UMR ADEF

Yves Chevallard

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

Année 2009-2010

Ce document reproduit le journal des huit séances ayant composé le séminaire TAD/IDD de l'année 2009-2010. YC.

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

➔ Séance 1 – Vendredi 23 octobre 2009

DIFFUSION ET RÉCEPTION DE LA TAD

1. Les temps à venir

a) La période qui s'est ouverte à l'issue de la 15e école d'été de didactique des mathématiques (qui s'est tenue à Clermont-Ferrand du 16 au 23 août 2009) est dominée par la perspective du IIIe Congrès international sur la TAD, qui se tiendra à Sant Hilari Sacalm du lundi 25 janvier, 16 h, au vendredi 29, 15 h.

b) Les séances de ce séminaire feront en conséquence écho à la préparation du congrès, dont les deux premiers jours seront occupés par un « Cours de

TAD pour les chercheurs ». Cette innovation est évidemment *une* réponse au constat que les chercheurs en didactique ayant un intérêt pour la TAD sans être étroitement associés à son élaboration en ont en général une connaissance approximative, parfois même invalidante (avec des effets de contamination touchant les jeunes générations). Bien entendu, on doit voir là, en partie, une conséquence d'un état de la didactique où la polémique, plutôt que le simple débat, est trop souvent préférée à l'étude. Gaston Bachelard notait dans *La flamme d'une chandelle* : « J'étudie ! Je ne suis que le sujet du verbe étudier. Penser je n'ose. Avant de penser, il faut étudier. Seuls les philosophes pensent avant d'étudier. » La remarque est à méditer…

c) J'expliciterai d'abord dans ce qui suit quelques observations illustrant certaines des difficultés qui affectent la diffusion et la réception de la TAD. Mais, une fois n'est pas coutume, je commencerai ici même par une rencontre inattendu faite au fil de la lecture d'un court texte récemment publié, intitulé *Le principe d'Université* (Nouvelles Éditions Lignes, 2009), et signé d'un enseignant de philosophie de l'université de Paris 8, Plinio Prado. À la page 31 de ce texte (disponible en ligne http://www.editions-lignes.com/IMG/pdf/PRADO_LePrincipedUniversite_-2.pdf), on lit en effet ceci (c'est moi qui souligne) :

> L'agitation et la déstabilisation sont la condition impliquée dans l'accueil de l'événement, de ce qui arrive selon l'inattendu, quel que soit le champ d'activités (de disciplines) auquel on s'adonne : science, arts, technologie, littérature, philosophie, éthique, *didactique*, politique.

Mise en abyme inattendue de l'inattendu ! Mais revenons à la réalité courante : je le ferai d'abord à propos d'étudiants en sciences de l'éducation.

2. Auprès des « étudiants »

a) Dans le cas des enseignements que je suis amené à dispenser, la TAD n'apparaît guère que sous l'étendard de la didactique : sa réception est d'abord celle de ce *mot*. J'ai récemment demandé à un petit nombre d'étudiants de première année du master *professionnel* de sciences de l'éducation de l'université de Provence d'attribuer un « score », sur dix échelles différentes de 0 à 6, à certains mots ou expressions, dont « sciences de l'éducation », « didactique » et « Internet ». J'ai reproduit ci-après les scores obtenus par « didactique » : chaque colonne correspond à l'une des 10 échelles, chaque ligne de scores correspond à l'un des 9 étudiants sollicités. Pour chaque échelle, les deux dernières lignes indiquent respectivement le score moyen (sur 6) des 9 scores et le pourcentage correspondant du score

moyen maximal (qui est 6). Les échelles, désignées ci-après par un code de type X/Y, sont les suivantes :

S/P	Superficiel / Profond
F/C	Froid / Chaud
PU/U	Peu utile / Utile
I/A	Irritant / Apaisant
PF/F	Peu fiable / Fiable
A/C	Abstrait / Concret
I/O	Inorganisé / Organisé
L/B	Laid / Beau
P/A	Passif / Actif
F/D	Facile / Difficile

Voici donc le tableau des scores.

Didactique

S/P	**F/C**	**PU/U**	**I/A**	**PF/F**	**A/C**	**I/O**	**L/B**	**P/A**	**F/D**
3	3	5	1	3	1	3	3	3	6
0	0	0	0	2	0	1	0	2	6
6	0	3	0	3	0	3	0	3	0
5	3	6	5	5	5	6	5	6	4
6	0	6	1	6	0	6	3	6	6
6	4	6	2	4	3	5	3	6	4
6	6	6	6	3	3	3	6	6	3
5	2	5	1	5	4	5	4	5	4
5	0	5	3	5	5	5	3	4	5
4,7	2,0	4,7	2,1	4,0	2,3	4,1	3,0	4,6	4,2
78 %	**33 %**	**78 %**	**35 %**	**67 %**	**39 %**	**69 %**	**50 %**	**76 %**	**70 %**

« Didactique », ainsi, serait (pour ce groupe, globalement) *froid*, *irritant*, *abstrait*… Les scores moyens attribués par les 9 personnes sollicitées sont respectivement (de haut en bas du tableau) les suivants :

3,1 ; 1,1 ; 1,8 ; 5 ; 4 ; 4,3 ; 4,8 ; 4 ; 4.

Les six derniers scores moyens semblent de bon augure ; mais les trois premiers, et surtout les deuxième et troisième, ne laissent pas de surprendre. Le score moyen le plus faible, 1,1, correspond à la suite de scores que voici :

S/P	F/C	PU/U	I/A	PF/F	A/C	I/O	L/B	P/A	F/D
0	0	0	0	2	0	1	0	2	6

Pour cette répondante, dont nous pouvons savoir par ailleurs qu'elle n'a jamais rencontré de didactique, « didactique » serait totalement *superficiel*,

froid, *inutile*, *abstrait* et *laid*. Il est en outre très *inorganisé*, et aussi peu *actif* que peu *fiable*. Seul trait « positif » : « didactique » est très *difficile*. Notons que tel n'est pas l'avis de la troisième répondante, dont la moyenne des scores (1,8/6) n'est pas beaucoup plus élevée, mais pour qui « didactique » est on ne peut plus *facile* (quoique… très *profond*) :

S/P	F/C	PU/U	I/A	PF/F	A/C	I/O	L/B	P/A	F/D
6	0	3	0	3	0	3	0	3	0

b) On peut comparer les scores de « didactique » à ceux de deux autres mots soumis au même groupe d'étudiants : « sciences de l'éducation » et « Internet ». Sans entrer dans le détail, voici les scores moyens en pourcentage du score maximal pour ces trois mots :

S/P	F/C	PU/U	I/A	PF/F	A/C	I/O	L/B	P/A	F/D
78	33	78	35	67	39	69	50	76	70
74	57	94	59	80	57	80	65	67	70
63	57	94	59	70	70	83	59	94	37

On voit que, si « didactique » (1re ligne) est un peu plus profond que « sciences de l'éducation » (2e ligne) et l'est nettement plus que « Internet » (3e ligne), il est nettement plus froid qu'eux, sensiblement moins utile, franchement plus irritant, beaucoup plus abstrait, moins organisé et d'une beauté inférieure. Il n'est comparable à « sciences de l'éducation » que pour la difficulté (qui n'est pas petite), les deux ensemble étant trouvés à cet égard inférieurs à « Internet » (qui est presque moitié moins difficile qu'eux). On notera enfin que « didactique » est le moins fiable des trois, même si « Internet » le dépasse à peine sur ce point.

c) Si l'on se fie à ce tableau, on songera avec une once de compassion aux contraintes sous lesquelles l'enseignant devra opérer. Par delà les variations individuelles, qui ne peuvent guère être ignorées (que faire avec la participante de la 2e ligne, par exemple ?), il lui faudra travailler avec un groupe qui, globalement, regarde le mot de didactique comme *froid*, *irritant*, *abstrait* et relativement *difficile*.

3. Résistances « savantes »

a) Le thème des résistances « savantes » a déjà été évoqué. La résistance peut prendre la forme d'une feinte indifférence, appuyée sur une véritable ignorance. Mais elle prend beaucoup plus souvent soit des formes polémiques, soit, plus sourdement, la forme d'une discrète censure. En vérité, il semble que la résistance la plus solide s'arc-boute d'un même mouvement d'abord aux « mots » propres à la TAD, ensuite, et plus fortement

encore, aux « formalismes » qu'on y utilise. C'est ainsi que l'on devinera aisément (je les indique par une ondulation) ce que les éditeurs d'un livre à paraître, ayant légitimement à suggérer des coupes dans un texte récent, ont pu envisager de voir disparaître de préférence dans le passage suivant :

> La structure praxéologique la plus simple se compose d'un *type de tâches T*, d'une *technique* τ, manière réglée d'accomplir les tâches *t* du type *T*, d'une *technologie* θ, discours raisonné (*logos*) sur la technique (*tekhnê*) censé rendre τ intelligible comme moyen d'accomplir les tâches du type *T*, enfin d'une composante *théorique* Θ, qui gouverne la technologie θ elle-même, et donc l'ensemble des composantes de la praxéologie. Une telle praxéologie se note alors [*T*/τ/θ/Θ] : elle comporte une partie pratico-technique ou *praxis* (qu'on peut nommer « savoir-faire »), Π = [*T*/τ], et une partie technologico-théorique ou *logos* (qu'on peut identifier à un « savoir » au sens usuel du terme), Λ = [θ/Θ].

b) Ici, le quadruplet [*T*/τ/θ/Θ] résiste assez bien, même si d'aucuns l'ont cependant très vite rebaptisé « les quatre *T* » (sans doute pour ne pas utiliser – *horresco referens* – ces lettres grecques : τ, θ, Θ). Mais voici maintenant la suite du passage précédent (à gauche) et sa réécriture (à droite) par la même plume :

Un aspect crucial du concept de praxéologie est qu'il n'existe pas de *praxis* sans *logos*, même quand celui-ci paraît absent, parce que non visible. Si l'on note Π⊕Λ une praxéologie [*T*/τ/θ/Θ] existant en une institution *I*, sa *transposée* en une autre institution *I**, qu'on peut écrire (Π⊕Λ)*, pourra en certains cas s'écrire Π⊕(Λ*), avec une *praxis* identique mais un *logos* changé. La praxéologie transposée pourra parfois s'écrire (Π*)⊕Λ, avec, donc, un *logos* maintenu, mais une *praxis* modifiée, qui, parfois, sera même vidée de sa substance (on aura Π* ≈ ∅). Ces altérations et recombinaisons praxéologiques sont au cœur de l'histoire sociale des praxéologies et au cœur du problème que nous voudrions soulever dans ce qui suit.	Un aspect crucial du concept de praxéologie est qu'il n'existe pas de *praxis* sans *logos*, même quand celui-ci paraît absent, parce que non visible. Une praxéologie existant en une institution, peut être *transposée* en une autre institution avec une *praxis* identique, mais un *logos* changé, ou, à l'inverse, avec un *logos* maintenu, mais une *praxis* modifiée, qui, parfois, sera même vidée de sa substance. Ces altérations et recombinaisons praxéologiques sont au cœur de l'histoire sociale des praxéologies et au cœur du problème que nous voudrions soulever dans ce qui suit.

Les disparitions qu'on peut constater ici ne sont pas contingentes ; elles sont même, me semble-t-il, un symptôme d'une difficulté essentielle (qui transcende le petit monde – auteurs et éditeurs compris – où tout cela se passe) : une science ne gagne rien *à renoncer à ses moyens ostensifs* (et, donc, à ses moyens non ostensifs) pour faire mine de « parler comme tout le monde » et ainsi ne pas montrer sa différence spécifique par delà son genre prochain. Dans un processus de transposition, il y a une première institution, une institution « de départ », et il y a une seconde institution, une institution « d'arrivée ». Pourquoi accepter ces métaphores cinématiques (départ, arrivée) et refuser des dénominations structurelles – I pour la première, I^* pour la seconde – sinon pour ne pas déplaire à la culture courante, qui, elle, ne s'est pourtant jamais donnée pour tâche de penser les processus transpositifs ?

c) Une vieille technique pour tenter de faire barrage au développement d'un champ scientifique, une technique à laquelle la didactique a payé un certain tribut déjà, consiste à réprouver le fait qu'on y emploie des mots « déjà pris », dont d'autres se disent propriétaires par droit du premier occupant – pour parler comme certaine dame au nez pointu. Cette volonté de censure, nous devons éviter de lui donner raison par nos propres tentations d'autocensure : nous devons parler droitement de *type* de tâches (dans un monde qui parle généralement de *la* tâche), de *technologie* (dans un monde qui, par ignorance de la TAD, croit avoir de ce mot un emploi incompatible avec celui qu'en fait la TAD), nous devons parler de praxéologies (au pluriel), et non de *la* praxéologie, tout court (selon une confusion qui est le fruit d'une inculture historique vraie et, chez quelques-uns, d'une volonté malsaine de troubler) ; nous devons écrire sans façon « le rapport institutionnel $R_I(p\,;\,O)$ », « le système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$, « la réponse $R^{\heartsuit}$ », et bien entendu, *primus inter pares*, « le schéma herbartien semi-développé $[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$ », etc. Comme en toute langue, le plein usage des moyens ostensifs disponibles peut donner lieu, certes, à des assertions délicates à décoder ; mais cela n'est pas une raison autre que mondaine de renoncer à ce que cette langue permet de *penser*. Il y a là un critère de vitalité que je crois indépassable.

d) La question de la *réception* est au cœur du mémoire de 1re année de master de sciences de l'éducation de Julia Marietti, que vous trouverez en ligne sur mon site personnel : *Le concept de PER et sa réception actuelle en mathématiques et ailleurs. Une étude préparatoire*. Comme le thème des PER est au cœur de notre travail cette année, j'aurai l'occasion d'y revenir ici même.

