

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

→ Séance 5 – Vendredi 17 avril 2009

PROBLÉMATIQUES, ETC.

1. Rappels et précisions

a) Je rappellerai d'abord le petit formalisme introduit lors de la séance 4 quant aux problématiques en didactique.

- Les deux formules ci-après désignent d'abord les problématiques *de base*, respectivement *forte* et *faible* : $\{ C / \partial(K_0, C, p_0, U_0) \} ; \{ C / \Re(K_0, C, p_0, U_0) \}$. De la première à la seconde, ce qui change, c'est le prédicat, ∂ étant remplacé par $\Re$. Je rappelle que la distinction entre ensemble de *contraintes* K_0 et ensemble de *conditions* C est relative à la *position institutionnelle* adoptée (de façon réelle ou imaginaire) par le « chercheur ».

- Les deux formules suivantes désignent ensuite les problématiques *possibilistes*, respectivement *forte* et *faible* : $\{ p / \partial(K_0, C_0, p, U_0) \}$; $\{ p / \Re(K_0, C_0, p, U_0) \}$. Je ne saurais trop souligner qu'il s'agit là de problématiques qui, bien que simplement *duales* des problématiques de base correspondantes, sont peu présentes, me semble-t-il, dans les travaux « classiques » de didactique : que peut-on rencontrer ($\Re$), que peut-on apprendre (∂) sous telles contraintes et dans telles conditions ?

b) Je m'arrêterai un peu plus sur ce que j'ai appelé la problématique *primale*, que j'ai formalisée ainsi : $\{ p / \Im(p, \Pi_0, U_0) \}$. Le prédicat noté $\Im$ signifie que p « est utile voire indispensable » à l'instance U_0 pour lui permettre de concevoir ou de mener à bien le projet Π_0 .

- Un problème terminologique se pose en ce point. D'une part, en effet, l'adjectif *primal* a été ainsi employé *absolument* (pour désigner la problématique duale). D'autre part, on a associé à une problématique donnée une problématique « duale » par le schéma suivant : la problématique qui s'écrit $\{ Y / f(X_0, Y, Z_0, T_0, \dots) \}$ est *duale* de la problématique qui s'écrit $\{ Z / f(X_0, Y_0, Z, T_0, \dots) \}$. C'est ainsi que la problématique « primale » (au premier sens) correspondant à la formule $\{ p / \Im(p, \Pi_0, U_0) \}$ est duale de la problématique précisée par la formule $\{ \Pi / \Im(p_0, \Pi, U_0) \}$ – que l'on a nommée, précisément, *la problématique duale* !

- Pour éviter des confusions, je propose de parler de problématique *primordiale* pour désigner ce que j'ai donc nommé, lors de la séance 1 de ce séminaire, problématique primale, la problématique duale de la problématique primordiale étant dénommée alors problématique *interventionniste* – dans laquelle on se concentre sur les *interventions* d'un certain système praxéologique.

c) On peut résumer dans le tableau ci-après les notations précédentes (en respectant l'ordre d'introduction ci-dessus : problématique « duale » et « primale » peuvent en fait être échangées au sein d'une même colonne).

Problématique primale	Problématique <i>de base</i>	Problématique <i>primordiale</i>
Problématique duale	Problématique <i>possibiliste</i>	Problématique <i>interventionniste</i>

- Pour être complet, je dois encore ajouter que j'avais, un peu imprudemment, introduit l'adjectif « bidual » à propos d'une problématique que j'avais explicitée dans les termes suivants.

Étant donné un projet d'activité $[\Pi_0]$ pour lequel tel équipement praxéologique donné peut être jugé indispensable ou simplement utile $[p_0]$, cet équipement est-il l'essentiel de l'équipement jugé indispensable ou simplement utile à la conception et à l'accomplissement de ce projet ?

La quasi-identité sur laquelle on s'interroge ainsi peut s'écrire de la façon suivante : $\forall U \{ p / \mathfrak{S}(p, \Pi_0, U) \} \approx \{ p_0 \}$. En pratique, on voit que la question mérite d'être posée en association avec la problématique interventionniste : si p_0 est tel que $\Pi_0 \in \{ \Pi / \mathfrak{S}(p_0, \Pi, U_0) \}$ – c'est-à-dire tel que $\mathfrak{S}(p_0, \Pi_0, U_0)$ – a-t-on pour autant $\{ p / \mathfrak{S}(p, \Pi_0, U) \} \approx \{ p_0 \}$? On a ici la forme générique d'une illusion fréquente, dont la théorie de l'enquête codisciplinaire doit être débarrassée, et qui paraît liée au confinement disciplinaire actuel, lequel porte en effet à réduire l'équipement praxéologique jugé utile à cette partie relevant de telle discipline que « sert » le chercheur.

- Dans la ligne précédente, je rappelle un dernier point : l'ensemble $\{ p / \mathfrak{S}(p, \Pi_0, U_0) \}$ associé à la problématique *primordiale* s'écrit encore $\{ Q / \mathfrak{K}(Q, \Pi_0, U_0) \}$, où le prédicat $\mathfrak{K}$ désigne le fait que, pour concevoir et mener à bien le projet Π_0 , l'instance U_0 gagne à disposer d'une réponse (idoine) à la question Q . L'analyse praxéologique (et didactique) d'un projet Π_0 assumé par l'instance U_0 suppose ainsi que l'on détermine l'ensemble des questions Q telle que $\mathfrak{K}(Q, \Pi_0, U_0)$.

2. École d'été et problématique de base

a) On a évoqué la dernière fois les problèmes inhérents à l'étude d'un ensemble $\{ Q / \mathfrak{K}(Q, \Pi_0, U_0) \}$, soit encore de l'ensemble $\{ p / \mathfrak{S}(p, \Pi_0, U_0) \}$. J'y reviendrai plus loin, à propos du problème de la *refondation curriculaire* symbolisée par la formule $\Pi \Rightarrow Q \Rightarrow p$. Dans la même perspective, nous reviendrons sur la question de l'étude d'un ensemble $\{ \Pi / \mathfrak{S}(p_0, \Pi, U_0) \}$. Mais je m'arrêterai ici sur la problématique de base, dont la mise en œuvre suppose l'étude d'ensembles des types $\{ C / \mathfrak{D}(K_0, C, p_0, U_0) \}$ ou $\{ C / \mathfrak{R}(K_0, C, p_0, U_0) \}$.

b) L'occasion m'en est donnée par l'engagement que j'ai pris, avec quelques autres, de participer à la 15^e école d'étude de didactiques des mathématiques (qui se tiendra à Clermont-Ferrand, du 16 au 23 août 2009).

- Cette 15^e école d'été sera vouée à un thème unique formulé ainsi : *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. (On se reportera à cet égard à m'adresse <http://ardm.eu/contenu/th%C3%A8me>.) Dans ce cadre, la petite équipe d'intervenants réunie pour l'occasion sera amenée à assumer un certain jour encore non précisé...

- un *cours principal*, de 9 h 15 à 11 h 15 (YC) ;
- un *groupe de débat*, de 11 h 30 à 12 h ;
- un *cours associé*, de 16 h 30 à 17 h 15 (Christine Keitel, Université libre de Berlin) ;
- trois *ateliers*, de 14 h 30 à 16 h (Michèle Artaud & Gisèle Cirade, Floriane Wozniak & YC, Marianna Bosch) ;
- un *débat* d'une durée de 45 minutes préparé par le groupe de débat.

Notons que les ateliers se poursuivront les jours suivants, de façon à se déployer sur *trois* séances d'une heure et demie.

