

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

→ Séance 4 – Vendredi 27 mars 2009

PROBLÉMATIQUES EN DIDACTIQUE

1. Problématiques de base

a) Lors de la séance 1 de ce séminaire, j'avais distingué trois grandes problématiques en didactique. Il y a d'abord *la problématique de base*, qu'on peut formuler ainsi (avec une retouche mineure par rapport à la formulation retenue d'abord).

Étant donné certaines contraintes pesant sur telle institution ou telle personne, sous quels ensembles de conditions cette institution ou cette personne pourrait-elle intégrer à son équipement praxéologique tel système praxéologique désigné ?

Dans ce cas, on s'interroge donc sur les ensembles C de conditions permettant que, sous des contraintes K_0 , une « instance » U_0 (personne ou institution) intègre à son équipement praxéologique le système praxéologique p_0 , intégration qu'on peut noter ainsi : $\partial(K_0, C, p_0, U_0)$. Pour le dire autrement, on s'interroge donc sur l'ensemble $\{ C / \partial(K_0, C, p_0, U_0) \}$.

b) À propos de cette problématique, j'avais noté que, dans nombre de travaux usuels en didactique, qui relèvent en cela de la problématique de base *restreinte*, seules sont examinées les conditions *modifiables par le professeur* (voire par la « communauté éducative » ou l'un de ses sous-ensembles), sans même par exemple que l'on s'interroge sur les conditions *modifiables par la profession* par exemple. Par contraste, j'avais évoqué la problématique de base *étendue*, où « toutes les conditions sont regardées comme potentiellement modifiables, même si le chercheur est bien incapable de faire advenir de telles modifications ou de décrire comment elles pourraient advenir ».

2. Problématiques possibilistes

a) À côté de la problématique de base (restreinte ou étendue), nous avons considéré aussi la problématique *possibiliste*, dont je reproduis la formulation adoptée alors.

Étant donné un certain ensemble de conditions et de contraintes auxquelles telle institution ou telle personne est soumise, à quel systèmes praxéologiques est-il possible que cette institution ou cette personne accède ?

b) Cette fois, on s'intéresse à l'ensemble $\{ p / \partial(K_0, C_0, p, U_0) \}$. Dans le cadre de la problématique de base, se demander si un certain ensemble de conditions C_0 est tel que $C_0 \in \{ C / \partial(K_0, C, p_0, U_0) \}$ revient à se demander si $p_0 \in \{ p / \partial(K_0, C_0, p, U_0) \}$. Inversement, se demander si $p_0 \in \{ p / \partial(K_0, C_0, p, U_0) \}$ revient à se demander si $C_0 \in \{ C / \partial(K_0, C, p_0, U_0) \}$.

c) Ainsi, problématique de base et problématique possibiliste s'articulent-elles naturellement. De façon générale, si une première problématique revient à étudier un ensemble du type $\{ Y / f(X_0, Y, Z_0, T_0, \dots) \}$ et une seconde problématique conduit à examiner un ensemble du type $\{ Z / f(X_0, Y_0, Z, T_0, \dots) \}$, on dira de ces deux problématiques qu'elles sont *duales* l'une de l'autre. Ainsi, relativement à un même ensemble de contraintes K_0 et à une même instance U_0 , la problématique de base et la problématique possibiliste *sont duales l'une de l'autre*.

d) Nous avons noté encore un type de conclusion auquel on peut arriver, à savoir que $p_0 \notin \{ p / \partial(K_0, C_0, p, U_0) \}$, ce qu'on avait encore commenté ainsi : « ... sous certaines contraintes $[K_0]$, certaines conditions ayant en outre été créées $[C_0]$, il est quasi impossible que telle personne ou institution $[U_0]$ ait même un simple *contact* avec tel système praxéologique $[p_0]$; ou encore que le contact ainsi engendré n'est pas susceptible de provoquer l'intégration de ce système $[p_0]$ à l'équipement praxéologique de cette personne ou institution $[U_0]$. » L'énoncé $p_0 \notin \{ p / \partial(K_0, C_0, p, U_0) \}$ traduit en fait la *deuxième* partie de ce passage. La *première* partie suppose une autre relation que ∂ (l'intégration à l'équipement praxéologique de U_0 d'un système praxéologique $p...$) : nous noterons $\Re(K, C, p, U)$ le fait que, sous les contraintes K et dans les conditions C , il y ait *rencontre* par U du système praxéologique p . La première partie du passage précédent se transcrit alors (approximativement, bien sûr) de la façon suivante : $p_0 \notin \{ p / \Re(K_0, C_0, p, U_0) \}$.

e) La problématique possibiliste définie plus haut conduit à examiner des ensembles du type $\{ p / \partial(K_0, C_0, p, U_0) \}$. Nous nommerons problématique *possibiliste forte* cette problématique-là ; et nous nommerons problématique *possibiliste faible* celle qui conduit à étudier des ensembles du type $\{ p / \Re(K_0, C_0, p, U_0) \}$. Notons que nous pourrions de même parler, de façon *duale*, de problématique de base *forte*, conduisant à étudier l'ensemble $\{ C / \partial(K_0, C, p_0, U_0) \}$, et de problématique de base *faible*, conduisant à étudier $\{ C / \Re(K_0, C, p_0, U_0) \}$.

3. Problématiques primales

a) Dans les problématiques de base et possibilistes, l'intérêt se centre sur des *praxéologies*. Dans un premier type de cas (problématiques de base), on recherche quels ensembles de conditions C impliquent, sous un ensemble K_0 de contraintes donné, l'intégration (problématique forte) d'un certain système praxéologique p_0 ou la rencontre avec celui-ci (problématique faible). Dans un second type de cas (problématiques possibilistes), on recherche quels systèmes praxéologiques p seront intégrés (problématique forte) ou rencontrés (problématique faible) dans des conditions formant un ensemble C_0 et sous un ensemble K_0 de contraintes. Ce qui n'a pas été évoqué jusqu'ici, c'est la *raison* – ou le *motif* – de l'intérêt supposé les systèmes praxéologiques p à propos desquels on s'interroge. Pourquoi, dans la problématique de base, s'intéresse-t-on à tel système praxéologique p_0 ? Pourquoi, dans la problématique possibiliste, s'intéresserait-on aux systèmes praxéologiques qui peuvent être rencontrés ou « acquis » sous certains ensembles de conditions et de contraintes ? Il s'agit là d'une question qui mérite d'être posée.

b) Une réponse à cette question est fournie implicitement par la problématique *primale*, dont je reprends la formulation.

Étant donné un projet d'activité dans lequel telle institution ou telle personne envisage de s'engager, quel est, pour cette institution ou cette personne, l'équipement praxéologique qui peut être jugé indispensable ou simplement utile dans la conception et l'accomplissement de ce projet ?