À PROPOS DES PER

1. Quelle définition d'un PER ?

a) Comme vous le savez, l'école d'été récente a été l'occasion de travailler le concept de PER, et cela à propos de la question – qui sous-tendait l'ensemble de cette école d'été – de l'*ingénierie didactique*. J'y ai donné un cours intitulé (un peu longuement) *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD*. En outre, trois ateliers ont été proposés sous le titre commun *Vers une ingénierie didactique des PER*, respectivement par Michèle Artaud et Gisèle Cirade, par Marianna Bosch ainsi que par Floriane Wozniak et moi-même.

b) Le travail suscité par ces interventions a produit des avancées sur quelques points. Je voudrais en mentionner certaines, en revenant sur la notion de PER. Formellement, le premier trait à quoi se reconnaît un PER est ce qu'on est censé y faire : l'enjeu didactique y est, en effet, une certaine *question Q* : le système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,\heartsuit)$, où ♥ est l'enjeu didactique, c'est-à-dire la « chose » qu'on étudie, s'écrit alors $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$. Une question, je le souligne, est une *œuvre* : c'est une création de l'activité humaine. Mais c'est une œuvre d'un certain type : ce n'est pas une *réponse* ou, de façon directe, un *outil* pour produire des réponses, même quand cela jalonne le chemin vers la réponse cherchée. Cela noté, je soulignerai que, lorsque, quel que soit le contexte institutionnel et didactique, se forme un système du type $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$, la vie de ce système peut ne pas excéder quelques instants et, pourtant, s'achever de façon adéquate au *projet* dont la considération a amené à se poser la question *Q*. (Il y a là un point essentiel sur lequel il conviendra de revenir : d'où viennent les questions *Q* étudiées ?) Il n'y a alors aucune raison de refuser au cheminement du système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$ le nom de « parcours d'étude et de recherche », même si le mot de parcours a été introduit à l'origine pour désigner un temps *long* par contraste avec le temps *court* des activités scolaires usuelles (en mathématiques, au moins). Il faut donc ne retenir qu'une définition très ouverte, délibérément très *faible*, de la notion de PER : il y a PER dès lors qu'un système didactique étudie une certaine question *Q*. Dans cette perspective, il faut alors pouvoir *qualifier* ce PER.

c) Je ferai trois remarques à propos de ce qui précède. La première sera venue spontanément à l'esprit à suivre les considérations faites ici : dans une classe scolaire, se dira-t-on peut-être, il y aurait donc, de façon erratique souvent, mais profuse parfois, des PER, des micro-PER peut-être, voire des nano-PER, mais des PER ! C'est bien cela qu'il faut concéder, en effet. Et c'est alors cette réalité qu'il nous faudra apprendre à qualifier.

J'ajoute que cette remarque débouche naturellement sur une petite enquête qu'il reste à mener à bien : inventorier (et analyser) les (micro-)PER existant dans le cadre de classes ordinaires. Pour les mathématiques, cela pourrait se faire à partir d'un corpus de comptes rendus de visites de professeurs stagiaires.

d) La deuxième remarque a pour objet de souligner que la non-distinction que je préconise est en fait imposée par la vie même d'une classe [*X*, *Y*] : le PER en quoi se concrétisera le fonctionnement de *S*(*X* ; *Y* ; *Q*) sera très différent selon que *Q* relève d'un *type* de questions encore *problématique* pour [*X*, *Y*] ou, au contraire, d'un type de questions devenu depuis un certain temps *routinier*. La troisième remarque renforce encore, de façon décisive, la conclusion à laquelle nous sommes arrivés : elle concerne l'évolution des contraintes liées aux *infrastructures*, phénomène que j'illustrerai ici d'un exemple. Supposons que la question posée à [*X*, *Y*] soit celle-ci : quelles sont les cent décimales du nombre π qui occupent les rangs 501 à 600 ? (Ici, le *projet* qui suscite la question pourrait être celui de voir si ces décimales se distribuent à peu près au hasard.) Ainsi qu'on vient de le souligner, le « travail » de *S*(*X* ; *Y* ; *Q*) sera différent selon que [*X*, *Y*] a élaboré ou non une technique bien maîtrisée pour déterminer les décimales de π allant du *n*-ième rang au (*n* + *p*)-ième rang. Mais si une telle technique n'est pas encore disponible dans [*X*, *Y*], sa *création* représentera un travail différent *en quantité et en nature* selon que *S*(*X* ; *Y* ; *Q*) opère vers 1960 ou aujourd'hui, et cela parce que les *infrastructures* auront entre temps changé. C'est ainsi que, aujourd'hui, la page Web http://www.brouty.fr/Maths/pi.html permet à quiconque d'accéder à un tableau de décimales dont voici le début :

```
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872
1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
```

Les décimales sont ici rangées par groupes de 10, eux-mêmes réunis en groupes de cinq : on a donc 50 décimales par ligne, et les décimales cherchées occupent en conséquence les lignes 11 et 12 :

9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132

On notera en passant que les effectifs des nombres de 0 à 9 dans ces deux lignes sont respectivement 9, 8, 10, 13, 11, 5, 14, 14, 6, 10, ce qui n'est pas exactement uniforme. Bien entendu, on n'aura fait parler ici qu'un unique média, et l'enquête n'est donc pas close ; mais je passe.

2. La question des questions

a) Lorsqu'on observe la formation d'un système didactique $S(X ; Y ; Q)$, on peut d'abord s'interroger sur la question Q en la situant sur un segment orienté dont l'origine (0) et l'extrémité (1) sont définies respectivement par les critères suivants : la question Q est là seulement parce que l'effort pour lui apporter réponse paraît devoir provoquer telle ou telle rencontre praxéologique prisée pour elle-même ; la question Q est là seulement parce qu'on attribue un certain *prix* au fait de lui apporter réponse. On sait qu'on parlera alors, dans le premier cas de PER praxéologiquement *finalisé*, dans le second de PER praxéologiquement *ouvert* (non finalisé). Ce qu'on peut penser, c'est que, plus la question Q est vécue comme un alibi (i.e. plus elle est proche de l'origine 0), et plus son existence est, à terme, menacée : la question Q étant moins prisée pour elle-même que pour ce que son étude ferait rencontrer, il apparaîtra vite plus économique d'organiser la rencontre praxéologique visée sans s'imposer le détour par l'étude de Q ni de quelque autre question.

b) Le fait lui-même que l'étude d'une question Q soit prisée pour elle-même doit cependant être interrogé. Ce peut être, bien sûr, parce que, tant qu'on ne sait pas lui apporter réponse, cette question *bloque* la réalisation d'un certain projet qui nous importe. Mais ce peut être aussi parce qu'il s'agit d'une question emblématique d'un certain domaine de connaissance *prisé pour lui-même* (plutôt que pour ce qu'il pourrait apporter à l'étude de telle ou telle question posée indépendamment de lui). Je prendrai pour exemple ici celui d'un opuscule paru dans la collection « Les carnets du lycée » et intitulé *Enseignement scientifique. Les repères essentiels* et destinés aux élèves de 1re L et de 1re ES concernés (Rue des écoles, 2006). La partie consacrée aux « sciences de la vie » y est découpée en sept chapitres dont le deuxième s'intitule « La communication nerveuse (série ES) ». Ce deuxième chapitre lui-même – c'est cela que je voudrais souligner – est découpé en six « questions » dont voici le libellé :

1. Comment le message de la douleur est-il transmis jusqu'au cerveau ?
2. Quelle est la nature des messages nerveux ?

3. Comment les messages nerveux se transmettent-ils au niveau des synapses ?

4. Comment certaines substances peuvent-elles modifier la transmission des messages nerveux ?

5. Comment la morphine peut-elle être à l'origine d'une sensation de plaisir ?

6. Pourquoi les substances comme la morphine ou l'héroïne engendrent-elles tolérance et dépendance ?

Considérons à titre d'exemple la question 3 ; le livret consulté fait suivre la question du texte ci-après, qu'on doit regarder comme la réponse proposée :

> **3. Comment les messages nerveux se transmettent-ils au niveau des synapses ?**
> Le message nerveux se propage le long des fibres nerveuses et se transmet d'un neurone à l'autre au niveau d'une **synapse**. Cette communication ne peut se faire que dans un seul sens. Lorsque le message nerveux arrive à l'extrémité de l'axone pré-synaptique, il déclenche la libération de substances chimiques : les **neurotransmetteurs**. Ces molécules se fixent alors sur des récepteurs spécifiques situés sur la membrane du neurone post-synaptique, ce qui peut, selon la nature du neurotransmetteur, faire naître un nouveau message électrique.

On voit ainsi que « connaître une œuvre » – en l'espèce, « les sciences de la vie » – s'identifie ici à la capacité de *restituer les réponses* que cette œuvre apporte (ou est censée apporter) à certaines questions. Nous sommes à un carrefour : on ne s'intéresse pas à une œuvre parce qu'elle permet d'apporter réponse à certaines questions que l'on prise ; on s'arrête (brièvement) sur quelques questions, souvent en elles-mêmes peu motivées, auxquelles l'œuvre est réputée apporter réponse *simplement parce que l'on prise l'œuvre* dont elles paraissent emblématiques. Bien entendu, le fait d'interroger une œuvre sur la réponse qu'elle apporterait à une question qui nous importe n'en demeure pas moins un geste fondamental et irremplaçable de la diffusion sociale des connaissances. Mais on voit qu'ici cette interrogation n'est pas le fait de l'élève ou de l'étudiant : la « réponse » leur est en effet donnée *toute faite*. Dans le schéma herbartien réduit,

$$S(X\,;\,Y\,;\,Q) \hookrightarrow R^{\blacktriangledown},$$

X passe sans étude ni recherche de Q à $R^{\blacktriangledown} = R^{\Diamond}_{Y}$; et ce que représente la flèche ↪ se réduit donc à « prendre le cours » (et à l'apprendre).

e) Il est un cas encore qui mérite d'être cité. Lorsque, par contraste avec le cas précédent, X aura à enquêter sur des questions relevant de divers

domaines de réalité, il gagnera à améliorer sa maîtrise des praxéologies de l'enquête en ces domaines, notamment dans ce qu'elles ont de générique. L'étude d'une question *Q* peut alors avoir un objectif de *formation à l'enquête* (codisciplinaire et, en tout cas, multi-instrumentée). C'est de ce cas que relève l'*Atelier « Enquêtes sur Internet »* animé par quelques-uns d'entre nous au collège Vieux Port de Marseille : il s'agit de faire que les élèves y apprennent à enquêter sur une question *Q* en usant des ressources disponibles sur Internet. La situation de ces questions *Q* sur le segment orienté invoqué plus haut est alors *intermédiaire* entre 0 et 1, et plus près de 1 que de 0, le critère principal de leur choix étant, sauf exception, le prix qu'on attache à la question, alors que les rencontres qui seront suscitées par l'enquête demeurent un critère secondaire de choix. C'est ainsi que la question récemment qui sera bientôt mise à l'étude dans l'atelier susnommé procède d'une volonté d'expliciter les liens présupposés entre deux ordres de phénomènes « écologiques » : *Pourquoi le réchauffement climatique ferait-il monter le niveau des mers ?* Cette question vaut pour elle-même, indépendamment de toute « matière scolaire ». Ce qu'elle ne manquera pas de faire rencontrer, si précieux soit-il, sera en quelque sorte « donné par surcroît ».