- Tout cela noté, le titre que j'ai proposé pour le cours principal est le suivant : *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder*. Avec ce sous-titre : *Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD*. J'ai eu à proposer encore un « résumé » que voici :

La notion d'ingénierie didactique a été introduite en didactique des mathématiques dans un contexte historique où le didacticien analysait et « l'ingénieur didacticien » organisait ce qui leur apparaissait (parfois de façon limite) comme des conditions possiblement modifiables par l'enseignant (qui était donc supposé pouvoir reprendre à son compte, *in fine*, les propositions et les produits de l'ingénierie didactique), et cela sans s'arrêter sur les contraintes de tous niveaux, d'apparence non modifiables, sous lesquelles lesdits produits pourraient être amenés à fonctionner. On s'efforcera de montrer que cette prudente cécité « stoïcienne » est en fait intenable tant dans le paradigme scolaire aujourd'hui en voie de dépassement que dans le paradigme épistémologique et didactique qui se dessine autour de l'idée de PER. Des études de cas illustreront ce questionnement ainsi que les éléments de réponse émergents dans diverses configurations où du didactique tente de vivre.

c) Si on rapporte le propos précédent à la formule $\partial(K, C, p, U)$, on voit qu'il y est question, en particulier, de K et de C . D'une façon générale, le travail dit d'ingénierie didactique vise à concevoir et à permettre de créer, à travers une suite de situations didactiques, à propos d'un certain système praxéologique p_0 , un ensemble C de conditions qui, étant donné l'ensemble K_0 des contraintes existantes (incluant les contraintes portées par l'instance U_0 visée), vérifie $\partial(K_0, C, p_0, U_0)$. L'ingénierie didactique entendue en ce sens s'inscrit donc dans la problématique *de base* en didactique, en général dans sa forme forte, qui conduit à étudier l'ensemble $\{ C / \partial(K_0, C, p_0, U_0) \}$. Bien entendu, ce que peut être l'ensemble C des conditions dépend, ainsi qu'on le verra, de ce que j'ai appelé, lors de la séance 4, *l'infrastructure didactique*.

d) Un point de vocabulaire doit être explicité ici. Très tôt, d'aucuns sont passés de l'emploi de l'expression « ingénierie didactique » comme désignant un certain type d'*activité* à un usage de cette expression pour désigner le *produit* de cette activité, parlant alors d'*une* ingénierie didactique. Pour ne donner ici qu'un exemple, c'est en ce sens qu'il faut entendre le sous-titre de l'article de Bernard Parzysz, « Espace, géométrie et dessin », paru dans le numéro 11/2.3 de *RDM* : « Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. » C'est ainsi au sens de « produit de l'ingénierie didactique » que la formulation du thème de l'école d'été – « En amont et en aval des ingénieries didactiques » – utilise l'expression, je crois.

e) Je n'irai pas plus loin aujourd'hui, de façon directe du moins, sur le sujet du cours que j'ai proposé. Mais nous procéderons de façon indirecte en revenant maintenant à la question des PER.

PER & ENQUÊTES CODISCIPLINAIRES

1. PER « mathématiques »

a) Lors de la séance 2 de ce séminaire, j'avais rappelé le lien génétique entre AER et PER tel qu'il apparaît dans le séminaire adressé aux PLC2 de mathématiques de l'année 2003-2004 : les PER sont conçus comme ayant des propriétés écologiques (et donc économiques) plus avenantes que les AER comme socle de l'infrastructure didactique dans le cadre scolaire usuel – même si, bien entendu, la viabilité d'une telle infrastructure se heurte à de nombreuses contraintes de différents niveaux (pédagogiques, scolaires, sociétales...). En ce sens, les PER se définissent par un noyau $\tilde{C}$ (« C hatchek » ou « C caron ») de conditions génériques dont l'étude se poursuit. Par delà cette évolution des *moyens*, s'affirme cependant une *problématique* inchangée : on y demeure fidèle, bien évidemment, à la problématique *de base* en didactique. Un PER en ce sens suppose en effet un système praxéologique p_0 , le PER devant réaliser un certain ensemble $C_0 \supset \tilde{C}$ de conditions telles que $\partial(K_0, C_0, p_0, U)$, où U désigne une instance appartenant à une certaine catégorie institutionnelle (classes de 4^e, promotions d'étudiants de biologie de 1^{re} année, etc.).

b) Dans les cas classiques (si l'on peut dire), le système praxéologique p_0 visé à travers un PER est reconnu *a priori* comme *mathématique* (« pur » ou « mixte ») ou, plus généralement, comme relevant de la *discipline* de référence (qui peut ne pas être les mathématiques, bien entendu). En de tels cas, des distinctions peut-être cruciales sont à faire. Dans la logique d'étude qu'exprime l'écriture $\Pi \Rightarrow Q \Rightarrow p$, ce qui tend à être valorisé est p , tandis que,

et le projet Π , et la question Q qui en découle auront peut-être, en fait sinon en droit, le statut d'éléments provisoires, constitutifs d'un échafaudage ayant permis (ou devant permettre) d'arriver à p . On imagine que, en ce cas, il devient un jour tentant d'aller directement à p sans passer ni par Q ni, *a fortiori*, par Π : ainsi revient-on bientôt à la présentation frontale du savoir à enseigner, détaché de toute espèce de motivation ! On dispose ainsi, je le crains, d'une infrastructure didactique essentiellement fragile, même s'il est indispensable de continuer à accumuler les connaissances à son propos. Par contraste avec ce qui reste encore confiné dans un paradigme *inventoriant* (où l'on parcourt certes plus intelligemment un *inventaire praxéologique* réuni selon des principes souvent à demi oubliés), le paradigme *questionnant* évoqué lors de la séance 4, où ce que l'on valorise *d'abord*, ce sont des *répertoires de questions* associées à des horizons de projets, semble davantage susceptible de fournir un cadre viable à la logique qui va du projet à l'équipement praxéologique, $\Pi \Rightarrow Q \Rightarrow p$. Mais je note ici sans plus tarder un point essentiel : dans cette perspective, le paradigme « inventariant » *n'est nullement destiné à disparaître* avec l'émergence – encore à venir ! – du paradigme questionnant : car celui-ci suppose celui-là, qui en devient un organe clé : à l'instar d'Einstein étudiant le calcul tensoriel (voir le journal de la séance 4), il faut bien, à suivre le schéma herbartien, étudier des *œuvres*, mobilisées comme telles – quoique, il est vrai, identifiées en fonction de leur *utilité supposée* dans l'étude de la question Q examinée.

c) Je voudrais prendre ici, bien rapidement sans doute, l'exemple d'un travail récent signé par Noemí Ruiz, Marianna Bosch et Josep Gascón : présenté dans le cadre du "Working group 13" de CERME 5 (2007), il a pour titre *The functional algebraic modelling at Secondary level* (et se trouve à l'adresse http://ermeweb.free.fr/CERME%205/WG13/13_Ruiz.pdf). Le titre même désigne le système praxéologique p_0 dont il s'agirait d'équiper un certain public : les praxéologies de la « modélisation algébrique fonctionnelle ». Il s'agit là, il est vrai, d'un équipement praxéologique qui n'est pas exactement classique dans l'enseignement secondaire (français aussi bien qu'espagnol), ce qui justifie s'il en était besoin que la recherche en didactique en étudie les problèmes de diffusion. Cela noté, j'extraurai de ce travail quelques éléments seulement, renvoyant chacun à une lecture plus complète.

- On part, dans le PER décrit par les auteurs, d'un projet Π attribué à une association de jeunes : produire et vendre des T-shirts afin de gagner quelque argent. La question Q apparaît dans le cadre d'une *commande* de cette association adressée à « l'atelier de modélisation mathématique » dans lequel se déroule le PER, atelier qui devra rendre à son client imaginaire un *rapport* : quelles stratégies de production et de vente des T-shirts peuvent conduire l'association à réaliser un bénéfice de 3000 € (au moins) ? Le

parcours répondant à l'enquête confiée à l'atelier de modélisation passe par une succession de questions engendrées par la commande. Ainsi, après avoir constaté, au vu de données relatives à plusieurs mois de vente, qu'il n'est pas raisonnable d'espérer atteindre le bénéfice escompté en augmentant simplement le nombre de T-shirts vendus, la première de ces questions est la suivante : est-il possible d'atteindre le bénéfice désiré en changeant *l'une seulement* des « conditions de la situation », à savoir le prix unitaire (noté p), le coût unitaire (noté c) et le coût fixe (noté L) ?

- Tout cela conduit progressivement – au long d'une dizaine de séances d'atelier de 50 minutes chacune – vers l'étude de la fonction dépendant de trois paramètres $B(x) = px - cx - L$, où la variable x représente le nombre de T-shirts vendus. Avoir $B(x) \geq 3000$ équivaut à avoir $(p - c)x \geq 3000 + L$ ou

$$x \geq \frac{3000 + L}{p - c}.$$

Si l'on imagine que x ne saurait, dans le meilleur des cas, dépasser 450, on doit fixer L , c et p de façon que

$$\frac{3000 + L}{p - c} < 450$$

ce qui suppose notamment $p - c$ assez « gros ». L'étude effective subséquente mobilise la calculatrice symbolique *Wiris* (qu'on trouve à l'adresse www.wiris.com).