L'ensemble des systèmes praxéologiques p utiles ou indispensables pour l'instance U_0 dans la perspective du projet d'activité Π_0 peut être noté de la façon suivante : $\{ p / \mathfrak{S}(p, \Pi_0, U_0) \}$. Observons tout de suite qu'une problématique *duale* se laisse dériver de ce formalisme, celle où l'on étudie l'ensemble $\{ \Pi / \mathfrak{S}(p_0, \Pi, U_0) \}$, soit l'ensemble des projets d'activité Π dans lesquels le système praxéologique p_0 serait utile ou indispensable à U_0 – ce qui correspond, en gros, à l'étude des « applications » de p_0 .

c) Comment étudier $\{ p / \mathfrak{S}(p, \Pi_0, U_0) \}$? Plusieurs techniques nous sont connues. On peut par exemple *observer* la réalisation de l'activité projetée (si celle-ci n'est pas inédite) pour y saisir les praxéologies p qui y sont mises en jeu. Si le projet d'activité Π_0 est celui d'*enseigner les mathématiques* (U_0 étant une promotion d'élèves professeurs de 2^e année d'un IUFM par exemple), cela passera par l'observation *naturaliste* de séances de classe mais aussi par des techniques de prise d'information *autres*, telle celle que matérialise, dans la filière « Mathématiques » de l'IUFM d'Aix-Marseille, le dispositif du « corpus B ». Mais ces techniques ont une limite elle aussi classique, dont la mise en évidence exige maintenant un développement spécifique.

4. Le problème des questions

a) Pour avancer, on introduit, à côté et de concert avec le langage des praxéologies, le langage des *questions* et des *réponses*. Le « dictionnaire » entre une langue et l'autre comporte essentiellement le principe de mise en correspondance que voici (sur lequel on ne s'arrêtera pas ici) : *une praxéologie est une réponse à une question* ; un système praxéologique est un système de réponses à un ensemble de questions.

b) On désignera par l'expression $\aleph(Q, \Pi, U)$ le fait que, pour concevoir et mener à bien le projet d'activité Π , l'instance U gagne à disposer d'une réponse (à déterminer) à la question Q . (Le symbole $\aleph$, *aleph*, est la première lettre de l'alphabet hébreu.) L'expression $\{ Q / \aleph(Q, \Pi_0, U_0) \}$ désigne donc l'ensemble des questions Q auxquelles il est utile ou indispensable que U_0 dispose d'une réponse pour concevoir et mener à bien le projet d'activité Π_0 .

Cela dit explorer l'ensemble $\{ p / \mathfrak{S}(p, \Pi_0, U_0) \}$ revient à explorer un ensemble du type $\{ Q / \mathfrak{K}(Q, \Pi_0, U_0) \}$.

c) Comment procéder à une telle exploration ? L'une des limites des techniques évoquées plus haut en matière de prise d'information sur les praxéologies mises en œuvre dans l'activité visée par Π_0 tient à ce que ces praxéologies sont des réponses dont certaines sont quasi *naturalisées*, ce qui tend à gêner la *reprise d'étude* éventuellement nécessaire des questions auxquelles ces praxéologies étaient censées répondre. Ce qui manque donc, et ce qu'il faut recueillir, ce sont les *questions* plutôt que les réponses – réponses que, bien entendu, on recueillera aussi et qui figureront parmi les réponses $R^\diamond$ du schéma herbartien :

$$[S(X; Y; Q) \Rightarrow \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \}] \Rightarrow R^\heartsuit.$$

La technique que nous avons utilisée à propos du projet d'enseigner les mathématiques peut aujourd'hui être subsumée sous ce que je nommerai de façon générique *la technique des témoins*, et plus précisément, en l'espèce, des *témoins immédiats* (ou *actuels*). Dans le cas de l'enseignement des mathématiques, ces témoins immédiats, je le rappelle, ce sont les professeurs débutants que sont les élèves professeurs de 2^e année, qui, chaque semaine, « rapportent » des questions touchant le projet d'enseigner des mathématiques. Il s'agit là d'une technique essentielle pour dégager les questions *qui se posent*, et non pas seulement les questions que quelques-uns se posent. Je signale encore une variante de la technique des témoins évoquée jusqu'ici : celle des témoins *rétrospectifs*, qui témoignent à une certaine distance temporelle des événements sur lesquels porte leur témoignage. C'est ainsi par exemple que Gisèle Cirade et moi-même avons procédé (de façon limitée) avec des professeurs stagiaires pour témoins, lors de séances de *debriefing* à l'issue de la 2^e année d'IUFM.

5. Forums, ateliers, boutiques

a) Les questions auxquelles se heurtent les témoins sont apportées jusqu'en un *forum*, où, formulées à l'adresse d'un collectif, elles deviennent par cela même des *problèmes* à résoudre, c'est-à-dire des défis qu'on lance (*ballein*) devant soi (*pro*), pour les soumettre à la sagacité d'une communauté d'étude. Dès lors, la question posée est étudiée – selon le schéma herbartien – en un *atelier* ; la réponse $R^\heartsuit$ qui en résultera sera rendue disponible en une *boutique*, concept qui recouvre tout un ensemble de structures traditionnelles ou innovantes (exposés, cours, stages, séminaires, etc.). On dispose ainsi d'un modèle simple – le modèle FAB : forums, ateliers, boutiques – de la production de réponses.

b) Le problème des questions se pose au niveau des ateliers, qui doivent être alimentés en questions à étudier par les forums. Le mathématicien William P. Thurston, dont le nom a été évoqué lors de la séance 3, a souligné cette difficulté dans un article paru en 1994 (dans le *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30, 2, 161-177) intitulé “On Proof and Progress in Mathematics” et dont voici à cet égard le passage clé (c’est moi qui souligne).

If what we are doing is constructing better ways of thinking, then psychological and social dimensions are essential to a good model for mathematical progress. These dimensions are absent from the popular model.

In caricature, the popular model holds that

D. mathematicians start from a few basic mathematical structures and a collection of axioms “given” about these structures, that

T. there are various important questions to be answered about these structures that can be stated as formal mathematical propositions, and

P. the task of the mathematician is to seek a deductive pathway from the axioms to the propositions or to their denials.

We might call this the definition-theorem-proof (DTP) model of mathematics. A clear difficulty with the DTP model is that *it doesn’t explain the source of the questions*.

En d’autres termes, l’image populaire de l’activité scientifique est centrée sur les *produits*, tels qu’on les aperçoit dans divers types de *boutiques*, et tend à exclure les forums et les ateliers, c’est-à-dire *la production*, comme si les réponses une fois devenues disponibles procédaient de quelque magie.

c) On peut remonter des boutiques vers les ateliers puis vers les forums en interrogeant les boutiques sur leur *offre de réponses*. Cette offre praxéologique dépend en amont, bien entendu, de la production des *ateliers* et, en deçà encore, de l’activité des *forums*. Considérons ainsi cette boutique qu’est un exposé E sur un certain domaine d’activité Δ_0 . Quelle est l’offre praxéologique de E en ce qui concerne Δ_0 ? Ou, pour le dire autrement, à quelles questions relative à Δ_0 l’exposé E apporte-t-il des réponses ? Ce que l’on rencontre alors, c’est le problème suivant : comment disposer de questions (relatives à Δ_0) à poser à E ? C’est ce point qui nous retiendra maintenant.

6. Engendrer des questions

a) On a vu plus haut une technique relative au recueil de questions relatives à un domaine d’activité Δ_0 : la technique des *témoins*, immédiats ou rétrospectifs. C’est au fond cette technique qui permet de constituer, sur le Web, des listes de *frequently asked questions*, expression où l’adverbe

frequently n'est pas toujours juste, ainsi que le rappelle ce passage de l'article "FAQ" de *Wikipedia*.