3. Propriétés des PER

a) On a vu déjà deux grands types de questions à soulever à propos d'un PER observé ou projeté. Tout d'abord, y a-t-il bien une question *Q* à étudier, et *pourquoi* cette question est-elle ainsi proposée à l'étude ? Ensuite, la réponse $R^{\heartsuit}$ est-elle l'aboutissement d'un travail substantiel de la part de *X* ou est-elle un apport allogène minimisant ce travail ? Mais je voudrais maintenant élargir ce questionnement aux trois grandes dimensions solidaires d'un processus d'étude et de recherche en un système didactique *S*(*X* ; *Y* ; ♥) : la *chronogenèse*, la *topogenèse*, la *mésogenèse*.

b) La chronogenèse, c'est la genèse du temps de l'étude mesuré par la « matière » étudiée. Dans le paradigme dominant de l'étude scolaire, dans ce que j'ai proposé d'appeler le paradigme *de la visite des savoirs*, dont on connaît les dérives monumentalistes (voire fétichistes), l'introduction de questions à étudier ne fait pas en elle-même avancer le temps didactique : celle-ci, on le sait, se mesure à l'aune des savoirs visités. C'est pourquoi j'ai formulé l'hypothèse que l'émergence d'un *enseignement par PER* ne pouvait s'accomplir que solidairement avec un changement de *paradigme de l'étude scolaire* et, plus précisément, avec l'avènement de ce que je propose de nommer le paradigme *de questionnement du monde* : ce que fait une classe [*X*, *Y*], ce sur quoi *Y* doit rendre des comptes à l'institution mandante, ce ne serait plus alors les *savoirs visités* mais les *questions étudiées*. Un tel

changement peut paraître bien radical et, par suite, bien peu probable dans un avenir proche. Mais ce changement ne l'est peut-être pas autant qu'on pourrait le croire, du moins du côté de *X*. À ce propos, je citerai ici un bref échange avec un élève d'une classe de 4e à qui Christophe Bergèse et moi venions de présenter l'Atelier « Enquêtes sur Internet », en indiquant nettement qu'on y étudiait « des questions ». Cet élève me demande alors : « L'an dernier, vous en avez étudié combien de questions ? » Ma réponse – « En tout, quatre dans l'année » – paraît le décevoir, ou du moins le surprendre. Mais ce qui importe ici, c'est la facilité avec laquelle cet élève s'est placé mentalement dans le paradigme de questionnement du monde, en adoptant d'emblée et sans effort apparent une comptabilité sans doute parfaitement inédite pour lui : « Combien de questions ? »

c) Du côté de *Y*, toutefois, les choses seront sans doute plus lentes à changer. Traditionnellement, en effet, le métier de professeur est imprégnée par ce que je nommerai une *pédagogie d'enseignant*, c'est-à-dire une pédagogie dont le but est de *« montrer »* la matière au programme : le professeur est depuis des siècles un « montreur de savoir ». Une petite digression linguistique est de mise à ce propos. On sait que, en espagnol, *enseñar* signifie à la fois *montrer* et *enseigner*. En français, hier encore, « enseigner » signifiait d'abord « montrer », « indiquer » (le dictionnaire d'Émile Littré donne ainsi cet exemple : « Enseigner le chemin le plus court à un voyageur égaré »). Semblablement, en anglais, *to teach* renvoie à l'origine à la même idée, comme l'indique le *Dictionary of Word Origins* de John Ayto (1994) :

> **teach** [OE] To *teach* someone is etymologically to 'show' them something. The word goes back ultimately to the prehistoric Indo-European base **deik-* 'show,' which also produced Greek *deiknúnai* 'show' (source of English *paradigm* [15]) and Latin *dīcere* 'say' (source of English *diction*, *dictionary*, etc). Its Germanic descendant was **taik-*, which produced English *token* and German *zeigen* 'show.' From it was derived the verb **taikjan*, ancestor of English *teach.* ► *diction, dictionary, paradigm, token*

Le *Onelook dictionary* (en ligne), quant à lui, précise ceci :

> O.E. *tæcan* (past tense and pp. *tæhte*) "to show, point out," also "to give instruction," from P.Gmc. **taikijanan* (cf. O.H.G. *zihan*, Ger. *zeihen* "to accuse," Goth. *ga-teihan* "to announce"), from PIE **deik-* "to show, point out" (see ***diction***). Related to O.E. *tacen, tacn* "sign, mark" (see ***token***). O.E. *tæcan* had more usually a sense of "show, declare, warn, persuade" (cf. Ger. *zeigen* "to show," from the same root); while the O.E. word for "to teach, instruct, guide" was more commonly *læran*, source of modern ***learn*** and ***lore***. *Teacher*

> "one who teaches" emerged c.1300; it was used earlier in a sense of "index finger" (c.1290).

Comme on le voit, plusieurs notions voisines se mêlent : enseigner, ainsi, c'est aussi *guider*. Certes. Mais enseigner c'est d'abord montrer, et même montrer du doigt. Comme le précise le *Dictionnaire historique de la langue française* (1993), « *enseigner* a d'abord, comme le latin *insignire*, correspondu à "faire connaître par un signe" (1050), valeur qui ne survit que régionalement, remplacée par *renseigner* ». Le métier reste pourtant sous-tendu par cette notion primordiale, refoulée des consciences linguistiques d'aujourd'hui, mais qui longtemps affleura dans la langue ordinaire, comme le suggère cet extrait de l'article « Maîtres écrivains » du *Dictionnaire de pédagogie* de Ferdinand Buisson (1911) :

> Le privilège accordé aux maîtres-écrivains d'enseigner seuls l'écriture et le calcul ne pouvait manquer de susciter des réclamations de la part des maîtres d'école. En effet, ceux-ci se voyaient contester un droit dont ils avaient joui jusque-là moyennant l'autorisation du grand-chantre, pour les écoles épiscopales, ou celle des curés, pour les écoles de charité des paroisses. À Paris, la question fut portée, presque aussitôt après la fondation de la corporation, devant les autorités judiciaires. Le Châtelet rendit, le 25 juin 1598, une sentence favorable aux maîtres écrivains, par laquelle il était ordonné que les maîtres d'école « ne pourraient bailler à leurs écoliers aucuns exemples que de monosyllabes ». Mais les maîtres d'école firent appel de ce jugement ; le 22 avril 1600 le Parlement de Paris leur donna raison, en décidant que, « suivant les arrêts des 15 janvier 1580 et 5 septembre 1584, les maîtres d'école de la ville et faubourgs de Paris pourront enseigner leurs écoliers à former les lettres et écrire, et outre leur bailler exemples en lignes, sans pouvoir tenir école d'écriture ni montrer l'art d'icelle séparément ». Le droit des maîtres d'école à « bailler exemples en lignes » ayant été reconnu, on se querella ensuite pendant un demi-siècle à propos du nombre de lignes dont les exemples d'écriture pourraient être formés. Un arrêt du 2 juillet 1661 régla ce point important, et défendit aux maîtres d'école « de mettre plus de trois lignes dans les exemples qu'ils donneront à leurs écoliers » ; mais ce même arrêt leur reconnut le droit exclusif de montrer à lire, et défendit aux maîtres-écrivains d'empiéter sur ce terrain réservé, en concédant toutefois à ceux-ci le droit d'enseigner l'orthographe : les maîtres-écrivains, dit le Parlement, « pourront avoir des écrits ou des livres imprimés pour montrer l'orthographe, sans que pour ce ils puissent aucunement montrer à lire ».

d) Ce qui devrait se créer et diffuser, donc, c'est une *pédagogie de l'enquête* adéquate au paradigme de questionnement du monde. Une telle pédagogie doit évidemment permettre – et même favoriser – des évolutions décisives en

matière de chronogenèse, de topogenèse, de mésogenèse. Avant de décrire plus précisément ces évolutions, je rappelle une fois encore le schéma herbartien dans sa forme *semi-développée*, à savoir

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^{\heartsuit},$$

puis dans sa forme *développée* :

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrow \{\, R_1^{\diamondsuit},\, R_2^{\diamondsuit},\, \ldots,\, R_n^{\diamondsuit},\, O_{n+1},\, \ldots,\, O_m \,\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}.$$

Cela fait, je reprendrai ici simplement un passage un peu long de mon cours à l'école d'été de Clermont-Ferrand, où je me réfère à une classe [*X*, *y*], c'est-à-dire où $Y = \{\, y \,\}$:

> J'aborderai ici ces propriétés de façon volontairement formelle, en commençant par la mésogenèse, « fabrication » du milieu *M*. Première condition à satisfaire : *M* n'est pas « tout fait » ; il est constitué par la classe à partir de productions diverses, *externes* à la classe comme *internes* à celles-ci. Ces dernières incluent notamment les réponses R_x éventuellement proposées par des élèves *x* à partir de leur activité propre, la réponse R_x étant regardée, en référence au schéma herbartien, comme « estampillée » *ipso facto* par son proposant, *x* lui-même, de la même façon que $R^{\heartsuit}$ sera estampillée par la classe [*X*, *y*]. Notons à cet égard que le milieu
>
> $$M = \{\, R_1^{\diamondsuit},\, R_2^{\diamondsuit},\, \ldots,\, R_n^{\diamondsuit},\, O_{n+1},\, \ldots,\, O_m \,\}$$
>
> doit permettre au moins (a) de soumettre chacune des réponses $R_i^{\diamondsuit}$ qui le composent ainsi que la réponse $R^{\heartsuit}$ en cours d'élaboration à l'épreuve d'une dialectique des médias et des milieux adéquate, et (b) d'offrir des matériaux idoines pour construire une réponse $R^{\heartsuit}$ validée et satisfaisant les contraintes imposées.
>
> Par rapport aux usages scolaires traditionnels, un fait doit être clairement souligné : plusieurs types d'œuvres qui peuvent, *en principe*, venir constituer le milieu *M* d'un PER sont exclues *par principe* de l'enseignement traditionnel, même s'il arrive qu'elles y soient présentes clandestinement (comme il en va des corrigés d'exercices tout faits utilisés discrètement par les élèves). À cet égard, on verra plus loin que le « travail » sur le milieu change en même temps que change ainsi la *nature* du milieu. La condition mésogénétique rappelée va de pair avec une condition relative à la *topogenèse* : la constitution du milieu *M* est le fait *de la classe* [*X*, *y*], non de *y* seul. Le *topos* des élèves doit recevoir à cet égard une extension importante : non seulement un élève pourra apporter *sa* réponse personnelle R_x (comme il en va classiquement quand il produit *sa* solution de tel problème donné à chercher par *y*), mais encore il pourra proposer d'introduire dans *M* toute œuvre qu'il souhaitera, par le

truchement d'une documentation qu'il apportera ou suggèrera. À ce changement dans le *topos* des élèves correspond un changement important dans le *topos* de celui qu'on nommera ici le *directeur d'étude* – il dirige l'étude de Q – ou le *directeur d'enquête* – il dirige l'enquête sur Q. C'est ainsi y (ou Y, plus généralement) qui décidera *en dernier ressort*, non sans en expliciter les attendus, si la classe verra ou non son milieu d'étude être augmenté de telle ou telle œuvre, documentée de telle ou telle façon (et cela y compris s'agissant de réponses de la forme R_x). De la même façon, y pourra verser au milieu M telle pièce documentant une certaine réponse $R^{\diamondsuit}$ qui ne sera pas nécessairement « sa » réponse personnelle (s'il en a une). Dans tous les cas, la réponse notée plus haut R_y ne sera pas traitée autrement que les autres réponses $R_i^{\diamondsuit}$: ainsi sera-t-elle soumise à la dialectique des médias et des milieux, nul média n'ayant ici le privilège d'être « cru sur parole ».

La *chronogenèse* est ce par quoi un PER se distingue en principe de la façon la plus facilement repérable des épisodes didactiques usuels à l'école (si l'on excepte IDD et TPE notamment) : la constitution et le « travail » du milieu M sont en effet à l'origine d'une *dilatation du temps didactique* et donc, corrélativement, d'une *extension du temps d'horloge* requis. C'est ainsi que le travail de M en vue de produire $R^{\heartsuit}$ comportera *notamment* une étude finalisée *plus ou moins poussée* (elle peut être très sommaire en certains cas) des œuvres O_j, exigence fonctionnelle qui conduit le système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$ à se transformer momentanément en un système didactique de type « classique », $S(X\,;\,Y\,;\,O_j)$. Cette étude de l'œuvre O_j – qui est, je le répète, finalisée par l'élaboration de $R^{\heartsuit}$: comment se servir de O_j pour déconstruire $R_i^{\diamondsuit}$, ou pour tirer profit de telle autre œuvre O_k, ou pour « fabriquer » $R^{\heartsuit}$? – peut supposer *pour cela même* une étude plus large de O_j – quelles en sont les raisons d'être et comment « fonctionne »-t-elle, etc. ? En tout cela, la direction de l'étude confiée à y suppose que y ne se laisse pas déborder par l'habitus professoral consistant à « pousser l'étude » de façon artificielle pour y inclure des outils non appelés par l'enquête en cours mais ayant par exemple la vertu d'être usuellement associés, dans l'organisation disciplinaire dominante, aux outils dont l'emploi semble effectivement requis.

e) Les analyses et descriptions qui précèdent fournissent ainsi un ensemble de questions permettant de qualifier plus adéquatement un PER observé ou scénarisé ; nous y reviendrons.

