :

$$B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leq P(A).$$

Démonstration. – $B \subseteq A \Rightarrow A = B + C$, où $C = \overline{AB}$, donc $BC = 0$, et, d'après l'axiome $\gamma)$

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

Comme, en raison de l'axiome $\gamma)$, $P(C) \geq 0$, le théorème 1 en résulte immédiatement.

Le théorème 1 peut aussi être déduit directement de la relation entre probabilité et fréquence relative. En effet si la réalisation de B entraîne celle de A (c'est-à-dire si $B \subseteq A$), il en résulte que, dans toute série d'épreuves, l'événement A se produit au moins aussi souvent que B .

Comme $A \subseteq I$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, il résulte du théorème 1 que

$$P(A) \leq 1 \text{ pour tout } A.$$

Une autre conséquence importante des axiomes est que nous pouvons exprimer au moyen de la probabilité de A celle de l'événement « opposé » $\overline{A}$. En effet :

$$A + \bar{A} = I \text{ et } A\bar{A} = O,$$

donc, en raison de l'axiome γ)

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(I) = 1.$$

Nous pouvons énoncer le

Théorème 2. – *Quel que soit l'événement A*

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(I) = 1.$$

Puisque $O = \bar{I}$, il en résulte

$$P(O) = 1 - P(I) = 1 - 1 = 0 ;$$

la probabilité de l'événement impossible est nulle.

Le théorème 2 peut aussi être déduit directement de notre définition concrète de la probabilité. En effet si dans une série de n épreuves l'événement A se produit k fois, $\bar{A}$ se produit exactement $(n - k)$ fois. Donc, pour leurs fréquences relatives, f_A et $f_{\bar{A}}$ on a

$$f_A + f_{\bar{A}} = 1.$$

L'axiome γ) pose que la probabilité de la somme de deux événements incompatibles est égale à la somme des probabilités de chacun d'eux. On en déduit aussitôt le

Théorème 3. – *Si les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, c'est-à-dire si $A_i A_j = O$ pour $i \neq j$, alors*

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

La démonstration se fait par récurrence... (pp. 23-28)

On rencontre ici un choix fréquent dans les débuts du calcul des probabilités : l'établissement d'un énoncé mathématique, par exemple $P(A + B) = P(A) + P(B)$ lorsque $A \cap B = \emptyset$, soit à partir du mathématisé (ici, les fréquences), soit comme théorème de la théorie disponible.

c) Une question qui mérite d'être posée est évidemment celle du rejet puis de l'oubli (ou de la péjoration) du *fondement* statistique – fréquentiste – du calcul des probabilités. Voici d'abord un autre passage du traité de Rényi, qui écarte la « définition de Laplace » de la probabilité d'un événement (au profit de la définition fréquentiste).

§ 4. ALGÈBRES DE PROBABILITÉ FINIES

Quand l'ensemble des événements d'une algèbre de probabilité est fini, on peut, comme on l'a vu au chapitre I, représenter ces événements par toutes les parties d'un ensemble fini Ω . Soit N le nombre des éléments de Ω ; notons-les $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$. La probabilité $P(A)$ de tout événement A est alors bien déterminée par la donnée de P pour les ensembles réduits à un seul élément, soit $\{\omega_i\}$, avec $P(\{\omega_i\}) = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Alors, pour tout événement,

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i,$$

et comme $P(\Omega) = 1$, les nombres (non négatifs) p_i satisfont à la condition

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

Un cas particulier important est celui où tous les p_i sont égaux, donc égaux à $1/N$. Nous appellerons *algèbres de probabilité classiques* ces algèbres particulières, car le calcul des probabilités classique s'est occupé exclusivement de ce cas.

Au début du développement du Calcul des Probabilités on voulait ramener la solution de tous les problèmes à cette forme. Mais dans de nombreux cas c'est impossible ou bien artificiellement et inutilement compliqué. Cependant, comme les probabilités dans les jeux de hasard (pile ou face, dés, roulette, cartes, etc.) se calculent effectivement de cette façon et comme, dans beaucoup de questions de physique ou de technique, on peut pratiquement s'y ramener, il n'est pas inutile d'étudier spécialement ce cas (parfois appelé « cas de Laplace » [N. d. T]).