Originally the term *FAQ* referred to the Frequently Answered Question itself, and the compilation of questions and answers was known as a **FAQ list** or some similar expression. Today *FAQ* is more frequently used to refer to the list, and a text consisting of questions and their answers is often called an *FAQ* regardless of whether the questions are actually *frequently* asked (if asked at all). This is done to capitalize on the fact that the concept of a *FAQ* has become fairly familiar online – documents of this kind are sometimes called **FAAQs** (**F**requently **A**sksed and **A**nticipated **Q**uestions).

Bien entendu, on peut ajouter à cela des distinctions, évidentes, entre témoins spontanés et témoins sollicités, etc.

b) Un exposé *E* sur Δ_0 est constitué d'un ensemble d'énoncés relatifs à Δ_0 (ou à certains objets de Δ_0). Au lieu d'interroger cet exposé en lui posant des questions préalablement formulées, on peut en extraire – en excrimer – des *questions*. Certaines de ces questions peuvent être explicites dans *E* lui-même. On vient ainsi de publier en un recueil unique, sous le titre lapidaire de *Questions*, l'ensemble des 1920 questions qui apparaissent dans l'œuvre de Roland Barthes (1915-1980) publiée entre 1942 et 1980 (Éditions Manucius, 2009). J'en détache ce très court extrait (pp. 97-98).

Qu'est-ce que cela veut dire pour une langue que *commencer*? Quand commence un genre? Qu'est-ce que cela veut dire quand on nous parle du premier roman français, par exemple (II 1244) Comment appeler ce code général des actions narratives, dont les unes apparaissent importantes, douées d'une grande densité romanesque (*assassiner, enlever une victime, faire une déclaration d'amour*, etc.) et les autres très futiles (*ouvrir une porte, s'asseoir*, etc.), de façon à le distinguer des autres codes de culture qui s'investissent dans le texte (cette distinction n'a évidemment qu'une valeur analytique, car le texte présente tous les codes mêlés et comme *tressés*)? (II 1258)

D'autres questions ne sont nullement explicites : il faut donc les excrimer par une opération spécifique. Voici de cela un exemple simple : il concerne un bref extrait de l'ouvrage de Piergiorgio Odifreddi, *Les mathématiques à l'aube du XXI^e siècle* (Belin, 2004, p. 28).

Les années 1980 : le lambda calcul

La théorie des ensembles a fourni aux logiciens une fondation adéquate contre les paradoxes. Au contraire, les mathématiciens, dont le travail quotidien n'est

pas du tout concerné par la problématique des paradoxes, ont trouvé dans les structures bourbakistes et dans la théorie des catégories des fondations plus appropriées à leur pratique.

Aucune des trois approches n'est satisfaisante du point de vue des informaticiens, qui utilisent massivement des algorithmes et des programmes traitant des données, c'est-à-dire des fonctions qui sont appliquées à des arguments. Seule la théorie des catégories traite directement de fonctions, mais celles-ci sont composées entre elles et pas directement appliquées à des arguments. L'informatique théorique nécessite donc une fondation alternative ; elle l'a trouvée dans le *Lambda Calcul* proposé par Alonzo Church en 1933.

L'idée de Church fut précisément d'essayer une approche alternative aux fondements de la mathématique, parallèle à la théorie de Cantor et Frege, mais basée sur le concept de fonction à la place de celui d'ensemble selon le schéma suivant. Une fonction correspond à un ensemble, un argument de fonction correspond à un élément d'un ensemble, l'application d'une fonction à un argument correspond à l'appartenance d'un élément à un ensemble, et la définition d'une fonction à travers la description de ses valeurs correspond à la définition d'un ensemble à travers une propriété des éléments.

La théorie ingénue des ensembles se traduit donc automatiquement en une théorie ingénue des fonctions. Elle se base sur deux seuls principes qui réduisent les fonctions aux descriptions de leurs valeurs. D'abord, le *principe d'extension* : une fonction est totalement déterminée par ses valeurs et deux fonctions qui ont les mêmes valeurs pour les mêmes arguments sont donc égales. Ensuite, le *principe de compréhension* : chaque description de ses valeurs détermine une fonction et chaque fonction est déterminée par une description de valeurs.

Voici donc une « mise en questions » du *premier* paragraphe de ce passage.

Les années 1980 : le lambda calcul ① La théorie des ensembles a fourni aux logiciens une fondation adéquate contre les paradoxes.	Q_0^1. Qu'y a-t-il de neuf concernant les fondements des mathématiques dans les années 1980 ? Q_0^2. Quand le lambda calcul devient-il central dans la question des fondements des mathématiques ? Q_1^1. À quelle question $[Q]$, dans le cadre de quel projet $[\Pi]$ répondait la théorie des ensembles $[p]$ pour les logiciens $[U]$? $\overline{Q}_1^1$. Quelle théorie mathématique $[p]$ a permis aux logiciens $[U]$ d'éliminer les paradoxes $[Q]$ afin de fonder des
--	---

	mathématiques $[\Pi]$?
② Au contraire, les mathématiciens, dont le travail quotidien n'est pas du tout concerné par la problématique des paradoxes, ont trouvé dans les structures bourbakistes et dans la théorie des catégories des fondations plus appropriées à leur pratique.	Q_2^1 . À quelle question $[Q]$, dans le cadre de quel projet $[\Pi]$, répondaient la théorie bourbakiste des structures et la théorie des catégories $[p_1 \ \& \ p_2]$ pour les mathématiciens $[U]$? $\overline{Q}_2^1$. Quelles théories mathématiques $[p_1 \ \& \ p_2]$ ont permis aux mathématiciens $[U]$ de donner un cadre fondateur $[Q]$ à leur pratique $[\Pi]$?

Bien entendu, d'autres questions, extraites des « présupposés » du texte, peuvent être soulevées – sur la nature de la théorie des ensembles, sur celle des « paradoxes », etc. Mais ce ne sont pas là des questions pour lesquelles le texte examiné *se présente comme apportant des réponses* – il suppose connues des réponses à ces questions qu'il ne « travaille » pas.

c) Le premier usage peut-être des questions ainsi extraites d'un exposé E consiste à *retourner ces questions à E* pour examiner quelles réponses, au juste, E leur apporte : c'est là une technique d'étude efficace d'un exposé dont on voudrait estimer l'*offre praxéologique* véritable. Plus généralement, une fois constitué un large inventaire de questions qui se posent (ou, du moins, qui sont posées par un certain corpus d'exposés) touchant un certain projet Π en un certain domaine Δ , on peut interroger un exposé ou une institution – saisie dans son activité et à travers ses « exposés » – pour en cartographier l'offre praxéologique.