4. Étudier une œuvre ?

a) Dans un PER relatif à une question Q, dans une enquête sur une question Q, on rencontre des réponses $R^{\diamondsuit}$ et des œuvres O. Le *but* de l'enquête est un but de recherche : *produire* une réponse $R^{\heartsuit}$ à Q. L'étude d'une réponse $R^{\diamondsuit}$ ou, plus généralement, d'une œuvre O, est un *moyen* au service de cette fin.

L'emprise du paradigme de la visite des savoirs et de la pédagogie d'enseignant tend en règle générale à faire prendre les moyens pour des fins et à faire oublier le but véritable de l'enquête. Mais cela n'annule pas, en saine doctrine, l'obligation de s'arrêter pour étudier, de façon *finalisée*, des réponses $R^{\diamondsuit}$ et des œuvres *O*. Cette étude doit être adéquate à la fin que l'on s'est fixée – répondre à la question *Q*. Or ce critère, fondamental dans une pédagogie de l'enquête, n'est nullement familier dans la culture didactique scolaire traditionnelle. Je ne ferai ici, touchant la question de l'étude d'une œuvre dans le cadre d'un PER, que quelques remarques très simples.

b) Je m'arrête un instant d'abord sur le cas d'une œuvre de laquelle on espère excrire une réponse à une certaine question, c'est-à-dire sur le problème de la lecture *questionnante* d'une œuvre : que dit cette œuvre à propos de telle question ? Je reviens ici sur un type de situations dont j'ai déjà parlé lors de la séance 8 du séminaire TAD/IDD 2008-2009 : l'examen sanctionnant l'UE de licence de sciences de l'éducation intitulée « Théorie de l'apprentissage et didactique pluridisciplinaire », comporte deux questions extraites d'une liste de questions rendue publique bien avant l'examen. Lors de la deuxième session de cet examen, la question suivante était proposée.

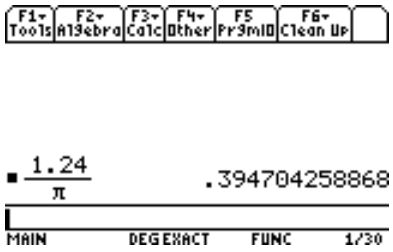
> **Partie 1.** En n'utilisant que les éléments disponibles dans le cours de didactique fondamentale (y compris le « Forum des questions »), rédigez une réponse à chacune des deux questions suivantes :
>
> 1. Quand on parle d'*évitement de la division*, à quoi fait-on référence plus précisément dans les pratiques arithmétiques populaires d'autrefois ? Quel exemple de cet évitement peut-on donner à propos du « cubage des grumes » ?
>
> 2. …

c) Il s'agissait donc d'extraire du texte du « cours de didactique fondamentale » que j'ai enseigné (et dont les candidats auraient dû avoir avec eux un exemplaire, tous les documents étant autorisés) la réponse inscrite en ce texte. La recherche des matériaux pour ce faire était guidée par une table de concordance également disponible bien à l'avance (on se reportera là-dessus aux explications données dans le journal de la séance 8 du séminaire 2008-2009). Les considérations sur l'évitement de la division avaient été suscitées, dans le cours mentionné, par la question du « cubage des bois » (ou « des grumes »), qui appartenait traditionnellement au programme de géométrie de l'école primaire et qui, dans le cours donné, permet d'illustrer plusieurs notions d'analyse praxéologique. La technique enseignée par un manuel publié en 1921 conduisait normalement à devoir effectuer une division par π : c'est cette situation qui avait motivé les remarques sur l'*évitement* de la division. Voici le passage pertinent du cours.

c) La demi-circonférence moyenne vaut donc 1,24 m. Il faut alors « diviser par π » (T_2^c) ladite « demi-circonférence » obtenue, soit calculer (ici)

$$\frac{1,24}{\pi}.$$

Aujourd'hui, la chose est immédiate, grâce aux calculatrices électroniques ; on obtient ceci.



En fait, bien longtemps encore après 1921, cette manière de faire fera défaut. Généralement, on recourt alors au calcul mental ou au calcul « posé », mais en remplaçant la division, opération toujours délicate, par une *multiplication* (T_{21}^c) ; on a en effet

$$\frac{1,24}{\pi} = 1,24 \times \frac{1}{\pi}$$

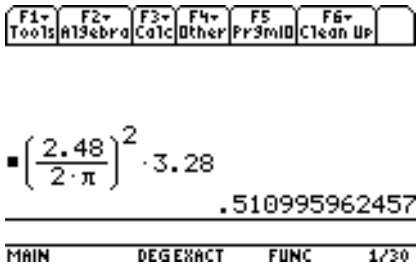
et comme $\frac{1}{\pi} \approx 0,318$ (c'est là un résultat que l'on sait « par cœur »), on effectue finalement la multiplication (T_{22}^c) indiquée par le produit $1,24 \times 0,318$, voire par $1,24 \times 0,32$, ce qui peut se faire « de tête » ainsi : « en ignorant les virgules, 124 multiplié par 32, c'est 125 multiplié par 32, moins 32 ; comme 125 est le huitième de mille, 125 multiplié par 32 est égal au huitième de 32 000, soit 4000 ; à cela on retranche 30, ce qui donne 3970, puis 2, ce qui conduit à 3968. Le produit $1,24 \times 0,32$ est donc égal 0,3968 et on a ainsi : $\frac{1,24}{\pi} = 1,24 \times \frac{1}{\pi} \approx 1,24 \times 0,318 \approx 1,24 \times 0,32 = 0,3968 \approx 0,4$. »

Ce dernier résultat est à peine surévalué : 0,4 au lieu de 0,39470 environ.

d) Il convient alors de « faire » le « carré du quotient obtenu », autre tâche de calcul (T_3^c) imposée par la technique τ^c. On doit ici calculer, simplement, le carré de 0,4 ; ce qui est immédiat : $0,4^2 = 0,16$. Il faut alors avoir mesuré la longueur du tronc d'arbre (T_4^c), ce qui requiert une technique qui peut varier selon que l'opérateur peut compter sur un coup de main d'une autre personne ou non. On imagine ici que le tronc mesure 3,28 m.

e) Dernière opération : multiplier le résultat trouvé plus haut (à savoir, ici, 0,16) par la longueur du tronc d'arbre (T_5^c) : il faut donc multiplier 0,16 par

3,28, ce qu'on peut faire *par exemple* comme suit : « 328 par 2, c'est 656 ; en multipliant 656 par 3, on obtient 1968, en sorte que 0,06 × 3,28 = 0,1968. Le produit 0,16 × 3,28 vaut donc 0,328 plus 0,1968, soit 0,5248. » Le volume du tronc d'arbre serait donc un peu supérieur à 0,5 m³. L'utilisation de la calculatrice donnerait ceci, qui n'est pas bien éloigné de ce résultat.



3.5.3. On notera, sans plus de commentaire pour le moment, ce qui peut apparaître comme une anomalie. Un tronc d'arbre de plus de trois mètres de long et dont le diamètre mesure en mètres $\frac{2,48}{\pi}$, c'est-à-dire à peu près 80 cm, aurait un volume d'un 0,5 m³ *seulement*. Est-ce vraiment là le résultat que l'on pouvait attendre ?… Nous reviendrons sur ce mystère dans la prochaine unité.

a) On s'arrêtera maintenant un instant sur un aspect qui peut surprendre le lecteur d'aujourd'hui : *l'« évitement » de la division*. Un nouvel extrait de l'ouvrage de Jacques Ozouf, *Nous les maîtres d'école* (pp. 109-110) nous éclairera en nous rappelant combien la division – comme d'ailleurs, à plus forte raison, l'« extraction de la racine carrée », qui lui est apparentée – fut longtemps une opération réputée difficile. Ce texte est extrait de l'autobiographie d'une institutrice née en 1875, qui exerçait dans les Hautes-Alpes.

> Mon grand-père, Alexis B., né en 1802 comme Victor Hugo, exilé comme lui, était, avant la loi Jules Ferry, « maître d'école ». En ce temps-là pendant les mois d'hiver, quand la neige paraissait sur les cols, il y avait dans quelques communes des Alpes et de la Drôme une foire, appelée en provençal « la fiero di mestres d'escolo » (la foire des maîtres d'école). Mon grand-père était un « Savantas », sachant faire les divisions, ayant le droit, par conséquent, de mettre deux plumes au chapeau. Il avait été choisi par les gens de Verclause (petite commune de la Drôme) pour instruire pendant les 5 mois d'hiver les enfants de ce village. Une grande remise, presque sans feu, servait de salle de classe, et chaque famille devait nourrir « lou mestro » autant de semaines qu'elle avait d'enfants à l'école. Mon grand-père ne changea jamais de quartier et devint, par la suite, maire de Verclause. Mais la fin de sa carrière d'école fut un triomphe qu'il aimait à raconter.

Après les lois instituant l'école « obligatoire et gratuite », les Inspecteurs primaires de l'époque avaient été chargés de retrouver ces vieux maîtres, et la République leur avait octroyé une « retraite » de 80 francs par an, que mon grand-père allait chaque année toucher chez le percepteur – ce dont il était très fier !

b) Cet évitement de la division s'est perpétué dans une certaine tradition mathématique populaire. L'extrait ci-après d'une page du site « Les amoureux du bois d'ameublement » intitulée « Cubage – Abattage – Débardage des bois » [1] nous le montrera : on verra en effet que l'évitement de la division se retrouve aujourd'hui encore dans ce document (dont nous avons respecté la graphie). On notera tout particulièrement l'exhortation adressée au lecteur de ne pas s'émouvoir d'une apparente complication « théorique » dont le véritable objet est en fait de *simplifier la pratique*.

III - LE CUBAGE DES BOIS

A - Principes généraux.

○ Le cubage ou toisé des bois est une évaluation du volume qui ne prétend pas à l'obtention du volume réel, mais à une approximation du rendement en bois parfait, c'est-à-dire ne tenant compte ni de l'écorce ni de l'aubier.

○ – Cela conduit à un certain nombre de règles spéciales, de conventions, dont il ne faut pas s'étonner que leur application donne des résultats assez sensiblement différente les uns des autres.

○ – Le principe générale est le suivant : on considère que le "cube grume" d'un arbre est d'un cylindre qui aurait comme base la section moyenne du tronc et pour hauteur la hauteur du fût.

○ – La section moyenne est considérée comme un cercle et on prend pour obtenir sa surface, une formule peu usitée dans les calculs classiques : $\frac{C^2}{4\pi}$ soit le carré de la circonférence, divisée par 4 fois 3,14. Avidament cette formule équivaut absolument aux deux formules Plus couramment employées qui sont :

Surface du cercle : πR^2 ou $\frac{\pi D^2}{4}$

Pourquoi cette formule $\frac{C^2}{4\pi}$ qui apparaît plus compliquée ?

♦ 1) Il est souvent facile de mesurer la circonférence d'une grume au moyen d'une ficelle par exemple.

♦ 2) La formule $\frac{C^2}{4\pi}$ peut se mettre sous la forme $\frac{1}{4\pi} * C^2$

♦ et le nombre $\frac{1}{4\pi}$ a une valeur évidemment constante, calculée une fois pour toutes.

C'est 0.079578.

♦ En nous bornant aux trois premières décimales : 0,079.

[1] Voir http://passion.bois.free.fr/le%20materiau%20bois/l%27abattage/abattage.htm.

♦ On peut donc dire qua la surface d'un cercle est égale au carré de la circonférence multiplié par 0,079
$S = 0{,}079\ C^2$

c) On notera, dans l'exemple précédent, un fait *général*, et *déterminant* : l'effort pour créer des techniques *qui s'intègrent le plus simplement possible dans la pratique de ceux à qui elles sont adressées*. Faute d'un tel effort d'adaptation, nombre de tentatives pour diffuser – par exemple à l'école – telle ou telle technique n'obtient le plus souvent que des succès éphémères : tout le monde a appris à résoudre des équations du second degré (T_1), mais qui sait encore le faire dix ans après ?