- La qualité du travail présenté (dont mon bref compte rendu ne donne qu'une image très appauvrie) ne peut faire qu'une contrainte redoutable n'exerce à terme ses effets : celle qui impose la distinction de « vrais » enjeux didactiques institutionnalisés dans la discipline dont on se réclame (par exemple, ici, le « travail » mathématique du modèle algébrique, inégalité comportant trois paramètres) et d'enjeux didactiques *occasionnels*, opportunistes, aussitôt répudiés (ici, d'analyse économique simple). Pour qu'il en aille autrement, il faudrait entrer franchement dans le paradigme questionnant, ce qui conduirait, par exemple, à distinguer clairement un *secteur d'études* qui pourrait s'intituler « Modèles économiques possibles et impossibles » (*Possible and Impossible Business Models*), ou encore « Comment gagnent-ils de l'argent (ou pas) ? » (à condition que cette question ait été retenue et déclarée), et dont l'étude ferait l'objet d'une *dévolution différenciée et coordonnée* entre plusieurs champs disciplinaires (dont les mathématiques). Dans un tel cadre, les praxéologies « économiques » utiles ou indispensables, si frustes soient-elles, devraient compter, dans le tableau des résultats didactiques du PER, tout autant que les praxéologies mathématiques émergentes.

2. Immanence des mathématiques

a) La question étudiée dans le PER des T-shirts a une réelle *générativité* – son étude conduit comme naturellement à étudier plusieurs questions « dérivées » –, ainsi qu'on le verra à la lecture de l'article de référence. Mais la question « Comment gagnent-ils de l'argent (ou pas) ? » possède, elle, une plus grande *généralité*.

- D'elle relève aussi bien la question des T-shirts que la question du modèle économique des moteurs de recherche, qu'évoque John Battelle dans le passage reproduit ci-après de son livre *The Search. How Google and Its Rivals Rewrote the Rules of Business and Transformed Our Culture* (Portfolio, 2005).

About 40 to 50 percent of all search queries now return paid ads alongside the results, according to Majestic Research, and that number will only increase over time as companies optimize their sites to convert searchers to paid clicks. Once those sponsored links appear, 13 to 14 percent result in conversion to a paid click, according to Majestic (these figures are an average for Google and Yahoo only).

That's not much, one might argue, until one does the math. The average price per paid click was hovering at about 50 cents in early 2005. Between Google and Yahoo, there are more than 2 billion searches each month. Back of the envelope: 2 billion times 14 percent – that's about 280 million paid clicks. Multiply that by an average of 50 cents and you have about \$140 million in revenue each month to split between the two. And that's just on their home pages. Both Yahoo and Google have extensive networks serving other sites, providing a similar if not slightly higher level of traffic and revenue. Bottom line: all those clicks add up to billion-dollar revenue lines for both companies. (pp. 35-36)

- Si l'on admet que la viabilité *des questions étudiées* (et pas seulement celle des *œuvres à mobiliser* pour leur apporter une réponse idoine) suppose leur valorisation comme enjeux didactiques (les résultats de cette étude étant eux-mêmes valorisés, qu'ils concernent par exemple la vente de T-shirts ou l'économie des moteurs de recherche), on voit ici que, dès lors que la question étudiée n'est pas strictement *intradisciplinaire* (*intramathématique*, etc.), le cadre scolaire dans lequel son étude prend place doit être le lieu d'une réelle convivialité interdisciplinaire, d'une codisciplinarité apaisée – condition *sine qua non* contre laquelle militent pourtant, aujourd'hui, un grand nombre de contraintes ayant leur origine dans la société et qui trouvent à se renforcer au niveau de l'école, sans être affaiblies par les contraintes pédagogiques.

b) Une telle écologie des outillages praxéologiques ne serait en rien une innovation absolue : elle peut nous sembler utopique – si c’est le cas ! – parce qu’un long mouvement d’*isolationnisme épistémologique scolaire* a confiné chacun d’entre nous dans un territoire disciplinaire vécu comme séparé de tous les autres.

- Je rappellerai ici, à titre de contre-exemple, l’inclusion dans l’arithmétique scolaire ancienne d’éléments d’*arithmétique commerciale* (ou *financière*) dont je donne d’abord une simple illustration en reproduisant l’énoncé d’un exemple traité extrait du *Cours abrégé d’arithmétique* de Carlo Bourlet « à l’usage du premier cycle de l’enseignement secondaire » (Hachette, 1922, p. 498).

944. – EXEMPLE. – *Escompter au 14 octobre 1905 une traite de 17 615^{fr}, payable fin décembre 1905 ; taux d’escompte 4 %, commission $\frac{1}{8}$ %, change de place $\frac{3}{16}$ %.*

On a là un problème d’« arithmétique mixte » (pour employer une expression anachronique) qu’il fallait en principe savoir résoudre à l’égal d’autres types de problèmes, eux d’arithmétique « pure ».

- J’ajoute à cela un développement relevant également des « mathématiques mixtes », que j’extraits du chapitre intitulé « Chèques – Assurances » de l’*Arithmétique du brevet élémentaire* d’A. Marijon et A. Péquignot (Hatier, 1928, pp. 408-409).

486. Assurances. – Une **assurance** est un contrat par lequel l’une des deux parties, l’*assureur*, s’engage à indemniser l’*assuré*, dans le cas où celui-ci viendrait à subir certains dommages fortuits.

En échange, l’assuré consent au paiement, à époques fixes, d’une redevance appelée *prime*. Les conditions du contrat sont précisées dans la *police* d’assurance.

.....
Les *barèmes* des compagnies (c’est-à-dire les tables donnant le taux de la prime en fonction de l’importance et de la nature du risque à indemniser) sont établis par application du *calcul des probabilités*.

487. Notion de probabilité. – On définit d’ordinaire la *probabilité mathématique* d’un événement comme étant le *rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas, supposés tous également possibles*.

.....

488. Loi des grands nombres. – L'intérêt de la considération des probabilités mathématiques résulte de *la loi des grands nombres*. Reprenons notre second exemple : On joue à pile ou face. Si la pièce de monnaie est jetée 1000 fois, le joueur qui joue pile est en droit d'espérer que pile sortira 500 fois. Sur 1000 épreuves, le nombre probable des événements favorables sera le produit de 1000 par la probabilité, égale à 0,5, d'amener pile.

La *loi des grands nombres* affirme que le rapport du nombre événements favorables observés à leur nombre probable (c'est-à-dire au produit du nombre des épreuves par la probabilité) se rapproche de l'unité, et en devient aussi voisin qu'on le veut ***pour un nombre d'épreuves suffisamment grand***.

.....
Des statistiques précises, basées sur l'observation d'un très grand nombre de cas, ont permis aux compagnies d'assurances de dresser des tables (tables relatives aux divers risques, tables de mortalité...) donnant la fréquence des divers événements où elles ont à intervenir. Ces statistiques montrent que la loi des grands nombres est applicable, avec une certaine approximation à de tels faits, c'est-à-dire – car il ne saurait être question ici de calculer *a priori* des probabilités – qu'il existe un rapport à peu près constant entre le nombre des événements donnant lieu à indemnité de la part des compagnies, et le nombre total des cas soumis à l'observation, quand ce dernier nombre est suffisamment grand.

On sait, par exemple, qu'en France, la probabilité annuelle, ou *risque annuel* de destruction par l'incendie d'une maison en pierre recouverte de tuiles ou d'ardoises est voisine de 0,00005 ; on peut en conclure qu'en dehors de toute action concertée, pour 100 000 maisons de cette nature, le nombre de sinistres sera, en 10 ans, de l'ordre de 50.