7. Offres praxéologiques scolaires

a) Je considère ici ce type d'institution qu'est une *école* – institution qui s'engage à faire rencontrer et/ou à faire acquérir à ses élèves U certaines praxéologies annoncées, c'est-à-dire certaines réponses à certaines questions. Prise en elle-même, une école mérite qu'on lui applique d'abord une problématique *possibiliste* (faible et forte), en explorant, selon les ensembles K de contraintes qui y prévalent et les ensembles C de conditions que l'on peut y créer, les ensembles p de praxéologies que les publics U d'élèves de l'école peuvent rencontrer ou intégrer à leur équipement praxéologique, soit $\{ p / \partial(K, C, p, U) \}$ et $\{ p / \Re(K, C, p, U) \}$.

b) On s'interrogera, ici, moins sur le cas d'une école déjà établie (dont l'offre praxéologique est momentanément fixée, sinon figée) que sur le cas d'un

projet d'école. (La différence n'est pas bien grande : pour se survivre, une école instituée doit régulièrement songer à se ré-instituer, à se refonder.) La première exigence du projet d'instituer une école est qu'on y procède à la *déclaration* des types de projets Π pour lesquels l'école correspondante prétendra, de façon sans doute partielle, équiper praxéologiquement ses élèves. Contrôler que l'école finalement établie est fidèle à cette déclaration, cela supposera la comparaison des ensembles $\{ p / \mathfrak{I}(p, \Pi, U) \}$ et $\{ p / \mathfrak{D}(K, C, p, U) \}$ ou $\{ p / \mathfrak{R}(K, C, p, U) \}$, où U est un public d'élèves de l'école, Π un projet déclaré dans le projet d'école, K et C , respectivement, des ensemble de conditions et de contraintes sous lesquelles sera placé dans cette école le public d'élèves U .

c) L'un des problèmes cardinaux qui peuvent mettre en danger la réalisation d'un projet d'école tient à l'existence d'une inadéquation entre ce que le projet d'école promettait et ce que l'école offre effectivement. Dans ce qui est sans doute le pire des cas, il en va ainsi lorsque l'offre praxéologique effective de l'école ne renvoie plus à l'équipement praxéologique utile en quelque projet Π que ce soit ! Telle praxéologie p est ainsi « enseignée » mais plus personne ne sait dire exactement en quels projets Π elle pourrait se révéler utile : on ne sait plus guère désigner les « applications » possibles de l'enseignement prodigué. L'un des chemins qui conduisent à une telle dégénérescence a, semble-t-il, pour point de départ l'oubli – conjointement par l'école et par ses publics – que les praxéologies enseignées p ont été choisies à la fondation de l'école comme des réponses R à des questions Q soulevées par certains projets Π . Dès lors, les praxéologies enseignées se présentent comme des réalités « en soi et pour soi », et non comme les fruits précieux d'une logique praxéologique qu'on pourrait noter ainsi : $\Pi \Rightarrow Q \Rightarrow p$. Pour le dire autrement, les praxéologies enseignées, qui subissent au reste souvent une dénaturation du fait de ce changement de statut, deviennent pour l'école et ses publics, des *hypostases* praxéologiques – qu'on peut appeler, au plus près d'une certaine idéologie passéiste, les « savoirs enseignés ». Cette évolution peut aboutir à une situation lentement évolutive où tant l'école que ses publics apparaissent *attachés* aux hypostases praxéologiques enseignées. Un tel attachement, qui semble se transmettre aux générations successives d'élèves, est ce que nombre de professeurs et autres membres de la profession nomment *l'amour* des savoirs enseignés – cet amour, pensent-ils souvent, qu'il faut parvenir à susciter chez les élèves au moins durant le temps de leur passage à l'école.

d) Il vient cependant un jour où cet attachement ne peut plus cacher une réalité évidente : l'offre praxéologique de l'école se réduit à la visite de « monuments » praxéologiques dont nul ne sait plus exactement à quoi ils pouvaient ou pourraient servir. On ne peut plus, par ce système de visites

imposées, dont il faudrait se régaler, compenser la perte de crédit praxéologique des « savoirs enseignés » : la visite de tel monument peut être jugée intéressante – en fait, elle est généralement jugée ennuyeuse – mais le monument visité paraît désormais *inutile*. L'école est vue alors comme procédant à un *abandon* des publics *U* auxquels elle s'adresse : ce qu'elle propose, ces publics ont cessé d'en voir la puissance praxéologique ; et ils comprennent obscurément que l'offre praxéologique qui les comblerait est en vérité inexistante, l'école se maintenant dans une ignorance mi-étudiée, mi-irréfléchie à l'endroit des besoins praxéologiques qui les affectent.

FAIRE ÉCOLE ?

1. Le désir praxéologique et ses conséquences

a) Quelles sont les conditions d'ensemble qu'un projet d'école à l'adresse d'un certain type de publics *U* doit prendre en compte ? Un premier faisceau de conditions concerne son *offre praxéologique*. J'utiliserai ici l'équivalence invoquée plus haut pour parler de l'*offre de réponses* de l'école, ce qui renvoie implicitement au *répertoire de questions* *Q* auxquelles l'école déclare apporter réponse. La constitution d'un tel répertoire de questions suppose un inventaire des projets Π à l'horizon de la formation scolaire visée et l'étude de ces projets d'activité afin d'en dégager les répertoires notées plus haut $\{ Q / \aleph(Q, \Pi, U) \}$. Reprenant une formule de l'historien Lucien Febvre (1878-1956) à propos du projet de l'*Encyclopédie française* (1935-1966), j'ai dit autrefois que l'école de la République doit proposer l'étude de ces questions que « l'homme non spécialisé porte en lui ». Le même principe s'applique, *mutatis mutandis*, à toute école vis-à-vis de ses types de publics : il lui revient de prendre en charge les questions que ces publics « portent en eux ». Cela revient à identifier les questions que soulèveront les projets d'activité Π dans lesquels ces publics sont promis à s'engager – ce qui, à l'évidence, ne saurait être fait qu'avec une certaine approximation. Mais cela interdit en tout cas de faire son répertoire de questions simplement avec ces questions pour lesquelles on dispose de réponses toutes faites et de manières toutes faites d'en diriger l'étude !

b) Il n'est pas évident que la déclaration d'une question *Q* dont on estime que les publics *U* « la portent en eux » suffise à susciter l'intérêt de ces publics *U* pour l'étude de *Q*. C'est qu'il faut en fait tenir les deux bouts de la chaîne : d'un côté, il y a les questions « ombilicales » qui vont nourrir des réponses qu'on leur apportera les projets Π dans lesquels *U* pourrait raisonnablement être conduit à s'engager à moyen terme ou même à court terme ; de l'autre, il y a les questions auxquelles *U* *désire devenir capable de disposer d'une réponse à engager dans un certain projet d'activité*. C'est sur ce deuxième

aspect que je voudrais m'arrêter maintenant. J'appelle *désir praxéologique* un désir dont l'objet est une praxéologie regardée comme réponse à une question. Plusieurs remarques immédiates doivent être faites à ce propos. Il faut d'abord distinguer le désir praxéologique, qui est désir de savoir et de savoir-faire, et dont l'objet est donc vu comme un *moyen* au service d'un certain projet d'activité, du désir dont l'objet serait une hypostase praxéologique, vue – et vénérée ou détestée – comme une fin en soi. Notons que l'on peut n'éprouver *a priori* aucun sentiment positif à l'endroit de telle praxéologie tout en étant vivement désireux de l'étudier (afin d'en disposer). C'est ainsi que, si Albert Einstein étudia (autour de 1915) le *calcul tensoriel* dans le livre de Gregorio Ricci-Curbastro et Tullio Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (1900), ce n'était sans doute pas par amour *a priori* du calcul tensoriel, mais parce qu'il croyait y trouver l'outil désirable pour construire la théorie de la relativité générale. Au reste, il commit dans l'utilisation qu'il en fit des erreurs que Levi-Civita releva. Dans la correspondance qui s'ensuivit (1915-1917), Einstein écrivait ceci (que je cite en anglais, faute de disposer de l'original) :

I admire the elegance of your method of computation; it must be nice to ride through these fields upon the horse of true mathematics while the like of us have to make our way laboriously on foot.