---

d) À la question proposée aux candidats, voici d'abord une très bonne réponse :

Supposons que je veuille éviter la multiplication ; ayant à déterminer le produit 6×23, j'écris ce produit sous la forme d'une somme, à savoir : 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 que je remplace par la somme 46 + 46 +46, etc. J'ai ainsi évité d'avoir à effectué une multiplication. Si maintenant je dois déterminer $\frac{127}{20}$ et si je sais (parce qu'on me l'a appris) que diviser par 20, c'est multiplier par 0,05, je peux remplacer le quotient proposé par le produit $127 \times 0{,}05$. J'ai ainsi évité la division (de 127 par 20). Si je dois tracer dans un parc un cercle d'environ 30 mètres de long, comme la longueur d'un cercle est donnée par $\ell = 2\pi R$, le rayon du cercle à tracer est donné par $R = \frac{\ell}{2\pi} = \frac{30}{2\pi} = \frac{15}{\pi}$. Je dois donc calculer $\frac{15}{\pi}$. Pour éviter la division (de 15 par π), je remplace ce quotient par un produit, à savoir $15 \times \frac{1}{\pi}$. Je dois en ce point savoir que $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}32$ (de même que je sais que $\pi \approx 3{,}14$) : il me reste donc à calculer le produit $15 \times 0{,}32$. J'aurai ainsi évité d'avoir à effectuer une division (par π). C'est exactement ce qui se passe pour le cubage des grumes, où l'on doit calculer $V = \frac{C^2 \times L}{4\pi}$: pour éviter la division (par 4π), on peut écrire ce quotient sous la forme d'un produit $V = \frac{1}{4\pi} \times C^2 \times L$, en ayant en tête le fait $\frac{1}{4\pi} = 0{,}08$.

La rédactrice de cette réponse a manifestement une maîtrise du style mathématique courant ; en outre, elle s'implique dans le problème présenté, ce qui lui épargne la tentation du commentaire induite par les positions d'extériorité souvent adoptées par les candidats. Par contraste, dans la réponse suivante, on assiste à un naufrage : faute d'avoir identifié la nature

du phénomène à décrire – l'évitement de la division –, l'auteur divague, accumulant confusions et incompréhensions.

> Quand on parle d'évitement de la division dans les pratiques arithmétiques populaires d'autrefois, c'est pour parler de l'utilisation d'une fiche technique qui permettait aux élèves d'apprendre par cœur des formules proposées sans faire de justification. On parle donc de technique. Par exemple le cubage des grumes où pour calculer le volume de la grume la formule était
>
> $$V = \left(\frac{1}{2} \times \frac{C}{\pi}\right)^2 \times \ell$$
>
> La fiche technique sur le cubage du bois nous donnait comme formule $V = S \times \ell$ et S était donnée par la formule simplifiée $S = 0{,}079\ C^2$. On obtenait une formule trop compliquée $S = \frac{C^2}{4\pi}$ alors que $S = \pi R^2$ est beaucoup plus simple. On l'utilise encore maintenant pour calculer la surface d'un cercle.

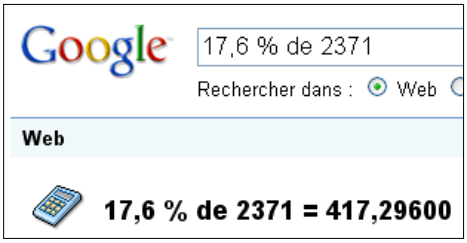
L'égarement n'est pas moindre dans la réponse suivante, qui évite pourtant prudemment à peu près toute présence mathématique :

> Il s'agit d'éviter la pratique de la division qui était à l'époque, une pratique jugée difficile. Pour cela, on utilisait d'autres moyens arithmétiques jugés plus faciles, notamment la multiplication, afin d'obtenir à peu près le même résultat qu'avec une division – même si pour cela il fallait multiplier les $\underset{\text{types}}{\wedge}$ tâches à effectuer pour la mise en œuvre de la technique. On peut donner cet exemple à propos du « cubage des grumes ». Ainsi, pour éviter la pratique de la division, on multiplie les types de tâches pour utiliser la technique de cubage proposée.

Je ne commenterai pas plus les erreurs commises. Il me suffit de noter que rédiger un compte rendu de lecture questionnante ne va nullement de soi pour une majorité de ces étudiants. On peut penser qu'un tel type d'opération est l'objet, dans la formation scolaire et universitaire courante, d'une attention insuffisante et surtout qu'elle se trouve gênée par la prédominance du *commentaire* (et, à travers lui, par la propension à « l'expression de soi ») sur le compte rendu objectif. Il s'agit là, en tout cas, d'un type de tâches pour lequel un équipement praxéologique adéquat, non troublé par des habitus contraires, fait majoritairement défaut, me semble-t-il.

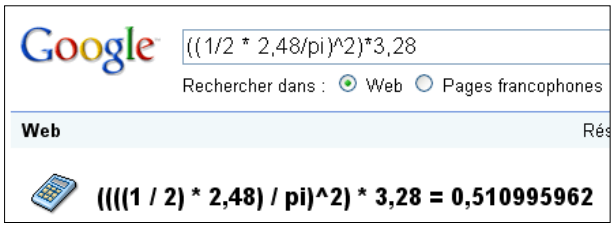
e) Reste le grand problème – sur lequel il nous faudra progresser – de l'étude d'une œuvre *O* finalisée par l'enquête sur une question *Q*. À cet égard, je me limiterai à une remarque un peu périphérique mais non moins essentielle : notre connaissance des œuvres potentiellement pertinentes est souvent

insuffisante et cela, en nombre de cas parce que notre étude de ces œuvres reste souvent insuffisante. Je prendrai ici un exemple « facile » : notre connaissance fréquemment inadéquate et surtout à peu près figée de ces œuvres que sont les logiciels utiles à nos travaux ; et j'illustrerai cet exemple par un cas très simple, au reste déjà croisé (toujours dans la huitième et dernière séance du séminaire 2008-2009) : celui de la calculatrice Google. Il me semble, mais je me trompe peut-être, que peu de gens en connaissent l'existence ou, du moins, la diversité des emplois. Je suppose, hélas ! qu'il sera doux à plus d'un ancien élève de collège de savoir que, pour calculer la valeur de, disons, 17,6 % de 2371, il suffit de taper exactement cela – 17,6 % de 2371 – dans la « boîte de recherche » de Google, comme on le voit ci-après :

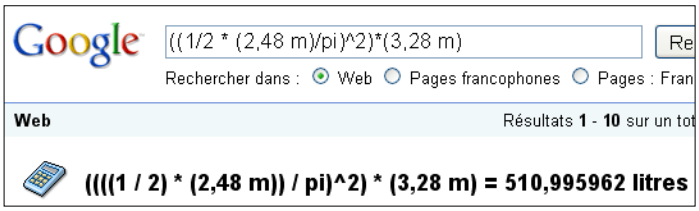


S'agissant du cubage des grumes vu plus haut, on peut bien évidemment calculer les quantités « difficiles » que sont $\frac{1}{\pi}$ ou $\frac{1}{4\pi}$:

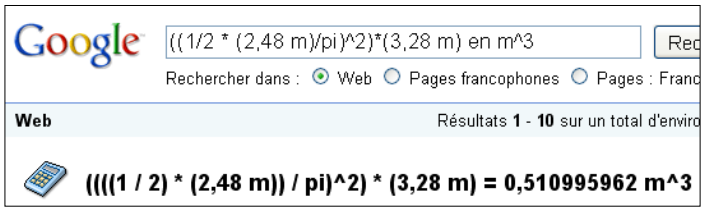
On peut bien sûr confier aussi à cette calculatrice le calcul complet de la valeur de $V = \left(\frac{1}{2} \times \frac{C}{\pi}\right)^2 \times \ell$ pour C = 2,48 m et ℓ = 3,28 m. On peut pour cela « laisser tomber les unités », comme ci-après :



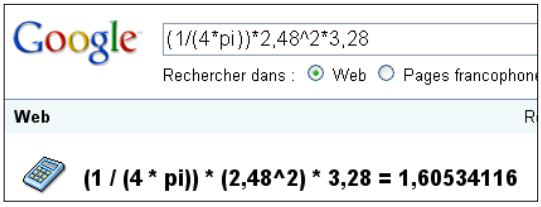
On peut aussi conserver les unités, ce qui réserve quelquefois de petites surprises, comme ci-après :



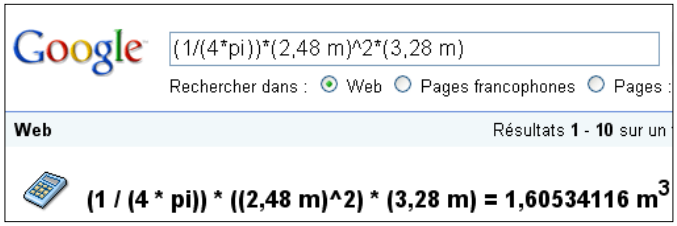
On peut rectifier le tir comme suit par exemple :



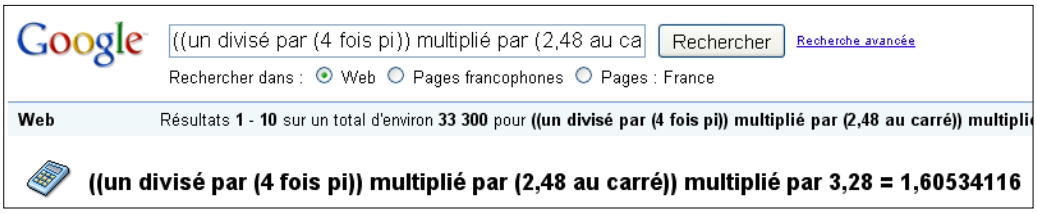
On aura observé que, en vérité, la formule $V = \left(\frac{1}{2} \times \frac{C}{\pi}\right)^2 \times \ell$ est erronée : elle fournit une valeur π fois inférieure à la vraie valeur. La bonne valeur est donnée par $V = \frac{1}{4\pi} \times C^2 \times \ell$. Pour les valeurs de C et ℓ déjà rappelées, et en omettant les unités, on a alors ceci :



En incluant les unités, on obtient semblablement :



Là comme ailleurs, on peut aussi interroger la calculatrice de Google en « langue naturelle », même s'il faut alors employer force parenthèses :



Bien sûr, toute œuvre a ses mystères. J'en citerai un concernant la calculatrice Google : peut-on – et alors comment – fixer la précision de l'affichage ? Petite enquête à mener !

QUESTIONS D'INFRASTRUCTURE

1. La notion d'infrastructure

a) Sauf erreur, la notion d'infrastructure a, dans le cadre du séminaire TAD/IDD, été introduite lors de la séance 4 de l'année 2008-2009. C'est une notion qui doit encore « travailler » ; mais je note qu'elle ne semble pas fort éloignée de cette définition de dictionnaire que propose le *Trésor de la langue française informatisé* (TLFi) : « Support, base indispensable à l'édification, au maintien, ou au fonctionnement d'une structure concrète ou abstraite. »

b) Cette notion nous rappelle que chacun n'est pas seul au monde et que l'enseignement, en particulier, n'est pas une robinsonnade : l'enseignant ne peut exister que parce qu'existent – et généralement *préexistent* – des infrastructures qui, à la fois, contraignent et rendent possible son intervention. Le terme d'infrastructure didactique désigne le système des infrastructures de tous niveaux – disciplinaire, pédagogique, scolaire, sociétal, civilisationnel – sur lequel s'élève la superstructure didactique.

c) Deux grands faits solidaires ont présidé à l'introduction formelle de la notion d'infrastructure : tout d'abord, le constat de l'existence continuée de l'illusion subjective du professeur comme « petit producteur indépendant » (ou comme membre d'un groupement de petits producteurs indépendants) ; ensuite, le constat de l'affaissement ou de l'absence de certaines infrastructures indispensables aux enseignements envisagés, qui constitue une partie essentielle du problème des « ressources manquantes » de la profession.

2. Un exemple : l'algèbre élémentaire

a) Je m'arrêterai sur des carences infrastructurelles de nature *mathématique*. Je commence par un exemple bien connu, celui de l'algèbre

élémentaire. On peut partir pour cela d'une question naïve : quand on parle d'*expression algébrique*, quelle entité celle-ci *exprime*-t-elle – algébriquement ? Voici d'abord un court extrait de l'article "Elementary algebra" de l'encyclopédie en ligne *Wikipedia*.

> In elementary algebra, an "expression" may contain numbers, variables and arithmetical operations. These are usually written (by convention) with "higher-power" terms on the left (see polynomial); a few examples are:
>
> $x + 3$,
>
> $y^2 + 2x - 3$,
>
> $z^7 + a(b + x^3) + 42/y - \pi$,
>
> In more advanced algebra, an expression may also include elementary functions.
>
> An "equation" is the claim that two expressions are equal. Some equations are true for all values of the involved variables (such as $a + b = b + a$); such equations are called "identities". "Conditional" equations are true for only some values of the involved variables: $x^2 - 1 = 4$. The values of the variables which make the equation true are called the "solutions" of the equation.