- Ce qu'il faut souligner ici, c'est que l'introduction de notions de théorie des probabilités ne résulte pas d'une décision première, indépendante : elle est entraînée, au contraire, par le désir d'aborder les questions d'*assurance*, regardées comme questions « ombilicales » pour le futur citoyen : c'est parce qu'il aura été frotté à de telles questions qu'il aura rencontré (ici) la notion de probabilité et la loi des grands nombres, *et non l'inverse*. Le raisonnement pervers, mais devenu familier, conduisant à décider d'aborder avec des élèves des questions d'assurance *afin seulement* (ou presque) d'amener ainsi ces élèves à rencontrer la théorie des probabilités, est un sophisme dont il faut, je crois, se dépandre fermement.

c) D'une façon générale, dans l'étude d'une question *Q*, on peut *distinguer* les aspects mathématiques de la question, ses aspects biologiques, ou chimiques, ou historiques, etc., en conduisant l'étude de ces différents aspects de façon coordonnée, afin d'élaborer une réponse « bien étudiée », qui en combine les résultats. Dans une telle entreprise, cependant, il ne

semble pas fécond, ni même tenable, « d'avoir une idée derrière la tête » conduisant à glisser dans l'outillage de l'étude tel ou tel équipement praxéologique valorisé de façon *extrinsèque* à l'étude de Q . Il me revient, à cet égard, une vieille histoire qu'on me pardonnera de raconter une fois de plus. Un candidat à une épreuve orale d'histoire et géographie n'a étudié qu'une question figurant au programme de cette épreuve, « Les châteaux de la Loire ». Or l'examineur l'interroge sur le Danube. Le candidat, ignorant de la question, se lance : « Le Danube... est un fleuve... qui coule... depuis sa source jusqu'à... son embouchure... » C'est là que lui vient un éclair de génie ; il enchaîne ainsi : « ... et le long duquel on aperçoit de loin en loin des châteaux, qui ne sont pas sans rappeler les châteaux de la Loire. Les châteaux de la Loire sont des édifices pour la plupart bâtis ou fortement remaniés à la renaissance française, à un moment où le pouvoir royal était situé sur les rives du fleuve, de ses affluents ou à proximité de ceux-ci, etc. » (Ici, j'emprunte sans vergogne à l'article de Wikipédia sur le sujet.)

d) Quand, en revanche, on évalue les outils praxéologiques en fonction de leur *utilité* dans l'étude de Q , les perspectives changent. À l'extériorité prédatrice se substitue un sentiment d'immanence praxéologique et par exemple d'immanence des mathématiques, phénomène sur lequel je voudrais m'arrêter maintenant à travers quelques exemples.

- Je reviens pour cela vers un exemple ébauché lors de la séance 2, celui de la *loi de Benford*. La question Q soulevée à son propos était la suivante : « Est-il vrai que l'on rencontre plus de 1 que de 9 comme chiffre non nul le plus à gauche dans l'écriture [décimale] des nombres qui peuplent la vie sociale ? Pourquoi en est-il ainsi ? » Une question qui peut surgir dans l'étude est celle-ci : que sont les nombres réels strictement positifs tels que le chiffre non nul le plus à gauche dans leur écriture décimale est 1, ou 2, etc. ? Considérons par exemple le nombre 2147,0568 ; le chiffre 2 qui nous intéresse peut être mis en évidence en écrivant :

$$2147,0568 = 2,1470568 \times 10^3.$$

Il est facile de voir que les nombres évoqués s'écrivent tous sous la forme

$$2, \dots \times 10^k$$

avec, en fait, $k \in \mathbb{Z}$: lorsque k est strictement négatif, on obtient des nombres < 1 ; on aura par exemple $0,002147 = 2,147 \times 10^{-3}$. L'ensemble Δ_2^+ des nombres ≥ 1 dont le chiffre non nul le plus à gauche dans l'écriture décimale de ces nombres est 2 s'écrit ainsi

$$\Delta_2^+ = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2 \cdot 10^k ; 3 \cdot 10^k[$$

tandis que l'ensemble Δ_2^- des nombres < 1 dont le chiffre non nul le plus à gauche dans l'écriture décimale de ces nombres est 2 s'écrit

$$\Delta_2^- = \bigcup_{k=1}^{\infty} [2 \cdot 10^{-k}, 3 \cdot 10^{-k}[.$$

Bien entendu, on aura de même, quel que soit $d = 1, 2, 3, \dots, 9$:

$$\Delta_d^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} [d \cdot 10^k ; (d+1) \cdot 10^k[;$$

$$\Delta_d^- = \bigcup_{k=0}^{\infty} [d \cdot 10^{-k} ; (d+1) \cdot 10^{-k}[.$$

Cela noté, on aura reconnu que ce qui émerge, ici, est en fait une vieille connaissance : la « notation scientifique » des réels, comme l'atteste cet extrait de l'article que Wikipédia consacre à cette notion.

La **notation** (ou **écriture**) **scientifique** est une représentation d'un [nombre décimal](#) sous la forme d'un produit de deux facteurs. Le premier facteur, appelé [mantisse](#), est un [nombre décimal](#) dont la valeur absolue de la [partie entière](#) est comprise entre 1 et 9, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un seul [chiffre](#) (non nul) à gauche de la virgule, puis un nombre variable de décimales (nombres après la virgule), qui dépend de la [précision](#). Le second facteur, appelé [exposant](#), est une [puissance](#) entière de 10.

Exemple

* 123 400 000 s'écrit $1,234 \times 10^8$ en notation scientifique.

* 0,000 123 s'écrit $1,23 \times 10^{-4}$

* 451 s'écrit $4,51 \times 10^2$

* 92 384 s'écrit $9,2384 \times 10^4$

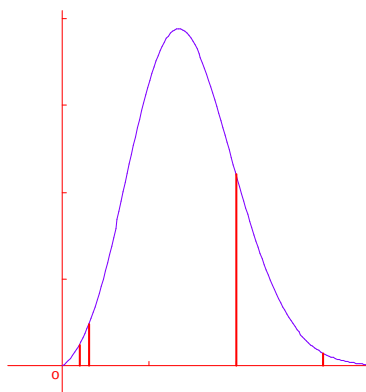
* -92 384 s'écrit $-9,2384 \times 10^4$

Cas particuliers :

* 0,007 s'écrit 7×10^{-3} . Il n'y a pas de virgule.

* 2,54 s'écrit $2,54 \times 10^0$. Ne pas écrire 2,54 seul, cette écriture est l'écriture décimale.

• Avançons un peu dans l'usage de cette notion dans le cadre de l'étude de la loi de Benford. Considérons une variable aléatoire réelle strictement positive X dont nous nous demandons si elle vérifie cette loi. Posons $\Delta_d = \Delta_d^- \cup \Delta_d^+$; on se demande donc si $P(X \in \Delta_d) \approx \log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$ pour $d = 1, 2, 3, \dots, 9$. À titre d'illustration, le schéma ci-après représente une *partie* de Δ_2 , à savoir les intervalles $[0,2 ; 0,3[$ et $[2 ; 3[$; l'aire « sous la courbe » représentative de la fonction de densité supposée de X correspondant à ces intervalles donne une approximation de $P(X \in \Delta_2)$.



- On peut aller un peu plus loin à ce propos. Dans un article paru en 2008 et intitulé « Pourquoi la loi de Benford n'est pas mystérieuse » (*Mathématiques & Sciences humaines*, 182, 7-15), Nicolas Gauvrit et Jean-Paul Delahaye mettent en place l'infrastructure mathématique suivante (voir <http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/N182R1280.pdf>).

On notera dans la suite $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel y (plus grand entier inférieur ou égal à y) et $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$ sa partie fractionnaire. Le logarithme en base 10 sera noté $\log$, la notation $\ln$ désignant le logarithme népérien. Le logarithme dans une autre base b sera noté $\log_b$. Id désigne l'application identité.

Tout nombre strictement positif x s'écrit (c'est la notation « scientifique ») :

$$x = 10^{\lfloor \log x \rfloor} \cdot 10^{\{\log x\}},$$

Le nombre $10^{\{\log x\} - 1}$ est appelée la *mantisse* de x . $\{\log x\}$ est la *mantisse logarithmique* de x .