Einstein admirait cette élégance, mais ne la désirait pas suffisamment, peut-on penser, pour faire autre chose, quant à lui, que l'admirer.

c) Une seconde remarque quant à la notion de désir praxéologique est que celle-ci peut être un fait *personnel* – comme dans le cas précédent, encore qu'Einstein fut aidé par Marcel Grossmann (1878-1936), qui identifia le calcul tensoriel comme l'outil pertinent et aida Einstein à le maîtriser – mais est généralement un fait *collectif*, institutionnel. La chose est évidente quand on observe les jeunes : c'est souvent toute une partie d'une classe d'âge qui désire d'un même mouvement ceci ou cela... Mais j'illustrerai ce phénomène un peu autrement que par les enthousiasmes praxéologiques juvéniles. Longtemps, dans notre société, le *dessin* fut l'objet d'un vif désir praxéologique de la part du public populaire, parce qu'il apparaissait comme la clé d'un grand nombre de métiers de l'artisanat. Dans le bilan – établi en février 1800 – des « écoles centrales » départementales, qui précédèrent les lycées napoléoniens (créés en 1802) et qui proposaient des enseignements « à la carte », on pouvait lire ceci (d'après Dominique Julia, *Les trois couleurs du tableau noir. La Révolution*, Belin, 1981).

Le cours de dessin se trouve le premier ; il est le plus fréquenté de tous. Un grand nombre d'écoles comptent 100, 200, et même 300 élèves ; celle de l'Hérault en a 348. La durée de ce cours est et doit être indéfinie.

Il est séparé de la chaîne des études ; la plupart des élèves qui le suivent sont des fils d'artisans qui commencent ainsi leur état d'orfèvre, d'architecte et de menuisier, quelques-uns de peintre, et qui n'ont l'intention de faire aucune autre espèce d'études dans les écoles centrales... (p. 279)

Il y avait ainsi un vif désir collectif de dessin, vu comme outil de progrès personnel et social. Le même bilan nous renseigne sur l'attractivité du cours de mathématiques.

Après le cours de dessin, c'est celui qui offre les résultats les plus satisfaisants. On s'y ressent, dans les départements les plus éloignés, de l'influence de l'École polytechnique établie à Paris, et cet exemple peut faire juger du bon effet que produiraient de semblables établissements pour les sciences morales, ou pour les lettres. (p. 280)

On peut penser qu'une condition pour qu'une école ne voie pas les praxéologies qui s'y enseignent s'hypostasier et son enseignement dégénérer est que son offre de réponses soit l'objet d'un réel désir praxéologique de la part d'au moins une forte minorité des publics *U* auxquels elle s'adresse. C'est aussi une condition pour que, lorsque ces publics ne sont pas captifs, ils continuent de « venir à l'école » au lieu de s'en détourner ; et que, lorsqu'ils ne peuvent faire autrement, ils ne tirent pas uniquement, pour y demeurer, sur leur « docilité » et leur capacité de résistance au déplaisir. La chose est si vraie que, pour éloigner un public non désiré d'une école, on peut en écarter l'étude des questions qui suscitaient le plus vif désir de sa part. L'exemple du dessin, là encore, est éclairante : en 1801, avant la création des lycées, une réforme des écoles centrales avait été préparée qui n'eut pas d'application ; à propos du nouveau plan d'études élaboré alors sous l'influence de Destutt de Tracy (1754-1836), Dominique Julia note ceci.

Le cours de dessin en revanche a cessé d'être considéré comme la base d'acquisition des connaissances. Il est désormais relégué au rôle de « délassement » accessoire. Cette conception est parfaitement cohérente avec la fonction de ségrégation sociale dévolue aux écoles centrales par Destutt de Tracy le cours de dessin était en effet, en raison de ses applications pratiques, le plus « populaire » des enseignements dispensés au double sens du terme : il attirait le plus grand nombre d'élèves, et parmi eux une clientèle issue des milieux de l'artisanat. (pp. 277-279)

On écarte donc des disciplines enseignées l'une d'elles, parce que le désir praxéologique dont elle fait l'objet provient d'un public que l'on veut écarter. On voit là une partie du « jeu » existant entre l'offre praxéologique scolaire et la demande praxéologique des publics concernés (ou qui pourraient l'être). Si l'offre comporte telle discipline, elle pourra attirer tel public. Si l'on veut écarter tel public, on écartera telle discipline. Mais que se passe-t-il si l'offre ne rencontre aucune demande ? Si le désir praxéologique, dans les différents publics possibles, ne s'articule pas (ou plus) à l'offre proposée ? Si le désir décline ? Sans doute pourra-t-on voir alors se maintenir un certain temps une apparence de désir, du fait d'un public captif et de sa docilité traditionnelle. Mais les symptômes se multiplient bientôt de cette panne du désir, de cette inappétence pour une offre praxéologique scolaire de plus en plus difficile à faire accepter.

d) L'offre praxéologique scolaire ne doit donc pas seulement prendre en charge certaines des questions que les publics visés « portent en eux » ; elle doit encore faire l'objet, de leur part, d'un véritable désir praxéologique. En d'autres termes, les questions auxquelles l'école déclare apporter réponse doivent susciter de façon large (sinon unanime ou même majoritaire), un désir de savoir et de savoir-faire de la part des élèves visés. Que peut-on faire pour qu'il en soit ainsi ? Il faut d'abord que ces questions, si elles existent, soient visibles de l'extérieur de l'école, depuis les positions qu'occupent les publics d'élèves visés. L'école doit donc les *déclarer* – de préférence aux praxéologies elles-mêmes, qui courent le risque d'être rapidement hypostasiées, faute d'être désirées. En d'autres termes, on peut penser – et ce sera une hypothèse de travail dans ce séminaire – à formuler le programme d'étude, non en termes d'*œuvres*, mais en termes de *questions*. L'organisation du répertoire des questions à étudier doit en outre comporter une *couche externe* de types de questions « naïves » auxquels s'attachera le désir praxéologique espéré, les questions *engendrées* par l'étude de ces questions de « nouage » trouvant ensuite leur motivation dans cette étude même. Le changement évoqué ici – mettre au premier plan les *grands problèmes* sur lesquels les publics scolaires pourraient désirer s'instruire – constitue un *changement radical* par rapport à l'organisation scolaire actuelle, qui met en avant les œuvres, non les questions auxquelles elles pourraient répondre. Bien entendu, une difficulté essentielle que soulève le schéma précédent reste alors celui de ces grands types de problèmes, de ces questions naïves sur lesquelles se posera le désir praxéologique des élèves et à propos desquelles se nouera le pacte d'instruction scolaire.

e) Je me contenterai ici de formuler quelques remarques liminaires. Tout d'abord, il s'agit d'un problème qu'on ne saurait résoudre en un tour de main : il s'agit d'un problème fondamental de la recherche en didactique.