Il est possible de regarder de telles écritures symboliques comme n'exprimant rien et ne renvoyant qu'à elles-mêmes. Mais cela pose un problème majeur : quand dira-t-on alors que deux telles entités sont « égales » ? Par exemple, les écritures $a + b$ et $b + a$ sont formellement distinctes ; pourquoi dira-t-on, comme le rédacteur du passage reproduit ci-dessus, que l'écriture $a + b = b + a$ est une « identité » ? Pourquoi dira-t-on, de même, que $x^2 = x$ *n'est pas* une « identité » ?

b) On peut évidemment répondre qu'il existe un *calcul* portant sur les expressions algébriques, et qui permet de conclure que l'égalité formelle $a + b = b + a$ est une « identité » mais ne permet pas de conclure de même à propos de l'égalité formelle $x^2 = x$. Mais d'où viennent alors les *règles* de ce calcul ? On connaît la solution traditionnelle, qui avait pourtant disparu durant plusieurs décennies de l'enseignement de l'algèbre élémentaire : une expression algébrique exprime un certain *programme de calcul*, que l'on peut imaginer comme s'énonçant « en mots ». Ainsi $x^2 - x$ exprime-t-il le programme de calcul qui consiste, étant donné un nombre entier (par exemple), à l'élever au carré, puis à soustraire du nombre ainsi obtenu le nombre choisi lui-même. Pour 3, on calculera d'abord $3^2 = 9$, puis on soustraira 3, obtenant ainsi $9 - 3 = 6$; pour 10, on obtiendra d'abord $10^2 = 100$, puis $100 - 10 = 90$. Considérons alors le programme de calcul suivant : on prend un nombre et on le multiplie par son prédécesseur dans la suite des entiers : pour 8, on obtiendra ainsi $8 \times 7 = 56$, pour 12, $12 \times 11 = 132$, etc. Il n'est pas facile de voir que les deux programmes de calcul exprimés en

mots sont en fait « équivalents », en ce sens que, quel que soit le nombre auquel on les applique, ils rendent le *même* résultat. D'où le détour par leur *expression* algébrique et par le *calcul* algébrique : le premier a pour expression $x^2 - x$, le second $x(x - 1)$; or quiconque connaît le calcul algébrique peut écrire qu'on a par exemple

$$x(x - 1) \equiv x \times x - x \times 1 \text{ puis } x \times x - x \times 1 \equiv x^2 - x$$

et donc qu'on a finalement $x(x - 1) \equiv x^2 - x$, c'est-à-dire que l'égalité formelle $x(x - 1) = x^2 - x$ est une *identité*.

b) D'où viennent les règles du calcul algébrique ? Du calcul sur les nombres. Le fait que, lorsqu'on additionne un premier nombre et un second, on trouve le même résultat que lorsqu'on additionne le second et le premier fournit l'*identité* $a + b = b + a$, laquelle ne fait qu'énoncer l'*équivalence* des programmes de calcul dont l'expression algébrique est respectivement $a + b$ et $b + a$, soit encore le fait noté ci-dessus $a + b \equiv b + a$. Mais d'où sait-on que cette équivalence est toujours vraie, quels que soient les entiers a et b (par exemple) ? Bien entendu, cela vient de l'universalisation d'un constat jamais mis en défaut dans le domaine numérique effectivement observé : on retrouve ici une induction de style expérimental, que les calculs axiomatisés ne peuvent occulter – mais je passe là-dessus.

c) Il y a cependant une similitude essentielle entre le passage de la « numérosité » au calcul arithmétique et le passage des programmes de calcul (arithmétique) au calcul algébrique : dans chaque cas, la « syntaxe » du calcul (arithmétique, algébrique) se fonde sur une « sémantique » – soit ce que je nomme ici « numérosité », dans le premier cas, et programmes de calcul, dans le second. Mais si l'on met entre parenthèses cette sémantique et, si je puis dire, la pragmatique associée, calcul arithmétique et calcul algébrique ne sont plus que des *systèmes formels* dont les règles peuvent bien être formulées et mises en œuvre pour produire des énoncés ; mais nous ne savons plus alors à quoi ces énoncés se rapportent.

d) En quoi la notion d'infrastructure est-elle impliquée dans ce qui précède ? L'enseignement de l'algèbre élémentaire suppose à l'origine une infrastructure mathématique complexe, faite d'une pragmatique, d'une sémantique et d'une syntaxe. Le passage du temps a évidé cette infrastructure parce que, dans un enseignement formel – et non pas fonctionnel –, la syntaxe seule compte : pragmatique et sémantique sont rapidement refoulées. Le calcul algébrique se trouve ainsi naturalisé comme pure syntaxe : il donne l'impression *de tenir debout tout seul*. L'idée qu'il y aurait autre chose que des expressions formelles s'estompe, à tel point que la confusion, fréquente chez les débutants (où elle procède d'une syntaxe imaginée), entre x^2 et $2x$ n'est pas invalidée par l'observation que les

programmes de calcul ainsi exprimés *ne sont pas équivalents* (pour 3 par exemple, le premier donne 9 et le second 6), mais par le fait *qu'on n'a jamais établi* (i.e. déduit) l'identité $x^2 = 2x$. (Bien entendu, on suppose ici que les règles du calcul algébrique sont telles que ce qui est sémantiquement *faux* n'est pas syntaxiquement *démontrable*.)

e) Il y a là un exemple d'un phénomène général de *vieillissement culturel* qui conduit à couper le mathématique du mathématisé. Ainsi en va-t-il en géométrie lorsque, comme cela est de plus en plus vrai aujourd'hui, on tend à identifier, sans autre forme de procès, le plan à l'ensemble $\mathbb{R}^2$ ou l'espace à l'ensemble $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire la réalité au modèle. On substitue ainsi à la mathématisation d'une réalité physique l'étude formelle d'une structure mathématique que l'on finit par identifier à la réalité qu'à l'origine elle prétendait seulement modéliser. Revenir sur ce glissement ontologique ne va pas de soi : il faut réinvestir la réalité modélisée, il faut reprendre le processus de mathématisation, et enfin maîtriser le modèle, ce qui suppose une organisation infrastructurelle relativement lourde qui ne se réinvente pas en un tournemain.

3. Les probabilités : une syntaxe sans sémantique ?

a) Lors de la récente école d'été, Floriane Wozniak et moi-même avons animé l'un des ateliers évoqués plus haut sous le titre commun *Vers une ingénierie didactique des PER*. Cet atelier portait sur *L'aléatoire et la variabilité*. Le problème d'ingénierie didactique proposé aux participants à l'atelier – au nombre d'une dizaine dans un rassemblement de quelque 120 personnes, je crois – était le suivant : *Que pourrait être* un *scénario de PER qui fasse vivre les probabilités comme modélisant la variabilité statistique dans une classe de 3e aujourd'hui ?* Ce qui est à remarquer, ici, c'est qu'il n'est nullement question de PER *ouvert* : le scénario de PER attendu doit conduire les élèves à *rencontrer* le calcul des probabilités (comme modélisant la variabilité statistique). Mais on voit que la finalisation praxéologique n'est pas ici quelque chose de simple : il ne s'agit pas de faire rencontrer, par exemple, la notion de symétrie axiale, ou de produit scalaire, ou d'ellipse. Le morceau est beaucoup plus gros à avaler : il s'agit de faire rencontrer le calcul des probabilités « comme modélisant la variabilité statistique ». Classiquement, le travail requis doit aboutir à proposer une question génératrice *Q* dont on puisse montrer que son étude conduit – sous certaines contraintes et dans certaines conditions – à rencontrer les probabilités « comme modélisant la variabilité statistique ». Mais ici, pour concevoir une telle question, il faut avoir des idées assez précises sur la manière dont les probabilités « modélisent la variabilité statistique ». Et c'est d'abord là que le bât blesse !

b) Quand on se demande en quoi les probabilités peuvent modéliser la variabilité statistique, on arrive très vite à se demander ce qu'est au juste une « probabilité ». Or, à cette interrogation, la plupart des exposés actuels de calcul des probabilités ne répondent pas : la notion de probabilité y est définie de façon formelle, par voie axiomatique. Voici par exemple un extrait d'un mince mais dense opuscule, dû à Paul Jaffard, professeur au CNAM, intitulé *Probabilités. Résumé de cours. Exercices. Problèmes* (Masson, 1993). Le premier chapitre en est découpé en cinq sections : la première s'intitule « Événements », la deuxième « Lois de probabilité ». Le chapitre 1 s'ouvre par ces mots : « Un problème qui relève du Calcul des Probabilités se ramène à l'étude du tirage au sort d'un élément ω dans un ensemble Ω » (p. 1). La notion de « tirage au sort » semble supposée primitive – dans cette première section (qui traite d'événements, non de probabilités), elle ne réapparaîtra que dans un exemple : « Le tirage au sort consiste à jouer à "pile ou face" 3 fois de suite. En posant 1 pour pile et 0 pour face, on peut prendre $\Omega = \{ 0, 1 \}^3$, etc. » C'est au début de la deuxième section qu'on la retrouve, dans un passage crucial :

> Étant donné un tirage au sort dans un ensemble Ω, la **loi de probabilité** P de ce tirage associe à chaque événement A la probabilité $P(A)$ pour que A soit réalisé au cours de ce tirage. $P(A)$ est un nombre réel et les propriétés suivantes sont vérifiées :
>
> 1) $0 \leq P(A) \leq 1$.
>
> 2) $P(\varnothing) = 0$ et $P(\Omega) = 1$
>
> 3) $P(A^c) = 1 - P(A)$.
>
> 4) $P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$.
>
> On en déduit :
>
> $$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

On voit que l'auteur ne fait ici qu'*évoquer* un « tirage au sort » qui suivrait telle loi de probabilité P, sans dire à quoi un tel « tirage au sort » se reconnaît, ni en quoi il peut consister. La notion de probabilité est, de fait, définie axiomatiquement : une fois de plus, on nous donne la syntaxe de la notion sans nous faire connaître sa sémantique – qui, ce sera là mon point principal, tend à *disparaître* de la culture commune.

c) L'exemple précédent est tiré d'un *résumé* de cours et on pourrait envisager que le *cours* lui-même soit plus explicite. Voici maintenant un *Calcul des probabilités* riche, précis et concis dû à Lucien Chambadal et paru en 1969 (chez Dunod). Il s'ouvre par deux pages consacrées au « Vocabulaire des événements », suivies par le chapitre 1 intitulé « Probabilités sur les ensembles finis », lequel commence par cette *définition* :

DEFINITION I. 1. – Probabilités. *Soit Ω un ensemble fini non vide. On appelle probabilité sur Ω toute application P de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des événements de l'ensemble dans l'ensemble* $\mathbf{R}_+$ *des nombres réels positifs, satisfaisant aux deux conditions suivantes* :

a) *La probabilité de Ω est égale à* 1 :

$$P(\Omega) = 1.$$

b) *Pour tout couple* (A, B) *d'événements incompatibles,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Au lieu de « *probabilité sur Ω* », *on dit aussi* « *loi de probabilité sur Ω* ».

Au plan de la syntaxe, la notion de probabilité sur un ensemble Ω fini se réduit à cela, en effet. Mais d'où vient cette notion ? De quelles réalité éventuellement extramathématiques est-elle la mathématisation ? Cela ne nous est pas dit.

d) Comment, dans ces conditions, pourrait-on voir un lien entre probabilités et variabilité statistique ? Je m'arrête un instant pour illustrer cette dernière notion en remontant aux débuts de son histoire. Au Séminaire 2005-2006 destiné aux PCL2 de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille (séminaire que, grâce à l'énergie de Gisèle Cirade, vous trouverez désormais en ligne sur mon site), j'emprunte quelques pages du compte rendu de la séance 20.

---

c) Dès la *Political Arithmetic* élaborée par les Anglais John Graunt (1620-1674) et William Petty (1623-1687), la science statistique s'inscrit en faux contre ces fausses finesses.

1) Dans ses *Observations on the Bills of Mortality* (1662), John Graunt, faisant œuvre de pionnier, présente les causes de mortalité à Londres pour diverses années. Voici, en traduction française, la table qu'il dresse pour l'année 1632 (pour des indications sur la nature exacte des causes recensées, voir http://www.ac.wwu.edu/~stephan/Graunt/graunt.html).

Abcès : 74
Angine : 7
Aphtes et affections de la bouche : 40
Assassinés : 7
Brûlés et échaudés : 5
Chancre : 1
Chancre et lupus : 10
Colique, pierre et strangurie : 56

Consomption : 1797
Contusions, écoulements, plaies et ulcères : 28
Convulsions : 241
Dépression : 8
Écrouelles : 38
Épilepsie : 7
Éruptions et varioles : 531
Étouffés et morts de faim en nourrice : 7
Exécutés et torturés à mort : 18
Femmes mortes en couche : 171
Fièvre : 1108
Fistule : 13
Flux de ventre, diarrhée et dysenterie : 348
Folie : 5
Foudroyés par une planète : 13
Gangrène : 5
Goutte : 4
Hémorragie : 3
Hémorroïdes : 1
Hernie : 9
Hydropisie et ballonnements : 267
Hypertrophie du foie : 87
Indigestion : 86
Jaunisse : 43
Léthargie : 2
Mordu par un chien enragé : 1
Mort subite : 62
Morts dans la rue et de faim : 6
Morts de chagrin : 11
Nouveaux nés et enfants en bas âge : 2268
Noyés : 34
Opérations de la pierre : 5
Paralysie : 25
Peste : 8
Phtisie : 34
Pleurésie et atrabile : 36
Poussée des dents : 470
Rhume et toux : 55
Rougeole : 80
Sciatique : 1
Scorbut et gale : 9
Soulèvement des poumons : 98
Suicidés : 15

Tués dans divers accidents : 46
Tympanite : 13
Typhus et scarlatine : 38
Varicelle : 6
Vérole : 12
Vers : 27
Vomissements : 1

2) L'un des buts essentiels du travail engagé est de donner aux personnes des indications sur ce qui les conduira à quitter ce monde, en leur permettant d'aller au-delà de la réponse de l'ignorance et de la crainte immotivée – « ça dépend ». Graunt écrit à ce propos :

> In the next place, whereas many persons live in great fear, and apprehension of some of the more formidable, and notorious diseases following; I shall only set down how many died of each: that the respective numbers, being compared with the Total 229250, those persons may the better understand the hazard they are in.