Cette écriture permet un passage entre certaines caractéristiques des chiffres dans l'écriture de x en notation décimale, et d'autres propriétés portant sur $\{\log x\}$. Par exemple, le premier chiffre significatif de x est $\lfloor 10^{\{\log x\}} \rfloor$. (p. 10)

Considérons un nombre x écrit en notation scientifique, $x = p \cdot 10^k$, où $p \in [1 ; 10[$ et $k \in \mathbb{Z}$. On a alors : $\log x = k + \log p$, avec $\log 1 \leq \log p < \log 10$, soit $0 \leq \log p < 1$. Il en résulte que $\lfloor \log x \rfloor = k$ et donc que l'on a : $\{\log x\} = \log x - \lfloor \log x \rfloor = k + \log p - k = \log p$. On a bien alors : $10^{\lfloor \log x \rfloor} \cdot 10^{\{\log x\}} = 10^k \cdot 10^{\log p} = 10^k \cdot p = x$. On a encore $10^{\{\log x\} - 1} = \frac{p}{10}$, qui serait donc « la mantisse de x »,

tandis que $\{\log x\} = \log p$ serait la « mantisse logarithmique » de x – ce qu'on peut regarder, ici, comme des définitions de la mantisse de x et de la mantisse logarithmique de x . Cela noté, le nombre p s'écrit sous la forme

$$p = d, \dots$$

où d est l'un des entiers 1, 2, 3, ..., 9, en sorte que l'on a :

$$\lfloor p \rfloor = d.$$

On a donc $\lfloor 10^{\{\log x\}} \rfloor = \lfloor 10^{\log p} \rfloor = \lfloor p \rfloor = d$, ce qui confirme l'assertion des auteurs selon laquelle « le premier chiffre significatif de x est $\lfloor 10^{\{\log x\}} \rfloor$ ».

- On peut maintenant énoncer – sans aller plus loin aujourd'hui – un résultat clé sur lequel les auteurs appuient leur étude : le fait que la variable aléatoire réelle strictement positive X vérifie la loi de Benford *équivalait* au fait que la variable aléatoire $\{\log X\}$ – la « mantisse logarithmique » de X –, qui prend ses valeurs dans $[0 ; 1[$, suit une loi *uniforme*.
- Bien entendu, l'usage fait ici de la notation scientifique *n'est pas répertorié* dans l'article de Wikipédia déjà cité, où on lit seulement ceci.

La notation scientifique permet de connaître immédiatement l'[ordre de grandeur](#) du nombre puisqu'il s'agit de la valeur de l'exposant. Elle permet également de simplifier la multiplication et la division, en procédant aux produits des mantisses d'une part, et des exposants d'autre part.

Cette notation est très utile pour les quantités physiques dont les valeurs sont souvent encadrées avec une [marge d'erreur](#). On se restreint souvent aux [chiffres significatifs](#), par exemple la notation $1,234 0 \times 10^6$ signifie que la valeur est comprise entre 1 233 950 et 1 234 050.

Enfin, ce système permet de s'affranchir des différences régionales comme le terme anglais américain [billion](#) (qui signifie « milliard » en langue anglo-saxonne).

Ainsi l'étude d'une question peut-elle modifier le rapport « ordinaire » à tel outillage mathématique, en même temps qu'elle en appelle généralement à des outils « neufs ».

3. Enquêtes ouvertes

a) On peut lancer une enquête sur une question Q parce qu'une certaine analyse *a priori* nous aura convaincu, que sous certaines contraintes K , cette enquête fera rencontrer aux élèves ou étudiants U un système praxéologique p qu'on souhaite les voir rencontrer. Un tel dessein relève de la problématique de base (faible) : les conditions C créées par l'enquête sur Q sont en ce cas *censées* vérifier la relation $\Re(K, C, p, U)$. Il s'agit là d'une amplification de la problématique des AER : en ce sens, à l'instar des AER, les PER s'inscrivent bien dans la perspective classique de la TSD.

b) Par contraste, dans ce qu'on a appelé dans ce séminaire une *enquête codisciplinaire ouverte*, on crée des conditions C – celles notamment qu'implique la situation d'enquête sur la question Q –, dont on va observer et gérer les besoins praxéologiques qu'elles vont faire apparaître. Si l'on désigne

par Π_Q le projet de répondre à la question Q (ce projet découlant lui-même, en principe, d'un projet Π qui peut être celui d'une instance réelle ou imaginaire $\tilde{U} \neq U$), on va donc aller à la découverte de l'ensemble qu'on a noté

$$P = \{ p / \mathfrak{I}(p, \Pi_Q, U) \}.$$

Le sous-ensemble de P *effectivement rencontré* dépendra du PER suivi, lequel est déterminé en partie par les décisions adoptées dans le cadre de l'enquête sur Q . Dans un tel cas, on le voit, il n'existe pas véritablement d'analyse *a priori* antérieure au fonctionnement du système didactique $S(X; Y; Q)$ (avec $X \subset U$), où l'enquête prend place. Cette analyse « *a priori* » qui, dans la problématique classique de l'ingénierie didactique, est l'apanage de « l'ingénieur didacticien » ou, au mieux, de l'instance enseignante Y , est ici intégrée au travail même du système didactique $S(X; Y; Q)$ et devient en cela « analyse *in vivo* », partie intégrante du travail appelé par l'enquête, dont elle détermine pour une part importante le parcours d'étude et de recherche en lequel celle-ci se réalise.

c) Lorsqu'on procède ainsi, quels outillages praxéologiques rencontre-t-on ? On en a vu un exemple, lors de la séance 2, à propos de l'apparente attraction des papillons de nuit par les sources de lumière. Je voudrais formuler une observation qu'il restera bien entendu à enrichir et à discuter : étant donné l'effroi culturel que suscitent les mathématiques en dehors des cercles où l'on s'adonne à ce noble art, en règle générale, dans les réponses R^0 que l'on rencontre le plus immédiatement « dans la nature », les éléments mathématiques constitutifs de ces réponses ont été prioritairement éludés, escamotés, oubliés. Il y a en la matière une loi du silence à l'encontre des mathématiques (et sans doute d'autres choses) : la plupart des réponses aisément accessibles ont été, le cas échéant, « nettoyées » des mathématiques dont, en vérité, elles procèdent. Voici de cela un exemple simple. Dans un ouvrage de haute vulgarisation intitulé *La diversité du vivant* (Le Pommier-Fayard, 1999), signé d'un spécialiste, Michel Lamy, on lit ce qui suit.

Il existe une grande diversité de populations que les écologistes ont proposé de séparer en deux groupes, selon la stratégie mise en œuvre face aux facteurs de l'environnement : STRATÉGIES r et K (r représente le taux d'accroissement naturel de la population et K la CHARGE BIOTIQUE maximale, c'est-à-dire le nombre maximal d'individus que peut supporter le milieu).

Les populations à stratégie r ont un taux de natalité important, des jeunes à développement rapide, mais un taux de mortalité élevé sous l'influence des facteurs externes et en particulier de la prédation. Ce sont des populations dont la densité n'excédera jamais la capacité du milieu. C'est le cas des insectes dont les populations sont naturellement régulées par les parasites et les prédateurs.

Les populations à stratégie K ont un taux de natalité peu élevé, un développement lent et une grande longévité. Elles subissent une faible pression de prédation et, de ce fait, leur densité peut devenir importante et excéder les capacités du milieu (donc dépasser K). Comme indiqué précédemment, il en résulte un effet de stress (surpopulation) conduisant à un dérèglement hormonal et à des avortements assurant une autorégulation de la densité de la population. Les mammifères, par exemple, ont développé une stratégie de ce type.

On a voulu généraliser ces règles en faisant de tous les invertébrés des populations à stratégie *r* et de tous les vertébrés des populations à stratégie K. Or, non seulement les exceptions sont nombreuses, mais, de plus, si les conditions environnementales changent, la population peut elle aussi changer de stratégie...

De façon exemplaire, il ne reste plus, ici, qu'une *trace* d'un modèle mathématique dont le lecteur ne saura rien de plus : les *lettres* *r* et *K*. Il s'agit en fait, au départ, du modèle proposé par Pierre-François Verhulst en 1838, qui s'écrit classiquement

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right).$$

(On se reportera là-dessus, par exemple, à l'article « Modèle évolutif *r/K* » de l'encyclopédie Wikipédia.) Devant ce phénomène ubiquitaire, on doit espérer que la revitalisation de l'enseignement des mathématiques ira de pair avec *une levée progressive de la censure culturelle* sur la présence de mathématiques.

d) Dans la perspective adoptée ici, cela suppose un abord à la fois équilibré (du point de vue de la codisciplinarité) et exigeant (du point de vue épistémologique) des questions *Q* que l'on étudie, quelles qu'elles soient et où que ce soit. Je voudrais m'arrêter ici sur un exemple encore.