Dans une algèbre de probabilité classique

$$P(A) = K/N$$

où K est le nombre des éléments de A . Cela nous amène à la « définition classique » de la probabilité qui s'énonce ainsi : la *probabilité* est le quotient du nombre des cas favorables à l'événement considéré par le nombre de tous les cas possibles s'ils sont équiprobables.

La « définition classique » n'est plus considérée aujourd'hui comme une définition mais seulement comme une méthode pour calculer les probabilités, dans une algèbre de probabilité finie dont les événements élémentaires, pour certaines raisons (par exemple propriétés de symétrie), ont la même probabilité. (pp. 33-34)

Ce qui *fonde* la notion de probabilité, c'est donc le point de vue des fréquences empiriques. La « définition de Laplace » apparaît alors, non comme une *définition*, mais comme un moyen de *calculer* une probabilité,

lorsque l'expérience aléatoire étudiée paraît satisfaire la condition d'équiprobabilité des événements élémentaires.

d) Je m'arrêterai maintenant sur un ouvrage sensiblement de la même époque, qui a le mérite de présenter ensemble, en les combinant en fonction des besoins, calcul infinitésimal et statistique : il s'agit du livre *Calculus and Statistics* de Michael C. Gemignani, dont la première édition est de 1970 (j'utilise ici l'édition parue chez Dover en 2006). Le premier chapitre de ce livre s'intitule "The Basic Concepts of Function and Probability". En voici le sommaire :

1.1 Sets and functions	1
1.2 The notion of probability	6
1.3 The basic laws of probability	11
1.4 More basic facts about probability	15

Le premier « symptôme » d'une évolution alors en cours du statut de la notion de probabilité se trouve sans doute dans le fait suivant : la section intitulée "The notion of probability" est en fait consacrée à la notion d'événement et à l'algèbre des événements. Mais il y a plus. Cette section comporte – à l'instar des autres – un ensemble d'exercices ; le sixième et dernier des exercices proposés, qui précède immédiatement la section suivante, "The basic laws of probability", a l'énoncé que voici :

We have not yet defined what is meant by the probability of an event; however, the reader should already have some intuitive ideas about the properties of probabilities. If A is any event, we let $P(A)$ denote the probability of A . In each of the following, A and B are events. Decide which of the following statements are true and which are false. Justify each of your assertions.

- a) $P(A \cup B)$ is at least as large as $P(A)$.
- b) $P(A \cap B)$ is no larger than $P(B)$.
- c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- d) $P(A \cap B)$ is less than or equal to $P(A)P(B)$.
- e) If A and B are mutually exclusive, then $P(A \cap B)$ will have the smallest value permitted for a probability.
- f) If A is twice as probable as B , then $P(A) = 2P(B)$. (p. 10)

Ainsi donc, bien que la notion de probabilité *n'ait pas encore été définie*, l'auteur postule que "the reader should already have some intuitive ideas about the properties of probabilities". Je crois alors pouvoir reprendre ici, *mutatis mutandis*, ce que je disais à propos de l'algèbre lors de la séance 1 :

Il y a là un exemple d'un phénomène général de *vieillesse culturelle* qui conduit à couper le mathématique du mathématisé. Ainsi en va-t-il en géométrie lorsque, comme cela est de plus en plus vrai aujourd'hui, on tend à identifier, sans autre forme de procès, le plan à l'ensemble $\mathbb{R}^2$ ou l'espace à l'ensemble $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire la réalité au modèle. On substitue ainsi à la mathématisation d'une réalité physique l'étude formelle d'une structure mathématique que l'on finit par identifier à la réalité qu'à l'origine elle prétendait seulement modéliser. Revenir sur ce glissement ontologique ne va pas de soi : il faut réinvestir la réalité modélisée, il faut reprendre le processus de mathématisation, et enfin maîtriser le modèle, ce qui suppose une organisation infrastructurelle relativement lourde qui ne se réinvente pas en un tournemain.

e) Voici alors les premières lignes de la section suivante, "The basic laws of probability" :