La table présentée est celle-ci.

Apoplex: 1306
Bleeding: 069
Cut of the Stone: 0038
Burnt, and Scalded: 125
Falling Sickness: 0074
Drowned: 829
Dead in the Streets: 0243
Excessive drinking: 002
Gowt: 0134
Frighted: 022
Head-Ach: 0051
Grief: 279
Jaundice: 0998
Hanged themselves: 222
Lethargy: 0067
Kil'd by several accidents: 1021
Leprosy: 0006
Lunatique: 0158
Murthered: 0086
Overlaid, and Starved: 0529
Poysoned: 014
Palsy: 0423
Smothered: 026

Rupture: 0201
Shot: 007
Stone and Strangury: 0863
Starved: 051
Sciatica: 0005
Vomiting: 136
Sodainly: 0454

On voit ainsi, par exemple, que la fréquence des décès du fait d'un accident, relativement élevée, n'est que de $\frac{1021}{229250} = \frac{1021000}{229250}$ ‰ ≈ 4,45 ‰ : il y a moins de 5 « chances » sur 1000 de périr d'un accident.

d) L'objectif de la statistique est ainsi de faire entendre qu'il est faux qu'on ne puisse rien dire, ni rien savoir. Tout n'est pas également probable : il existe des régularités statistiques qui nous assurent que, si la survenue de tel événement est bien possible, elle est de faible « probabilité ». Cela revient à dire que les distributions de fréquences ne sont pas, en général, uniformes. Et ce sont ces distributions de fréquences que les études statistiques vont s'efforcer de porter à la lumière.

---

e) Ce qui précède ébauche *in fine* la sémantique de la notion de probabilité : celle-ci est une « fréquence théorique », c'est-à-dire une fréquence considérée comme stabilisée dès lors qu'on la calcule sur une longue série de données observées. C'est sur ce point que je m'arrêterai maintenant.

4. Des fréquences aux probabilités

a) Lors de l'atelier de l'école d'été, nous avons proposé aux participants de retrouver la « sémantique » de la notion de probabilité en se penchant sur un texte de deux probabilistes russes très connus, B. V. Gnedenko et A. Ia. Khintchine. J'ai réuni en fait tout un corpus de textes analogues : je choisis ici de me référer à un classique en langue française, le traité en deux volumes de Pierre Dagnelie, *Théorie et méthodes statistiques* (Les Presses agronomiques de Gembloux, 1973). Voici un premier extrait du chapitre 4 (« La probabilité mathématique et les distributions théoriques : généralités ») du volume 1, *La statistique descriptive et les fondements de l'inférence statistique*.

4.2.1. La définition classique de la probabilité

1° La définition de la probabilité mathématique est liée aux notions d'expérience et d'événement aléatoires.

Une *expérience* ou une *épreuve* est dite *aléatoire* lorsqu'on ne peut en prévoir exactement le résultat, en raison du fait que tous les facteurs qui

déterminent ce résultat ne sont pas maîtrisés ou contrôlés. Un *événement aléatoire* est un événement qui peut se réaliser ou ne pas se réaliser au cours d'une expérience aléatoire.

Citons comme *exemples* d'expériences et d'événements aléatoires : le tirage d'une carte d'un paquet de cartes à jouer et le fait d'extraire un cœur, la mise en germoir d'une graine et la germination de cette graine, la fécondation de deux individus l'un par l'autre et la naissance d'un individu mâle.

Si m résultats peuvent se produire avec des chances égales au cours d'une expérience aléatoire, et si k de ces résultats conduisent à la réalisation de l'événement A, on définit classiquement la *probabilité* de l'événement A comme étant le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles ou également possibles :

$$\boxed{P(A) = k/m}$$

Par exemple, si un paquet de 52 cartes contient l3 cœurs, et si toutes les cartes ont des chances égales d'être tirées, la probabilité d'extraire un cœur en prélevant une carte est :

$$P(\text{cœur}) = 13/52 = 1/4.$$

2° Cette *définition classique* de la probabilité présente cependant divers inconvénients. Elle est tout d'abord incomplète, en ce sens qu'elle revient à définir la notion de probabilité à partir de la notion d'égale probabilité des différents cas.

En outre, cette définition n'est pas suffisamment générale, car elle n'est utilisable que quand les différents cas envisagés sont également probables et dénombrables. Cette définition ne s'applique *par exemple* pas à l'étude du sexe observé à la naissance, car de nombreuses observations montrent que les deux événements « naissance mâle » et « naissance femelle » ne sont pas également probables : dans l'espèce humaine notamment, les naissances masculines sont plus fréquentes que les naissances féminines. De même, si on doit choisir au hasard une ou plusieurs parcelles cultivées dans une région donnée, en sélectionnant au hasard un ou plusieurs points de la carte cadastrale correspondante, la définition classique de la probabilité ne s'applique pas : on peut éventuellement admettre ici que tous les cas sont également possibles, c'est-à-dire que tous les points ont la même probabilité d'être choisis, mais ces différents cas ne sont évidemment pas dénombrables.

Pour remédier à ces divers inconvénients, une *définition plus générale* de la probabilité peut être introduite par analogie avec la notion empirique de fréquence.

4.2.2. La définition fréquentielle de la probabilité

1° Lorsqu'une expérience aléatoire a été répétée un certain nombre de fois n, on peut déterminer le nombre de réalisations de l'événement A qui y est

associé, c'est-à-dire sa fréquence absolue n_A, et en calculer la fréquence relative :

$$n_A' = n_A/n.$$

Si l'expérience est répétée un grand nombre de fois dans des conditions uniformes, on constate généralement que la fréquence relative a tendance à se stabiliser à la longue. Ce phénomène est connu sous le nom de phénomène de *stabilité des fréquences* ou de *régularité statistique*.

On peut alors postuler, pour tout événement aléatoire qui satisfait à ces conditions, l'existence d'un nombre fixe dont la fréquence relative a tendance à s'approcher. Ce nombre est par définition la *probabilité mathématique* de l'événement considéré.

Telle est donc l'origine *statistique* de la notion de probabilité. Je n'accumulerai pas, ici, les textes explicitant ce point de vue, dit souvent « fréquentiste ».

b) Comme en géométrie, comme en algèbre, les axiomes de base du calcul des probabilités, qui permettront de disposer d'une syntaxe probabiliste d'utilisation aisée, proviennent de la sémantique qu'on lui donne : le mathématique procède du mathématisé. La chose est ici on ne peut plus facile ; voici à ce propos un deuxième extrait de l'ouvrage de Dagnelie déjà cité :

4.3.1. Les axiomes de base

La notion de probabilité n'est cependant pas suffisamment définie par son seul postulat d'existence. Aussi doit-on lui attribuer un certain nombre de propriétés, tout d'abord sous forme d'axiomes. Ceux-ci sont établis par analogie avec certaines propriétés fondamentales de la fréquence relative.

1° La fréquence relative étant toujours comprise entre 0 et 1, on admettra que la probabilité de tout événement aléatoire A est elle aussi comprise entre 0 et 1 :

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}.$$

2° De plus, la fréquence relative de tout événement qui doit nécessairement se réaliser étant égale à 1, on admettra également que la probabilité correspondante est égale à un. Un tel événement, de probabilité unitaire, est appelé un *événement certain*.

Toutefois, la probabilité d'un événement peut être égale à 1 sans que celui-ci soit absolument certain. Tout événement de ce type est dit *presque certain* ou *stochastiquement certain*. Il est presque certain *par exemple* qu'une pièce de monnaie lancée en l'air retombera sur une de ses deux faces, de telle sorte

qu'il est logique d'attribuer une probabilité 1 à cet événement. Il n'est cependant pas impossible que la pièce retombe exceptionnellement sur la tranche.

3° Considérons d'autre part deux événements A et B associés à une même expérience aléatoire, mais ne pouvant pas se produire simultanément. De tels événements sont dits *exclusifs*. Si l'on observe, à l'issue de n répétitions de cette expérience, n_A réalisations de A et n_B réalisations de B ($n_A + n_B \leq n$), on a :

$$n'_A = n_A/n, \qquad n'_B = n_B/n \quad \text{et} \quad n'(\text{A ou B}) = (n_A + n_B)/n.$$

D'où aussi : $n'(\text{A ou B}) = n'_A + n'_B$.

Par analogie, on admettra pour la probabilité de deux événements exclusifs, la relation :

$$\boxed{\text{P(A ou B)} = \text{P(A)} + \text{P(B)}}.$$

Cet axiome est connu sous le nom *d'axiome d'additivité* ou *de la probabilité totale* ou *de la probabilité de l'un ou de l'autre*. Cet axiome justifie aussi le fait d'écrire parfois (A + B) au lieu de (A ou B).

Si, *par exemple*, la probabilité d'extraire un cœur et celle de tirer un carreau d'un jeu de cartes sont toutes deux égales à 1/4, la probabilité de tirer une carte rouge est :

$$\text{P(rouge)} = \text{P(cœur ou carreau)} = \text{P(cœur)} + \text{P(carreau)} = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

c) Voici enfin un troisième extrait du même ouvrage. Il montre comment la mathématisation probabiliste de la notion statistique de fréquence permet de disposer de la notion de « probabilité conditionnelle » :

4.4.1. La probabilité conditionnelle

La plupart des propriétés établies jusqu'à présent sont relatives à des expériences aléatoires isolées, auxquelles sont associés deux ou plusieurs événements exclusifs. Considérons maintenant plus en détail le cas d'événements non exclusifs, puis celui de plusieurs expériences simultanées ou successives.

1° Soit une expérience aléatoire pouvant conduire à la réalisation ou à la non-réalisation de deux événements A et B non nécessairement exclusifs. Si, à l'issue de n répétitions de cette expérience, on observe :

n_{11} réalisations de A et B,

n_{12} réalisations de A sans B,

n_{21} réalisations de B sans A,

n_{22} non-réalisations de A et de B,

la *fréquence conditionnelle relative* de A sous la condition B est (paragraphe 2.2) :

$$n'_{A|B} = \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{21}} = \frac{n_{11}}{n_{.1}} = \frac{n(\text{A et B})}{n(\text{B})} = \frac{n'(\text{A et B})}{n'(\text{B})} ;$$

et on a de même pour B sous la condition A :

$$n'_{B|A} = \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{12}} = \frac{n_{11}}{n_{1.}} = \frac{n(\text{A et B})}{n(\text{B})} = \frac{n'(\text{A et B})}{n'(\text{B})}.$$

……

2° Par analogie, lorsque P(B) ≠ 0, on définit comme suit la *probabilité conditionnelle* ou *liée* de A sous la condition B :

$$P(A \mid B) = P(A \text{ et } B)/P(B).$$

Et de même, si P(A) ≠ 0 :

$$P(B \mid A) = P(A \text{ et } B)/P(A).$$

Cette définition conduit immédiatement à la *propriété de multiplicativité* ou *de la probabilité composée* ou *de la probabilité de l'un ou de l'autre*, qui reste valable même si P(A) ou P(B) = 0 :

$$\boxed{P(A \text{ et } B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)}.$$

Cette propriété justifie le fait d'écrire parfois (A B) au lieu de (A et B).

Pour m événements non nécessairement exclusifs A_1, …, A_m, on démontre par récurrence que :

$$P(A_1 \text{ et } \ldots \text{ et } A_m) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \ldots P(A_m \mid A_1 \ldots A_{m-1}),$$

$P(A_m \mid A_1 \ldots A_{m-1})$ désignant la probabilité conditionnelle de A_m sous la condition $A_1 \ldots A_{m-1}$ c'est-à-dire sous la condition que les événements A_1, …, A_{m-1} se soient tous réalisés.

d) Je terminerai ce court florilège avec un exemple introductif proposé par Gnedenko et Khintchine dans leur *Introduction à la théorie des probabilités* (Dunod, 3e éd. 1969) dont j'ai déjà parlé.