- J'ai été amené récemment à me pencher sur le projet et la réalité d'une *éducation au développement durable*. Il s'agit là d'un champ où fleurit une vulgate que chacun connaît plus ou moins, notamment dans la version relayée par les grands médias. Je prendrai pour point de départ la question « naïve » que voici : « Pourquoi faudrait-il réduire les émissions de CO₂ et comment le faire ? » J'imagine que beaucoup de lecteurs ont été en contact avec la « réponse » à la première partie de la question qui est portée, semble-t-il désormais, par la *vox populi* : « Parce que le CO₂ provoque l'effet de serre, lequel est à l'origine du réchauffement climatique. »

- Par quel bout prendre l'enquête au-delà de ce point de départ ? Allons voir ici l'*Écologuide de A à Z pour les juniors* de la Fondation Nicolas Hulot (Le Cherche midi, 2004), à l'entrée « Effet de serre » ; on y lit ceci.

EFFET DE SERRE

Notre planète ressemble à une serre de jardinier ou à une voiture laissée au soleil. La lumière traverse les vitres et réchauffe l'intérieur. Pour la Terre, les rayons solaires passent à travers l'atmosphère, réchauffent le sol, l'eau, les plantes, mais la chaleur n'est pas capable de sortir vers l'extérieur. Elle s'accumule : il fait chaud.

Sans cet effet naturel bénéfique, la température moyenne à la surface de la Terre ne serait pas de + 15 °C mais de -18 °C ! L'effet de serre est dû à certains **gaz** naturels (**CO₂**, méthane, vapeur d'eau) ou d'origine humaine (CO₂ industriel, gaz des bombes aérosols ou des réfrigérants...). Si la chaleur piégée a permis l'apparition de **climats** accueillants pour la vie et pour l'homme, l'effet de serre anthropique, c'est-à-dire lié aux activités de l'Homme, accélère depuis deux siècles le **réchauffement** climatique : le cycle des saisons, les précipitations et les vents se modifient. Avec quelques degrés de plus, le niveau des océans s'élève et submerge le littoral et les îles les plus basses, des régions entières se désertifient sans que les habitants aient le temps de trouver des parades pour survivre. Si nous sommes tous responsables de l'augmentation de l'effet de serre, nous pouvons à l'inverse tous participer à sa réduction. Trier ses déchets, utiliser les **transports** en commun, produire et consommer bio, économiser l'**eau**, l'**électricité**, favoriser les **énergies** renouvelables, faire des achats réfléchis ont des effets positifs sur l'air, le sol, l'eau, les ressources, la **biodiversité** en vue de tendre vers un **développement durable**.

L'effet de serre est ici « défini » par la métaphore de la serre, dont les vitres seraient remplacées par l'atmosphère terrestre, ou plutôt par certains gaz présents dans l'atmosphère terrestre. Comment au juste ces gaz jouent le rôle de serre n'est pas précisé... Mais on voit s'affirmer une opposition que l'on trouve dans la plupart des présentations de l'effet de serre : il y a le « bon » effet de serre dû à des gaz « naturels », qui a donné à la Terre sa température moyenne et ses climats, et un « mauvais » effet de serre lié au rejet de gaz (dont le même CO₂) « d'origine humaine » (dont le « CO₂ industriel »).

- Attachons-nous à un « détail » : le « bon » effet de serre fait que la température moyenne à la surface de la Terre est d'environ +15 °C, alors qu'elle serait d'environ -18 °C s'il n'existait pas. Voici à cet égard un extrait de l'article « Effet de serre » de *Wikipédia*. (Les mots ou expressions [en bleu](#) portent des liens vers les articles correspondants de l'encyclopédie.)

Lorsque le rayonnement solaire atteint l'atmosphère terrestre, une partie (environ 28,3 %) est directement réfléchie, c'est-à-dire renvoyée vers l'espace, par l'air, les nuages blancs et la surface claire de la Terre, en particulier les régions blanches et glacées comme l'Arctique et l'Antarctique, c'est l'albédo qui n'est pas représenté sur le schéma. Les rayons incidents qui n'ont pas été réfléchis vers l'espace sont absorbés par l'atmosphère (20,7 %) et/ou la surface terrestre (51 %).

Cette dernière partie du rayonnement absorbée par la surface du sol lui apporte de la chaleur, autrement dit de l'énergie, qu'elle restitue à son tour, le jour comme la nuit, en direction de l'atmosphère sous forme de rayons infrarouges lointains en l'occurrence, dans la plage 8-13 µm principalement. C'est le « rayonnement du corps noir ». Ce rayonnement est alors absorbé en partie par les gaz à effet de serre, ce qui réchauffe l'atmosphère. Puis dans un troisième temps, cette chaleur est réémise dans toutes les directions, notamment vers la Terre.

C'est ce rayonnement qui retourne vers la Terre qui constitue l'effet de serre, il est à l'origine d'un apport supplémentaire de chaleur à la surface terrestre. Sans ce phénomène, la température moyenne sur Terre chuterait d'abord à -18 °C. Puis, la glace s'étendant sur le globe, l'albédo terrestre augmenterait et la température se stabiliserait vraisemblablement à -100 °C.

- Ce qui peut judicieusement retenir l'attention ici, c'est la dissymétrie entre les deux températures données : +15 °C et -18 °C (ou -100 °C). En règle générale, lorsqu'on se met à la recherche des mathématiques perdues, chaque indication chiffrée doit susciter une interrogation sur son origine : *d'où ces valeurs numériques proviennent-elles ?* Pour la première, il s'agit, peut-on penser, du résultat d'un calcul exploitant des relevés de températures faits tout autour du globe terrestre. C'est ce que paraît confirmer ce passage d'un ouvrage pour le grand public cultivé écrit par deux chercheurs spécialistes, Hervé Le Treut et Jean-Marc Jancovici, *L'effet de serre. Allons-nous changer le climat ?* (Flammarion, 2004).

Établir un diagnostic de l'évolution du climat requiert de choisir des indices intégrant ce qui peut se passer un peu partout sur la planète. Le plus utilisé est la température moyenne au sol, température qui, depuis le début de l'ère industrielle, a augmenté de 0,6 à 0,9 degré – une augmentation qui paraît supérieure aux variations naturelles du climat estimées sur le dernier millénaire.

Quel crédit accorder à cette estimation ? La mesure des températures moyennes au sol est certes difficile, mais s'est affinée au fil des années. La mise en place d'un réseau de mesures météorologiques systématiques sur les continents date d'à peine plus d'un siècle. Les équipes scientifiques qui ont

entrepris d'analyser ces données ont dû rapidement travailler à l'élimination de plusieurs sources d'erreurs, dues notamment à l'interaction de facteurs non strictement climatiques. Les stations situées au centre d'agglomérations en plein développement sont affectées par l'effet « îlot de chaleur » d'une concentration urbaine, qui provient à la fois du chauffage, de la circulation automobile et de l'inertie thermique des bâtiments. Certaines ont néanmoins pu être placées à proximité des aéroports. Pendant la même période, les mesures systématiques de la température de l'eau de mer par les bateaux se sont généralisées. Là aussi, l'analyse de ces données a réclamé un travail difficile et soigneux : les équipes scientifiques qui ont effectué ces études ont recensé les méthodes en usage dans chaque marine, civile ou militaire, pour en corriger les biais : la température varie selon qu'on utilise un seau en bois plutôt qu'un seau en fer pour recueillir l'eau ; de même, la température mesurée sur le bateau à la prise d'eau des machines est différente de celle mesurée par un thermomètre directement plongé dans l'eau. Ces scientifiques ont également recoupé les données marines et terrestres en utilisant les stations météorologiques sur les îles, afin de réduire leur marge d'erreur. Autre obstacle à une mesure précise : les points de mesure ne sont pas distribués de manière égale à la surface du globe, et des méthodes statistiques sophistiquées ont été nécessaires pour pondérer les moyennes en fonction de la représentativité de chaque mesure.