Ensuite, les types de questions retenus ne pourront guère relever d'une discipline donnée uniquement : elles appelleront presque nécessairement une étude *codisciplinaire*, à laquelle les sciences mathématiques devront apporter leur contribution en articulation avec d'autres contributions. Enfin, chaque type de questions de nouage retenu devra être illustré par *quelques* questions particulières du type considéré, susceptibles d'être plus aisément reçues des publics visés. Supposons par exemple que le « grand problème » déclaré par l'école soit formulé ainsi : « Comment comprendre et comment gérer les situations d'incertitude personnelles et collectives ? » On pourra alors proposer parmi les questions illustrant ce type celle-ci : « Faut-il croire à la loi des séries ? » Le problème est ouvert.

2. Infrastructures didactiques

a) Revenons une fois de plus au schéma herbartien :

$$[S(X; Y; Q) \Rightarrow \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \}] \Rightarrow R^\vee.$$

Lorsqu'on désire étudier une question Q , on a besoin d'instruments didactiques, représentés ici par le milieu $M = \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \}$. Parmi les *œuvres* O_j figure ce que je nommerai l'*infrastructure* du milieu didactique (ou infrastructure *instrumentale*), laquelle, ordinairement, s'étage sur plusieurs niveaux. Dans le texte intitulé « Les années 1980 : le lambda calcul », nous avons entraperçu le niveau le plus profond, celui des *fondements* de l'infrastructure instrumentale, réputé constitué, pour les logiciens, de la théorie des ensembles, pour les mathématiciens, de la théorie bourbakiste des structures et de la théorie des catégories, pour les informaticiens, du lambda calcul. Notons ici deux points importants. Tout d'abord, ce niveau infrastructurel profond est généralement regardé comme un « donné » par le praticien, du moins quand celui-ci a conscience de son existence au lieu de se contenter d'en tirer profit pour sa pratique. Ensuite et surtout, cette partie de l'infrastructure instrumentale est le fruit d'une élaboration qui, sauf exception, suppose des *forces productives supérieures* – elle ne saurait être la création d'un professeur qui préparerait même longuement ses cours ! C'est là un fait qui s'étend à des couches moins profondes de l'infrastructure instrumentale, ce que j'illustrerai par quelques exemples.

b) Je note d'abord que l'infrastructure instrumentale varie avec l'état du domaine disciplinaire à partir duquel on opère. C'est ainsi que, présentant un cours sur les intégrales stochastiques donné dans le cadre du Séminaire de probabilités de l'Université de Strasbourg en 1974-1975, le mathématicien Paul-André Meyer (1934-2003) commence par broser une

rapide chronique de l'évolution de la théorie, dont il note alors qu'elle « semble avoir atteint une forme à peu près définitive », avant d'ajouter ceci.

Seulement, alors qu'autrefois il suffisait de deux heures d'exposé pour traiter l'intégrale d'Ito, et qu'ensuite les belles applications commençaient, il faut à présent un cours de six mois sur les définitions. Que peut-on y faire ? Les mathématiques et les mathématiciens ont pris cette tournure. Il est temps de commencer.

J'emprunte cet exemple à la thèse de Michèle Artaud ; le propos cité, lui-même, est extrait d'un cours sur les intégrales stochastiques paru dans le volume *Séminaire de Probabilités X (Lecture Notes in Mathematics, 511, 245-400)*. Je note que l'évolution indiquée par P.-A. Meyer n'est pas spécifique aux œuvres mathématiques ; sans doute même tient-on là en partie une des racines du processus de monumentalisation des œuvres O_j introduites dans le milieu didactique M .

c) Je prendrai maintenant un exemple plus proche des questions d'instrumentation touchant le professeur de mathématiques – l'infrastructure « instrumentale » devenant ici infrastructure *mathématique*. Le travail géométrique conduit au collège et au lycée peut tirer avantage de disposer de l'outil *vectériel*. Mais comment construire l'infrastructure vectorielle utile ? La question semble n'avoir pas, aujourd'hui, de réponse dans la profession. Voici pourtant un fragment de réponse proposé, lors de la séance 14 du séminaire de didactique adressé aux professeurs stagiaires de mathématiques en 2000-2001. (Le sigle TGD désigne la « théorie géométrique disponible ».)

– On considère dans ce qui suit une question voisine, introduite à propos du thème d'étude des « configurations du plan », lors de la séance précédente du séminaire : **comment « fonder » géométriquement le calcul vectoriel utilisé en seconde**, tel qu'il résulte de la mise en place effectuée dans des conditions moyennes de relative incurie technologico-théorique en classe de troisième ?

– Dans les organisations mathématiques présentées dans l'enseignement supérieur, et en particulier dans le cadre des préparations aux concours de recrutement de l'Éducation nationale en cette matière (CAPES, agrégation), on suppose en général **résolu par avance** le problème examiné – la construction de l'espace vectoriel des vecteurs d'un espace « affine ». C'est ce que montrent ces définitions de la notion d'**espace affine** reproduites ci-après (Marcel Berger, *Géométrie*, 1, Nathan, Paris, 1990, p. 56) :

DÉFINITION. Un espace affine sur le corps K est une opération de groupe $(X, \vec{X}, \Phi)$ où $\vec{X}$ est un espace vectoriel sur K et agit sur X , en tant que groupe additif, fidèlement et transitivement.

...

DÉFINITION ÉQUIVALENTE. Soit X un ensemble non vide, $\vec{X}$ un espace vectoriel sur K et $\theta: X \times X \rightarrow \vec{X}$ telle que $\forall x$ l'application θ_x est bijective et $\theta(x, y) + \theta(y, z) = \theta(x, z)$ pour tous $x, y, z \in X$. Alors X est un espace affine pour l'action

$$\Phi(\vec{\xi})(x) = \theta_x^{-1}(\vec{\xi}).$$

Et réciproquement.

– La situation qu'il convient de gérer à la fin du collège et en seconde est fort différente : les **vecteurs** du plan (ou de l'espace) doivent en quelque sorte « sortir » des manipulations opérées sur les **points** du plan (ou de l'espace). Le problème d'ensemble à résoudre est bien résumé dans la synthèse suivante (Jean Frenkel, *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann, Paris, 1973, p. 21) :

« La géométrie affine élémentaire fait entrer trois “personnages principaux” : les points, les vecteurs (...), les translations. Les points sont les éléments d'un ensemble X . Les vecteurs sont les éléments d'un espace vectoriel $\vec{X}$. Les translations sont des bijections particulières de X sur lui-même. Dans les lycées et collèges, on a pris l'habitude (...) d'appeler bipoint un élément de X^2 (i.e. un couple de points de X). Un vecteur est une classe “d'équipollence” de bipoints (deux bipoints (x, y) et (x', y') sont équipollents si (x, y, y', x') est la suite des sommets consécutifs d'un parallélogramme, aplati ou non ; le lecteur adoptera comme définition d'un parallélogramme celle qu'il préférera). L'important dans l'enseignement élémentaire (et même supérieur) est que :

- 1) l'équipollence est une relation d'équivalence ; la classe d'équivalence du bipoint (x, y) est notée $\overrightarrow{xy}$;
- 2) l'ensemble $\vec{X}$ des classes d'équipollence est muni d'une structure d'espace vectoriel sur un corps (qui est $\mathbb{R}$ ou peut-être $\mathbb{Q}$ en géométrie élémentaire) ;
- 3) à tout vecteur $\vec{V} \in \vec{X}$ est associée une translation, à savoir la bijection qui au point x associe le point $y \in X$, noté souvent $x + \vec{V}$, tel que $\overrightarrow{xy} = \vec{V}$.