We would like to define the *probability* $P(A)$ of an event A in such a manner that if the experiment associated with A is performed n times, then A should occur about $nP(A)$ times. [...] It follows then that if we wish to find the probability of an event A , we could perform the appropriate experiment n times. If A occurs m times out of the n trials, then we may estimate $P(A)$ to be m/n . (p. 11)

Ici se produit le retournement crucial : $P(A)$ se voit conférer une existence *première* ; et les fréquences empiriques ne sont plus alors que des « estimations » de la probabilité – alors même que, bien entendu, c'est la fréquence théorique, la probabilité, qui fournit une estimation de la fréquence empirique que l'on peut attendre lorsque n est assez grand. Mais ce statut *second* donné ici aux fréquences empiriques va être encore minoré. Notant $R(A)$ la fréquence empirique m/n , l'auteur ajoute : "We have said that $R(A)$ could be used to estimate $P(A)$. However, the 'relative frequency' approach to probability has certain limitations". Que sont ces limitations ? La première tient à ce que "in order to obtain a reasonably good estimate of a probability, a fairly large number of trials would have to be performed", ce qui n'est pas faux, certes. Une seconde limitation, plus étonnante, semble bien relever de la mauvaise foi ; la voici :

Although a probability estimate based on a large number of trials should be fairly accurate, there is always the possibility that the unusual will happen. For example, even though the true probability of flipping heads with a fair coin is $\frac{1}{2}$, it is not impossible to flip 1000 consecutive tails.

Un tel événement – une suite ininterrompue de 1000 faces –, de probabilité $0,5^{1000} = 2^{-1000}$, est pratiquement impossible : en observant que l'égalité $2^\alpha = 10$ équivaut à $\alpha = \ln 10 / \ln 2$, on a en effet : $2^{1000} = (2^\alpha)^{10/\alpha} = 10^{10/\alpha} = 10^{1000 \ln 2 / \ln 10} = 10^{301,029995663981195213738894724...} > 10^{301}$.

f) Il est alors frappant que la prise de position de l'auteur ne l'empêche pourtant pas de tirer ensuite les axiomes de la théorie des probabilités des propriétés des fréquences. Ayant établi les égalités

$$\begin{aligned} R(A) + R(\bar{A}) &= 1, \\ R(A) + R(B) &= R(A \cup B) + R(A \cap B), \\ \text{soit } R(A \cup B) &= R(A) + R(B) - R(A \cap B), \\ \frac{R(A \cap B)}{R(A)} &= R(B | A), \\ \text{soit } R(A \cap B) &= R(A) R(B | A), \end{aligned}$$

Gemignani écrit :

If we assume that for a large number of trials, $R(A)$ is a “good” estimate of $P(A)$, then the probabilities should satisfy the same relationships that relative frequencies satisfy. In particular, motivated by the relationships among relative frequencies derived in this section, we make the following *assumptions* about probabilities.

Assumption 1. If A is any event, then $P(A)$, the probability of A , is a real number which lies between 0 and 1, inclusive. $P(A) = 0$ if A is the empty set (an impossible event) and $P(A) = 1$ if A is the entire sample space (a certain event).

Assumption 2. If A and B are events, then

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Assumption 3. For any events A and B ,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B)$$

if $P(A)$ and $P(B)$ are not 0. If either $P(A)$ or $P(B)$ is 0, then $P(A \cap B) = 0$.

En d'autres termes, l'auteur propose bien une théorie axiomatique des probabilités dont les axiomes sont calqués sur le comportement des fréquences empiriques.

4. Un bilan d'étape

a) Un petit nombre de conclusions provisoires découlent de ce qui précède. La première concerne la statistique *expérimentale* : l'expérimentation visant à préciser la « fréquence limite » d'un événement est en règle générale impossible au-delà d'un certain ordre de grandeur de la taille n des échantillons observés (la production d'une usine ne peut être « aussi grande

qu'on veut », par exemple) – ce qui justifie l'intervention du *calcul* (des probabilités). Plus généralement, et en contraste avec ce qui semble être le cas en géométrie expérimentale, en statistique l'expérimentation proprement dite est souvent délicate, lorsqu'elle n'est pas tout simplement impossible.