Nous avons désormais une base beaucoup plus solide pour valider ces calculs : depuis deux décennies, des satellites effectuent des mesures de la température de surface, mesures régulièrement distribuées sur la planète, et permettent d'établir des moyennes en bonne continuité avec les estimations antérieures. (pp. 79-80)

- On notera que cette température moyenne est le fruit d'une procédure complexe, dont la composante mathématique est, ici, seulement évoquée. Cela dit, d'où provient alors la température $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$? L'article "Greenhouse effect" de Wikipedia comporte un lien vers un autre article de la même encyclopédie, "Idealized greenhouse model", lequel comporte en outre un lien vers un texte qui est le chapitre 2, intitulé "The global energy balance" (le bilan énergétique de la Terre) d'un traité universitaire américain classique : l'ouvrage *Global Physical Climatology* de Dennis Hartmann publié en 1994 (dont le chapitre 1 s'intitule "Introduction to the climate system"). C'est à partir de ces deux documents que je construis le petit compte rendu d'enquête ci-après.

① La Terre reçoit l'essentiel de son énergie du Soleil. Celui-ci, indique Hartmann, émet de l'énergie au taux de $Q = 3.87 \times 10^{26}\text{ W}$. Le symbole W désigne le watt, unité de mesure que l'article « Watt » de Wikipédia présente comme « la puissance d'un système énergétique dans lequel est transférée

uniformément une énergie de 1 joule pendant 1 seconde ». On a donc : $W = J \cdot s^{-1}$. (Le joule est l'unité d'énergie : c'est « le travail d'une force d'un newton dont le point d'application se déplace de un mètre dans la direction de la force », indique l'article « Joule » de Wikipédia.) Le Soleil émet donc $3.87 \times 10^{26} J/s$.

② La Terre est à une certaine distance r du Soleil. Le flux d'énergie Q émis par le Soleil est distribuée sur la sphère de centre le Soleil et de rayon r , dont l'aire est $4\pi r^2$. Chaque unité d'aire reçoit du Soleil un flux d'énergie S_0 tel que

$$S_0 = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Si l'on prend $r = 150 \times 10^9 m$, on obtient

$$\frac{3.87 \times 10^{26} W}{4\pi \times 225 \times 10^{20} m^2} \approx 1368,7 W \cdot m^{-2}.$$

L'article de Wikipedia propose de prendre $1366 W \cdot m^{-2}$ et Hartmann lui-même prend $1367 W \cdot m^{-2}$. S_0 est appelée *la constante solaire* : celle-ci s'exprime donc en *joules par seconde et par mètre carré*.

③ Si l'on désigne par a le rayon de la Terre et si l'on se réfère au schéma ci-après (repris de Hartmann), on voit que la Terre reçoit donc un flux d'énergie égal à $S_0 \pi a^2$.

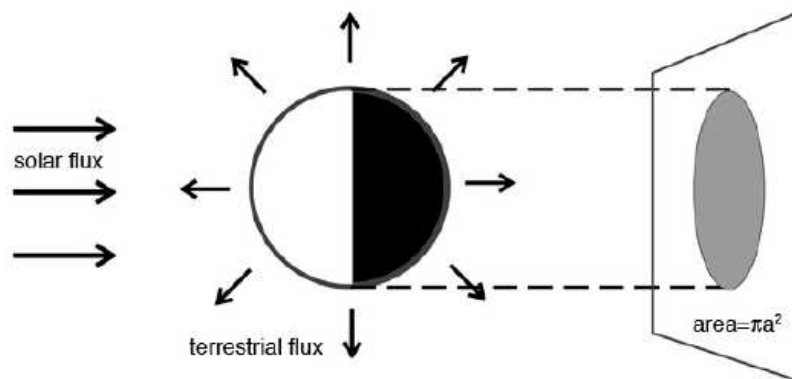


Figure 2.5: The spinning Earth is imagined to intercept solar energy over a disk of radius 'a' and radiate terrestrial energy away isotropically from the sphere. Modified from Hartmann, 1994.

Si l'on prend $a = 6400 km = 64 \times 10^5 m$, il vient, si l'on prend $S_0 = 1367 W/m^2$, $S_0 \pi a^2 = 1,7590... \times 10^{17} W$. (Hartmann adopte la valeur $1,74 \times 10^{17} W$.)

④ L'énergie ainsi reçue du Soleil – au rythme de $1,74 \times 10^{17}$ J/s – n'est pas entièrement absorbée par la Terre : une *partie* du rayonnement solaire est réfléchi par le sol (on suppose ici que l'atmosphère est parfaitement transparente au rayonnement solaire...). Pour préciser les choses, on use alors de la notion d'*albédo*, que le glossaire de l'ouvrage de Le Treut et Jancovici cité plus haut définit ainsi : « Proportion du rayonnement réfléchi par un objet. Un miroir parfait a un albédo de 100 %, la neige fraîche un albédo de 80 % et un corps noir parfait un albédo nul. » Dans le modèle examiné, on introduit donc un *albédo planétaire* α , que l'on prend en outre égal à 0,3 (= 30 %). La Terre absorbe donc un flux d'énergie d'origine solaire au rythme de $(1 - \alpha)S_0\pi a^2$, que Hartmann trouve égal à $1,22 \times 10^{17}$ W.

⑤ C'est en ce point que doivent intervenir deux considérations clés. Tout d'abord, comme l'écrit Hartmann, "in equilibrium, the total terrestrial flux radiated to space must balance the solar radiation absorbed by the Earth" : c'est cette égalité que l'on va exprimer ci-dessous. Pour ce faire, ensuite, il faut recourir à la notion de *corps noir* (Kirchhoff, 1860) et à la loi de Stefan-Boltzmann que l'article de Wikipedia consacré à cette loi présente en ces termes.

The **Stefan-Boltzmann law**, also known as **Stefan's law**, states that the total energy radiated per unit surface area of a black body in unit time (known variously as the black-body **irradiance**, **energy flux density**, **radiant flux**, or the **emissive power**), j^* , is directly proportional to the fourth power of the black body's [thermodynamic temperature](#) T (also called absolute temperature):

$$j^* = \sigma T^4.$$

A more general case is of a [grey body](#), the one that doesn't absorb or emit the full amount of radiative flux. Instead, it radiates a portion of it, characterized by its [emissivity](#), ε :

$$j^* = \varepsilon \sigma T^4.$$

The irradiance j^* has dimensions of energy flux (energy per time per area), and the SI units of measure are joules per second per square metre, or equivalently, watts per square metre. The SI unit for absolute temperature T is the kelvin. ε is the emissivity of the grey body; if it is a perfect blackbody, $\varepsilon = 1$. Still in more general (and realistic) case, the emissivity depends on the wavelength, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$.

To find the total absolute power of energy radiated for an object we have to take into account the surface area, A (in m^2):

$$P = A j^* = A \varepsilon \sigma T^4.$$

Le kelvin (K) est l'unité SI de mesure de la température : on a $n^\circ\text{C} = (n + 273,15)$ K et n K = $(n - 273,15)^\circ\text{C}$. Notons tout de suite que l'on a donc

+15 °C = (15 + 273,15) K $\approx$ 288 K et -18 °C = (-18 + 273,15) K $\approx$ 255 K. La constante σ , dite de Stefan, vaut à peu près $5.67 \times 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$.

© Si l'on regarde la Terre comme un corps noir, la température T_e (dite « température planétaire effective » ou « température d'émission ») est définie par l'égalité

$$\text{rayonnement émis par unité d'aire} = \sigma T_e^4$$

en sorte que

$$\text{rayonnement terrestre total} = 4\pi a^2 \sigma T_e^4$$

L'égalité rayonnement absorbé = rayonnement émis s'écrit alors, pour la Terre, $(1 - \alpha)S_0\pi a^2 = 4\pi a^2 \sigma T_e^4$. On voit que le rayon a disparaît et qu'on obtient

$$T_e = \left[\frac{S_0(1 - \alpha)}{4\sigma} \right]^{1/4}.$$

On notera que T_e ne dépend que de l'albédo planétaire α et, à travers S_0 , de la distance r de la Terre au Soleil.

⑦ En utilisant les données numériques adoptées par Hartmann, que trouve-t-on alors pour valeur de T_e ? Calculons... Il vient :

$$T_e = \left[\frac{1367 \times 0,7}{4 \times 5.67 \times 10^{-8}} \text{ K}^4 \right]^{1/4} \approx 254,86 \text{ K}$$

Autrement dit, on a finalement : $T_e \approx 255 \text{ K} \approx -18 \text{ °C}$. Nous verrons la prochaine fois que c'est de là que provient la valeur affichée par nombre d'exposés sur ce qui se passerait si l'effet de serre n'existait pas.