Ces trois espèces de personnages peuvent entrer en scène dans un ordre variable. Ce qui importe ce sont naturellement les relations entre elles. Elles-mêmes peuvent être présentées sous différents jours. »

– On doit préciser d'abord l'affirmation relative au corps de nombres « qui est $\mathbb{R}$ ou peut-être $\mathbb{Q}$ » : de fait sinon de droit, tout se passe comme si l'on utilisait un sous-corps $\mathfrak{K}$ de $\mathbb{R}$ croissant au fil des années : sur-corps strict de $\mathbb{Q}$ dès la 6^e (puisque $\pi \in \mathfrak{K}$), il devient (le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$) fermé pour la racine carrée et le cosinus (et donc pour le sinus) à partir de la 4^e, etc.

– Qu'en est-il alors, actuellement, au secondaire, des relations entre les trois « personnages » ?

- Le premier personnage à entrer en scène, dès la 6^e, ce sont bien sûr les **points**. En 4^e apparaissent les **translations**. En 3^e, enfin, les **vecteurs** sont introduits. Cet ordre d'entrée en scène résulte d'un choix délibéré. Un commentaire du programme de 4^e indique ainsi :

« Les vecteurs seront abordés en 3^e et leur étude sera reliée à celle des translations à l'occasion de la composition de ces dernières. »

Le document d'accompagnement des programmes du cycle central (5^e & 4^e) explicite ainsi les motifs du choix retenu :

« Le cycle central du collège a semblé être approprié au passage graduel d'une vision des figures à celle du plan tout entier. La translation convient pour marquer une telle évolution. Par certains côtés, tels que les conservations d'alignements, les distances et les angles, la translation est proche des symétries, donc s'intègre bien à un univers avec lequel les élèves sont familiarisés. Mais elle doit nécessairement être regardée comme une transformation, parce qu'en répétant une même translation on ne revient pas à son point de départ. Ce point de vue a paru suffisamment important pour que l'étude de la translation ne soit pas mélangée à d'autres acquisitions ; ainsi, ni les vecteurs, ni la projection, ni toute autre application n'ont été introduits en classe de 4^e. Le report de la présentation de la notion de vecteur ne soulève pas de problèmes de liaison avec les autres disciplines. C'est la composition de translations différentes qui rendra utile l'introduction des vecteurs. »

- La classe de 3^e voit donc l'apparition des vecteurs. Le programme précise :

« Le programme de la classe de troisième a pour objectif de permettre – en géométrie :

- ♦ de compléter d'une part, la connaissance de propriétés et de relations métriques dans le plan et dans l'espace, d'autre part, l'approche des transformations par celle de la rotation,

- ♦ de préparer l'outil calcul vectoriel, qui sera exploité au lycée [...] »

« L'introduction de la notation vectorielle et de l'addition des vecteurs, qui constitue une initiation au calcul vectoriel, est l'un des aboutissements, du travail effectué au cycle central sur le parallélogramme et la translation. »

- On notera enfin que, en 4^e, l'étude de la translation est fondée sur les propriétés du parallélogramme :

« La translation est définie à partir du parallélogramme. Elle pourra donner lieu à des manipulations, notamment sur des quadrillages.

On pourra ainsi, après un travail expérimental conduisant à mettre en évidence la conservation des longueurs, de l'alignement, des angles et des aires, justifier certaines de ces conservations.

Définition et propriétés pourront être utilisées dans la résolution d'exercices très simples de construction. »

– On suppose ici une certaine TGD dans le cadre de laquelle on veut construire les vecteurs du plan. Le premier problème consiste à définir une relation d'équivalence entre « bipoints » du plan, c'est-à-dire entre couples de points.

– Si l'on ignore la translation, on peut vouloir définir l'« équipollence » par :

$(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme.

Cette définition présente toutefois une difficulté lorsque A, B, C, D sont alignés : qu'est-ce au juste qu'un parallélogramme « aplati » ?

- On peut régler ce problème en remplaçant l'énoncé précédent par :

$(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow$ il existe E et F tels que ABFE & DCFE sont des parallélogrammes

- On peut aussi utiliser la définition suivante :

$(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow [AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

– Le programme de 3^e incite toutefois à introduire les vecteurs **à partir de la translation**, non sans demander de lier cette définition avec celle qui se formule en termes de parallélogramme éventuellement aplati :

Compétences exigibles

Connaître et utiliser l'écriture vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ pour exprimer que la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D.

Lier cette écriture vectorielle au parallélogramme ABCD éventuellement aplati.

Commentaires

Cette rubrique prend en compte les acquis du cycle central sur les parallèles et sur la translation. Elle est orientée vers la reconnaissance, dans les couples (A, A') , (B, B') , (C, C') ... de points homologues par une même translation, d'un même objet nommé vecteur. On écrira $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$...

- On posera donc :

$(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow$ la translation $t_{A \rightarrow B}$ transforme C en D.

- Toutefois, le programme de 3^e demande en outre d'établir l'équivalence de ce point de vue avec les points de vue précédemment évoqués :

« On mettra en évidence la caractérisation d'une égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ à l'aide des milieux de [AD] et [BC] :

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

Si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu, alors on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. »

- En outre, il conviendra de justifier un point de vue en apparence plus « naïf », dont le même programme souligne l'importance :

« L'un des objectifs est que les élèves se représentent un vecteur à partir d'une direction, d'un sens et d'une longueur. »

– On a donc ici un **premier problème à étudier**, Π_1 : problème de « mise en ordre déductif » dans le cadre de la TGD des différentes expressions envisageables de l'équipollence de deux « bipoints ».

– **Supposant Π_1 résolu**, désignons par #ABCD l'une quelconque des expressions utilisables pour définir l'équipollence de (A, B) et (C, D). Pour avancer à partir de là, supposons en outre **que l'on a résolu le problème Π_2** consistant à établir que l'on a :

$\vdash_{\text{TGD}}$ Si #ABCD alors #ACBD [V₁]

$\vdash_{\text{TGD}}$ Si #ABCD alors #CDAB [V₂]

$\vdash_{\text{TGD}}$ Si #ABCD et #CDEF alors #ABEF [V₃]

$\vdash_{\text{TGD}}$ Quels que soient les points A, B, C, il existe un unique point D tel que #ABCD [V₄]

– Montrons alors que la relation d'équipollence est une relation d'**équivalence**.

- La relation est d'abord **symétrique** : d'après V₂, si (A, B) ~ (C, D), c'est-à-dire si #ABCD, alors #CDAB, soit (C, D) ~ (A, B).