b) Une deuxième conclusion concerne l'intégration du concept de probabilité en statistique, qui plonge l'univers des fréquences observées dans un monde plus vaste, où l'on suppose des fréquences « limites », « théoriques », *ce qui change la conceptualisation de la variabilité statistique*. Considérons à ce propos l'énoncé suivant, emprunté à Gnedenko et Khintchine (1969) :

Dans une usine, 96 % des articles produits sont acceptés au contrôle (événement *A*) ; sur 100 articles ainsi acceptés, 75 sont reconnus comme étant de première qualité (événement *B*). On demande quelle est la probabilité pour qu'un article fabriqué dans cette usine soit de première qualité. (p. 25)

Que signifie cet énoncé ? Reformulons-le ainsi :

Dans une usine, 96 % des articles produits sont acceptés au contrôle (événement *A*) ; sur 100 articles ainsi acceptés, 75 sont reconnus comme étant de première qualité (événement *B*). *On demande le pourcentage des articles fabriqués dans cette usine qui sont de première qualité.*

Ici, la notion de probabilité – de fréquence *théorique* – a formellement disparu. De fait, on pourrait penser que les pourcentages proposés ou demandés portent sur une population déterminée, finie, par exemple de 500 articles produits. Dans ce cas, $0,96 \times 500 = 480$ articles auront été acceptés au contrôle ; parmi ceux-là, 75 %, soit $0,75 \times 480 = 360$, auront été jugés de première qualité. Le pourcentage demandé est donc $360/500 = 72\%$. L'énoncé obtenu est alors tout proche du suivant, rédigé sous forme typiquement scolaire, et qui porte sur les pourcentages :

Dans une usine, 96 % des 500 articles produits au cours d'une certaine période ont été acceptés au contrôle ; 75 % des articles acceptés ont été reconnus comme de première qualité.

1. Combien d'articles ont été acceptés ?
2. Combien d'articles ont été reconnus de première qualité ?
3. *Quel pourcentage des articles fabriqués sont de première qualité ?*

Bien entendu, l'énoncé d'origine *ne dit pas cela*. Pour clarifier la chose, on peut le reformuler ainsi :

Dans une usine, la probabilité qu'un article produit soit accepté au contrôle (événement A) est 0,96 ; la probabilité qu'un article accepté soit reconnu comme étant de première qualité (événement B) est 0,75. On demande quelle est la probabilité pour qu'un article fabriqué dans cette usine soit de première qualité.

On est alors pleinement dans le cadre du « calcul des probabilités “comme modélisant la variabilité statistique” ». La « statistique probabiliste » plonge ainsi les situations du monde dans un univers plus grand, augmenté des probabilités des événements qui y surviennent.

c) Une troisième conclusion, qui concerne d'abord la statistique théorique – c'est-à-dire « probabiliste » –, consiste en ceci que, grâce aux moyens de calcul actuels, le « travail théorique » peut être aujourd'hui *contrôlé* par la simulation, c'est-à-dire par un travail expérimental : je n'y reviens pas ici.

d) L'intégration dans la science statistique de la notion de probabilité permet de nouvelles formes de calcul. C'est ainsi que, dans le cas étudié plus haut – d'abord par simulation, puis par des calculs d'effectifs –, le « calcul des probabilités » conduit d'abord à travailler dans l'algèbre des événements pour écrire

$$\{X + Y = 6\} = \{X = 2 \text{ et } Y = 4\} \text{ ou } \{X = 4 \text{ et } Y = 2\} \text{ ou } \{X = 3 \text{ et } Y = 3\}$$

afin et avant de se livrer au calcul de probabilités élémentaire que voici :

$$\begin{aligned} P(X + Y = 6) &= P(X = 2 \text{ et } Y = 4) + P(X = 4 \text{ et } Y = 2) + P(X = 3 \text{ et } Y = 3) \\ &= P(X = 2) \times P(Y = 4) + P(X = 4) \times P(Y = 2) + P(X = 3) \times P(Y = 3) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16} = \mathbf{0,1875}. \end{aligned}$$

Bien entendu, à ce stade, on peut trouver *plus simple* (praxéologiquement) le traitement donné plus haut, par calcul arithmétique d'effectifs. Le problème de motiver l'étude du calcul des probabilités reste donc, en ce point, en partie *ouvert*.

That's all, folks!