4. Perspectives

a) Les exemples avancés jusqu'ici suggèrent plusieurs réflexions. La première est que, si la problématique de base en didactique reste essentielle, nous devons apprendre, comme chercheurs et, demain, comme enseignants ou formateurs, à faire vivre l'idée d'enquête *ouverte* dans laquelle l'analyse *in vivo* des voies et moyens de l'étude est pleinement intégrée au processus même et où l'on se situe dans une attitude de surprise potentielle quant aux outils praxéologiques éventuellement utiles – comme il en va avec l'apparition de la notion de corps noir dans l'étude précédente (sur l'effet de serre), notion qu'on a laissée, au reste, dans une nuance d'un gris soutenu.

b) Les outils mathématiques sont particulièrement sensibles à la diffusion institutionnelle et culturelle de réponses $R^\diamond$ à des questions Q : il y a presque toujours *excision* des mathématiques utilisées. Inversement, la recherche des

mathématiques ainsi refoulées, si elle exige souvent une dose de persévérance, nous montre que ces outils ne sont pas toujours hors de portée : ce n'est pas tant leur difficulté « objective » que leur « nature », et *l'horreur culturelle* qu'elle inspire, qui provoque leur résection. Je crois que la reprise d'un dialogue culturel de masse autour des mathématiques passe par l'épreuve de la (re)découverte de leur utilité dans des situations d'étude elles-mêmes significatives.

c) Les fragments d'enquêtes présentés jusqu'ici dans ce séminaire devraient encore nous suggérer, je crois, que « l'ingénierie didactique » des PER est d'abord une *phénoménotechnique*, pour reprendre le mot de Gaston Bachelard, c'est-à-dire permet avant tout la création de milieux indispensables au chercheur en didactique pour travailler à concevoir, analyser, fabriquer *un nouveau type d'infrastructures didactiques*. Tout ce que l'on peut savoir aujourd'hui à cet égard, c'est qu'il serait inapproprié d'inviter sans attendre et sans plus de façon des praticiens de l'enseignement à « s'emparer », *sans autres forces que les leurs propres*, d'une idée dont l'implémentation scientifiquement contrôlée reste largement à venir : s'il est vital que la profession se mobilise autour de cette idée, elle ne saurait le faire selon le schéma du professeur comme petit producteur indépendant ou du groupement de tels petits producteurs.

MISCELLANÉES

1. Parlez-vous français ?

Lors de la séance 2 de ce Séminaire, évoquant le phénomène de « l'effacement du schwa », j'avais déclaré ceci.

Quand on emprunte la ligne 14 du métro parisien à la Gare de Lyon en direction de la Madeleine, la voix féminine qui annonce les stations peut surprendre certains usagers : au lieu de prononcer ce qu'on peut transcrire « mi-phonétiquement » Chât'let, selon une prononciation populaire qui réalise ce qu'on nomme savamment « l'effacement du schwa » (“dropping of the schwa”), elle conserve au contraire le schwa (noté classiquement ə) en prononçant ce qu'on peut transcrire Châtəlet. (...) Il y a là, je suppose, l'effet d'une volonté de faire entendre une langue française moins fermée, plus accueillante à l'étranger phonétique que ne l'est spontanément la parlure indigène. On voit ainsi l'enjeu – souvent oublié ou nié par les « autochtones » – d'une certaine normalisation du français parlé : on ne parle pas qu'à ses proches, et on doit pouvoir parler *à tous*.

On me l'avait signalé et j'ai pu le vérifier il y a quelques jours : la voix a changé ; c'est désormais celle d'un homme, d'une gravité suavement mâle, et qui efface plus qu'à demi le schwa de *Châtelet*... Ainsi va le monde. Bien entendu, je maintiens la conclusion du passage reproduit ci-dessus.

2. Unité d'angle et dimension

Michel Jullien m'a signalé une difficulté qu'il a rencontrée et qu'il présente dans les termes suivants.

Je suis confronté à une question pour laquelle je ne trouve pas de réponse satisfaisante. Il s'agit de la dimension des angles. Pour les physiciens, un angle est sans dimension. Pourtant, les unités interviennent et on peut faire des changements d'unités. Par exemple, la vitesse angulaire ω est donnée en rad/s ou en tr/min et le passage de l'un à l'autre se fait en utilisant $2\pi \text{ rad} = 1 \text{ tr}$ et $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$. Mais la vitesse instantanée est donnée par $V = \omega R$. L'équation aux dimensions montre que l'angle est sans dimension...

Je cite cette question parce qu'elle est typiquement un *problème de la profession* auquel peuvent être confrontés les gens de métier et devant lequel, hélas ! ils peuvent se sentir abandonnés, comme il en va souvent dans une semi-profession. Dans une période aujourd'hui oubliée, une situation assez différente a pu prévaloir. C'est ainsi que le tome VI, intitulé *Grandeur. Mesure* (1982), de la collection « Mots » (qui apportait des « réflexions sur quelques mots clés à l'usage des instituteurs et des professeurs) publiée autrefois par l'APMEP, comportait deux pages de considérations (pp. 88-89) sur la question soulevée par Michel. On y lisait notamment ceci : « Les angles sont souvent déclarés “sans dimension”, ou “homogènes aux nombres”. Une telle assertion n'est pas soutenable... » Je renvoie les personnes intéressées à ce document.

3. Un concept fondamental ?

Hors de ce Séminaire sans doute, mais dans des propos dont on a pu méjuger le sérieux, j'ai volontiers utilisé le terme de *blaireau* – souvent en paraissant fustiger certains comportements présentés comme ubiquitaires. Sur un site bien connu ([http://fr.wikipedia.org/wiki/Blaireau_\(homonymie\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Blaireau_(homonymie))), je lis ceci : « En argot, un “blaireau” est un imbécile vulgaire et méchant. » Ce n'est pas là vraiment ce que j'entends par blaireau. Il se trouve que, récemment, j'ai eu mon attention attirée sur un passage de l'œuvre célèbre d'Alexis de Tocqueville, *De la Démocratie en Amérique* (1840) où, dans le volume II, quatrième partie, chapitre VI, je trouve une vision prémonitoire de la « blaireau-attitude ». Voici.

Je veux imaginer sous quels traits nouveaux le despotisme pourrait se produire dans le monde : je vois une foule innombrable d'hommes semblables et égaux qui tournent sans repos sur eux-mêmes pour se procurer de petits et vulgaires plaisirs, dont ils emplissent leur âme. Chacun d'eux, retiré à l'écart, est comme étranger à la destinée de tous les autres : ses enfants et ses amis particuliers forment pour lui toute l'espèce humaine ; quant au demeurant de ses concitoyens, il est à côté d'eux, mais il ne les voit pas ; il les touche et ne les sent point ; il n'existe qu'en lui-même et pour lui seul, et, s'il lui reste encore une famille, on peut dire du moins qu'il n'a plus de patrie.

Au-dessus de ceux-là s'élève un pouvoir immense et tutélaire, qui se charge seul d'assurer leur jouissance et de veiller sur leur sort. Il est absolu, détaillé, régulier, prévoyant et doux. Il ressemblerait à la puissance paternelle si, comme elle, il avait pour objet de préparer les hommes à l'âge viril ; mais il ne cherche, au contraire, qu'à les fixer irrévocablement dans l'enfance ; il aime que les citoyens se réjouissent, pourvu qu'ils ne songent qu'à se réjouir. Il travaille volontiers à leur bonheur ; mais il veut en être l'unique agent et le seul arbitre ; il pourvoit à leur sécurité, prévoit et assure leurs besoins, facilite leurs plaisirs, conduit leurs principales affaires, dirige leur industrie, règle leurs successions, divise leurs héritages ; que ne peut-il leur ôter entièrement le trouble de penser et la peine de vivre ?

Il y a là peut-être une contribution à la réflexion nécessaire sur les questions « ombilicales » qui pourraient être étudiées à l'école de la République. À cet égard, la période de congé qui s'ouvre pour plusieurs d'entre nous pourra fournir le cadre d'une première méditation.

That's all, folks!