- La relation est **transitive** : d'après V₃, si (A, B) ~ (C, D) et (C, D) ~ (E, F), c'est-à-dire si #ABCD et #CDEF, alors #ABEF, soit (A, B) ~ (E, F).

- La relation est **réflexive** : soit A et B deux points donnés, C un point quelconque, et soit alors D, d'après V₄, le point tel que #ABCD ; d'après V₂ on a #CDAB, en sorte que, d'après V₃, il vient enfin #ABAB, soit (A, B) ~ (A, B).

– Un **vecteur** peut dès lors être défini, formellement, comme une **classe d'équivalence de couples de points**, la classe d'équivalence du couple (A, B) étant notée $\overrightarrow{AB}$. Si X désigne le plan, l'ensemble $\overrightarrow{X}$ des vecteurs vérifie : $\overrightarrow{X} = X/\sim$. Cette définition « abstraite » doit évidemment être remplacée, en 3^e comme en 2^{de}, par la définition « concrète » en termes de direction, sens et longueur : problème qu'on laisse ici de côté.

- On peut maintenant envisager de définir la **somme** de deux vecteurs.
- Montrons d'abord que, étant donné un vecteur $\vec{u} \in \vec{X}$ et un point A, **il existe un unique point B tel que $\vec{AB} = \vec{u}$** . Soit en effet un couple (C, D) tel que $\vec{CD} = \vec{u}$; l'égalité vectorielle $\vec{AB} = \vec{u}$ équivaut alors au fait que #CDAB : en vertu de V_4 , B existe et est unique.
- Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{X}$ et soit A un point. D'après ce qui précède, il existe un unique point B tel que $\vec{AB} = \vec{u}$. De même, il existe alors un unique point C tel que $\vec{BC} = \vec{v}$. On souhaite poser $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$: il suffit pour cela de démontrer que $\vec{AC}$ est **indépendant du choix de A**.
- Soit E, F, G tels que $\vec{EF} = \vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{FG} = \vec{v} = \vec{BC}$. Montrons que l'on a alors $\vec{EG} = \vec{AC}$, soit $(E, G) \sim (A, C)$. On a en effet #EFAB et #FGBC. D'après V_1 , on en déduit #EAFB et #FBGC (par « permutation des moyens »). D'après V_3 il vient ainsi #EAGC, et, par une nouvelle application de V_1 , #EGAC, soit $(E, G) \sim (A, C)$.
- Il conviendrait alors de vérifier que l'addition ainsi définie sur $\vec{X}$ possède bien les propriétés usuelles (associativité, commutativité, etc.).
- Montrons par exemple **l'existence d'un élément neutre**. Soit A un point ; notons $\vec{0}$ le vecteur $\vec{AA}$. Soit B un point quelconque et soit, d'après V_4 , C l'unique point tel que #AABC. D'après V_1 , on a #ABAC, en sorte que, d'après la propriété d'unicité démontrée plus haut, $C = B$. Inversement, on a #ABAB et donc (d'après V_1) #AABB, soit $\vec{BB} = \vec{AA} = \vec{0}$. Ainsi $\vec{BC} = \vec{0}$ si et seulement si $B = C$.
- Soit $\vec{u} \in \vec{X}$, $A \in X$, et soit B tel que $\vec{AB} = \vec{u}$. On a alors $\vec{u} + \vec{0} = \vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB} = \vec{u}$. On montre de même que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$. Le vecteur $\vec{0}$ est donc l'élément neutre de l'addition vectorielle.
- On peut alors vérifier que pour chaque vecteur $\vec{u}$ il existe un vecteur opposé, noté $-\vec{u}$: si $\vec{AB} = \vec{u}$, on a en effet $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$. On a ainsi $-\vec{u} = \vec{BA}$, et donc $\vec{BA} = -\vec{AB}$.
- L'étude mathématique que l'on vient d'esquisser devrait évidemment se poursuivre avec, notamment, la définition du **produit d'un vecteur par un scalaire** et la vérification des propriétés usuelles de ce produit. Mais l'ébauche précédente suffit à donner du crédit à l'idée selon laquelle les assertions V_1 à V_4 pourraient constituer une axiomatique des espaces affines, ou du moins une partie importante d'une telle axiomatique.

D'après I. M. Yaglom (*Mathematical Structures and Mathematical Modelling*, 1986, p. 146), l'axiomatique évoquée (appuyée sur la notion de parallélogramme) semble être apparue pour la première fois vers 1917 sous la plume d'Hermann Weyl (1855-1955). Semblablement, plus près de nous, c'est à Hassler Whitney (1907-1989) que l'on doit une étude publiée en 1968

fournissant l'infrastructure mathématique de la théorie des grandeurs et de leur mesure (The Mathematics of Physical Quantities, Part II : Quantity Structures and Dimensional Analysis. *The American Mathematical Monthly*, 75, 227-256). On pourrait multiplier les exemples. Ainsi des *systèmes de nombres* utiles au collège et au lycée. C'est ainsi que la constitution d'une *infrastructure numérique* adéquate requiert un travail dont l'essentiel ne saurait être le fait du professeur « au chevet de la classe ».

d) Cette dernière conclusion doit être généralisée. Le choix adéquat des types de questions à étudier d'abord, celui des outils à rassembler ensuite, la construction, en articulation avec l'infrastructure instrumentale constitutive du milieu didactique *M*, d'une infrastructure didactique sur laquelle s'élèvera l'organisation didactique que le professeur mobilisera, tout cela ne saurait être aujourd'hui la création d'un professeur en tant que tel ou même d'une communauté – réelle ou virtuelle – de professeurs. Devant toute prétention à cet égard, je serais enclin à demander sans façon *où sont les savants*, où est la science faite et la science en train de se faire sur laquelle une telle communauté prétend s'appuyer. Il est passé le temps des petits producteurs indépendants ou même des *groupements* de tels producteurs, même « sur Internet ». Dans le cas de l'enseignement de mathématiques, ainsi, on peut appeler infrastructure *mathématique* cette partie de l'infrastructure *didactique* sur laquelle repose le milieu didactique *M* ; et on peut appeler infrastructure *didactique stricto sensu* cette autre partie sur laquelle s'élève l'organisation didactique permettant l'étude spécifique de la question examinée. Dans le cas de l'infrastructure *mathématique*, il est évident que sa production requiert l'intervention de forces productives supérieures (ainsi a-t-on pendant des siècles utilisé, pour l'enseignement de la géométrie, le texte euclidien dans des versions plus ou moins retouchées) ; mais il y a manifestement une tendance « moderne » à scotomiser et à oublier ce fait massif. Dans le cas de l'infrastructure *didactique*, une telle dénégation est d'autant plus facile que la tradition dite pédagogique qui a créé ou fait évoluer un certain nombre de types d'organisations didactiques est regardée souvent comme le fait d'amateurs passionnés, parfois exceptionnellement talentueux, plutôt que comme le fruit de vastes mouvements d'innovation mobilisant des forces sociales de diverses natures – où les forces de production scientifique sont, il est vrai, très généralement sous-représentées. Mais c'est là, je crois, un temps dont nous sortons. Car il est hors de doute que, par exemple, la création – nécessairement lente – du type d'organisations didactiques que le sigle PER résume ne saurait être le fait de groupements de professeurs » seulement.

That's all, folks!