3. Problème

Énoncé. – Un tireur fait mouche dans 80 % des cas ; un autre (placé dans les mêmes conditions), atteint le but dans 70 % des cas. On demande quelle est la probabilité pour que le but soit touché si les deux tireurs le visent simultanément. (On considère que le but est atteint, indifféremment, s'il l'est par une ou par deux balles.)

PREMIERE MANIERE DE RESOUDRE LE PROBLEME. – Admettons que les tireurs effectuent 100 tirs couplés. Lors de 80 de ces tirs environ, le but sera atteint par le premier tireur. Restent 20 tirs environ qui sont manqués en ce qui le concerne. Mais nous savons que le second tireur fait mouche en moyenne 70 fois sur 100, c'est-à-dire 7 fois sur 10. Nous pouvons donc escompter que, sur les 20 tirs où le premier tireur manque le but, il l'atteindra, lui, 14 fois environ. Par conséquent, sur 100 tirs couplés, le but sera touché approximativement 80 + 14 = 94 fois. La probabilité pour que le but soit atteint en cas de tir simultané de nos deux tireurs est donc de l'ordre de 94 %, ou 0,94.

SECONDE MANIERE DE RESOUDRE LE PROBLEME. – Admettons de nouveau que les tireurs effectuent 100 tirs couplés. Nous avons déjà vu que le premier tireur manquera le but environ 20 fois. Le second tireur échouant, quant à lui, 30 fois sur 100, soit 3 fois sur 10, il est à prévoir que sur les 20 tirs manqués par le premier, il s'en trouvera 6 également manqués par le second. Lors de ces six tirs, le but restera donc intact, alors que pour les 94 autres tirs, l'une au moins des deux balles tirées fera mouche. Nous sommes ainsi amenés à conclure, comme plus haut, que le but sera atteint dans 94 cas environ sur 100, autrement dit, que la probabilité du coup au but, par tir conjugué, est de 94 %, ou 0,94.

Le problème que nous venons d'envisager est très simple. Il ne nous en conduit pas moins à une conclusion très importante, Il est souvent utile, en effet, de déterminer la probabilité de certains événements, d'après celle d'autres événements, moins complexes. C'est là un procédé qui trouve de très nombreuses applications dans toutes les sciences et dans tous les domaines d'activité pratique comportant des opérations ou des phénomènes massivement répétés.

Il serait évidemment très malcommode d'avoir, en présence de chaque nouveau problème de ce genre, à définir un mode particulier de solution. La science tend toujours à établir des règles générales, susceptibles d'être appliquées mécaniquement ou quasi mécaniquement à la solution de problèmes similaires.

Dans le domaine des phénomènes caractérisés par une répétition multiple, la science qui s'occupe d'établir de telles règles a nom *théorie des probabilités*. Le présent ouvrage en expose les fondements.

La théorie des probabilités est l'un des chapitres des mathématiques, comme l'arithmétique ou la géométrie. Sa méthode est donc celle du raisonnement exact, et ses instruments les instruments propres aux mathématiques : formules, tableaux, figures, etc.

Telle est l'infrastructure du calcul des probabilités qui lui donne sa sémantique « statistique ».

5. Une infrastructure disparue et ses conséquences

a) L'infrastructure fréquentiste du calcul des probabilités semble avoir presque totalement disparu de la culture probabiliste « ordinaire ». Lorsque ce n'est pas le cas, elle est parfois mentionnée si rapidement qu'il faut la connaître par avance pour comprendre l'hommage qui lui rendu. À titre d'illustration, voici un extrait de l'ouvrage de François Dress *Probabilités et statistique pour les sciences de la vie* (Dunod, 2002) :

Le passage d'une *description* de type ensembliste des phénomènes aléatoires à l'élaboration d'un véritable *modèle mathématique* se fait en introduisant lles mesures de probabilité.

Une mesure de probabilité P est une application de l'ensemble des événements dans l'intervalle [0, 1], qui satisfait les deux propriétés suivantes (ou « axiomes »)

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

$$P(\Omega) = 1$$

Le point essentiel est que le concept mathématique de *probabilité* modéliser les notions intuitives de *proportion* et de *fréquence*. Quand on pose, par exemple, que la probabilité d'être immunisé contre la tuberculose est de 0,8, on modélise le fait qu'environ 80 % de la population est immunisée contre la tuberculose. Quand on pose, par exemple, que la probabilité d'obtenir le 3 lorsque l'on jette un dé est égale à 1/6, on modélise le fait que, lorsque l'on répète un très grand nombre de fois le jet d'un dé (non truqué), le quotient du nombre de fois où l'on a obtenu le 3 sur le nombre total de jets, c'est-à-dire la fréquence du 3, est très voisine de 1/6 (d'autant plus voisine que le nombre de jets est plus grand).

De ces axiomes découlent les propriétés *additives* des probabilités, d'usage permanent, qui sont récapitulées ci-dessous…

La différence avec les auteurs cités plus haut, pourtant, tient ici à ce que l'auteur ne montre pas *explicitement* comment la mathématisation évoquée conduit audites propriétés.

b) Si l'on veut concevoir un PER *modélisant la variabilité statistique*, il convient évidemment de revenir sur les liens entre probabilité et variabilité statistique. Pour cela, il faut revenir à ce qui apparaît comme une autre Atlantide du corpus mathématique enseigné : l'infrastructure fréquentiste du calcul des probabilités. Celle-ci ne soulève guère de problèmes techniques, et résout maint problème conceptuel (la version mathématisée de l'idée d'indépendance de deux événements devient alors très claire, par exemple). Mais elle a disparu de la culture commune et fait même l'objet, quelquefois, d'une stigmatisation au motif qu'elle ne serait pas « rigoureuse », accusation qui ne peut résulter que d'une confusion entre les plans du mathématique et du mathématisé, du théorique et de l'empirique – alors même que nous sommes dans un contexte de mathématiques mixtes, où se rencontrent réalités extramathématiques et réalités mathématiques « pures ».

c) Tout cela permet de rouvrir le chemin vers une solution au problème posé : déterminer une question *Q* dont l'étude conduirait à faire rencontrer le calcul des probabilités comme modélisant la variabilité statistique. Nous y reviendrons.

That's all, folks!

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

➔ Séance 2 – Vendredi 13 novembre 2009

QUELLE RECHERCHE ? QUELLES PUBLICATIONS ?

1. Cul par-dessus tête

a) Qu'en est-il de la diffusion de la TAD ? D'une façon générale, la diffusion d'un complexe praxéologique passe par des *exposés*, soit ce que le *Trésor de la langue française informatisé* définit comme suit :

> Discours oral ou écrit, où sont présentés selon un ordre déterminé par les règles d'une discipline ou la situation d'énonciation, des données de fait, le contenu d'une discipline, d'une doctrine ou d'une œuvre, les termes d'un problème dans le but d'informer ou de fournir la matière d'une discussion.

Utilisant le langage de la gestion, j'ajoute que les exposés en question doivent porter aussi bien sur les *stocks* de TAD que sur les *flux* de TAD : il y a l'existant, et il y a ce qui advient et qui modifie l'existant. (Sur les notions utilisées, on pourra voir l'article "Stock and flow" de *Wikipedia*.)

b) Plusieurs problèmes se posent : celui de la *production* de tels exposés, celui de leur *réception* et, entre les deux, celui de leur *publication*. Ces trois conditions de la diffusion sont solidaires. Par exemple, on peut produire un exposé avec l'idée de le faire recevoir d'un certain public à travers une certaine publication. C'est là cependant que les choses se compliquent.

c) Pour produire un exposé, il faut évidemment avoir quelque chose à exposer. Cela suppose donc des *travaux* et, notamment, des *recherches*. À titre illustratif, je reproduis ici les types d'articles que recense l'*American Psychological Association* dans son *Publication Manual* (2009) :

1.01 Empirical Studies
1.02 Literature Reviews
1.03. Theoretical Articles
1.04. Methodological Articles
1.05 Case Studies
1.06 Other types of Articles

La présence de la rubrique "Other types of Articles" laisse entendre que ce repérage de différentes catégories d'articles n'écarte rien *a priori*. Où est donc le problème ? J'ai indiqué plus haut que « pour faire des publications, il faut faire des recherches ». Cette formulation est évidemment fautive : on fait de la recherche pour accroître les connaissances disponibles ; et pour faire connaître cette recherche (questions étudiées, moyens d'étude mobilisées, résultats obtenus, etc.), on expose et on publie – et non l'inverse. Or il semble qu'un autre schéma soit aujourd'hui prévalent : pour d'aucuns, ce qui compte, c'est de publier ; les recherches ne sont plus là que pour fournir matière aux publications : elles sont presque un mal nécessaire. Un pas de plus, et on tente de réduire le plus possible le travail de recherche permettant de publier – ou plutôt, et c'est là un point essentiel, de publier dans de « bonnes » revues supposées. À titre d'illustration, je reproduis ici la liste des revues francophones de sciences de l'éducation publiée par l'AERES (agence d'évaluation de la recherche et de l'enseignement supérieur) en 2008 :

Rang A : Revues francophones de position internationale
– Revue Française de Pédagogie

– Histoire de l'Éducation
– Formation-Emploi
– Recherche et Formation
– Revue des Sciences de l'Éducation (Canada)
– Raisons éducatives (Suisse)

Rang B : Revues nationales à ouverture internationale
– Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle
– Les dossiers des sciences de l'éducation
– Éducation et Société
– Savoirs
– International Journal of School and Violence
– RDM
– Aster
– Repères
– Didaskalia
– Penser l'éducation
– Éducation Permanente
– Éducation et didactique
– Le Télémaque
– Carrefours de l'éducation
– Spirale- Revue de recherches en éducation
– Pratiques
– L'année de la recherche en sciences de l'éducation
– Revue internationale d'éducation familiale

Rang C : Revues nationales
– Cahiers de la recherche sur l'éducation et les savoirs
– Nouvelle revue de l'éducation et de la scolarisation
– Diversité
– Éducation et Formations

D : Revues professionnelles, revues de vulgarisation
– Sciences Humaines
– Cahiers Pédagogiques
– Revue du CIEP
– Questions vives

Bien entendu, ce type de classement pèse sur le travail des chercheurs : en didactique des mathématiques, on devra se contenter de publier dans une revue de rang B, *RDM* ; publier dans une revue de rang A semble impossible, sauf à accepter une démathématisation invalidante de son exposé. Il est vrai que la même AERES propose dans ses documents le codage ci-après, qui code large :

[**ACLI**] Articles dans revues internationales à comité de lecture

[**ACLN**] Articles dans revues nationales à comité de lecture

[**OS**] Ouvrages scientifiques

[**CHAP**] Chapitres d'ouvrages scientifiques

[**ACTI**] Communications avec actes dans un congrès international

[**ACTN**] Communications avec actes dans un congrès national

[**INV**] Conférences invitées dans un congrès national ou international

[**ASCL**] Articles dans revues sans comité de lecture

[**COM**] Communications orales sans actes dans un congrès national ou international

[**AFF**] Communications par affiche dans un congrès national ou international

[**OV**] Ouvrage de vulgarisation (ou chapitre de ces ouvrages)

[**DO**] Direction d'ouvrages ou de revue

[**CORP**] Corpus, bases de données, ressources, logiciel

[**TRAD**] Travaux de traduction : traductions annotées, travail d'édition (préfaces, notes, commentaires).

[**AP**] Autres productions : notices, entrées de dictionnaires, rapport de fouille, guide technique, rapports de grands projets, compte rendu d'ouvrage, …

d) Deux autres points (au moins) doivent encore être notés. Premier point : pour qu'une recherche puisse exister, les chercheurs ont besoin de *financements*. On sait que, aujourd'hui, à moins de se contenter de financements très modestes, voire résiduels, ainsi que je le fais depuis des années, le financement de la recherche se fait sur *projets*. Depuis 2005-2006, la création de l'ANR, l'agence nationale de la recherche, a renforcé encore la *rat race* des chercheurs : « avoir » une « recherche ANR », ce n'est pas seulement, semble-t-il, obtenir un financement ; c'est obtenir un label – le label ANR. La course du rat démarre donc avec l'ANR et se termine idéalement dans une « revue internationale à comité de lecture », une revue « de rang A ». La recherche n'est plus alors que le point d'appui qui permet de passer de l'un à l'autre. Les effets délétères de ce carcan ont été prévus depuis fort longtemps par le physicien américain d'origine hongroise Leó Szilárd (1898-1964) dans une nouvelle – "The Mark Gable Foundation" – publiée dans un livre intitulé *The Voice of the Dolphins* (1961), où le narrateur, un chercheur, se voit interrogé par un milliardaire sur la manière de *ralentir* les progrès de la science, trop rapides à son gré ; le narrateur répond ceci (d'après la réédition publiée par Stanford University Press en 1992) :

"It should be obvious," I said. "First of all, the best scientists would be removed from their laboratories and kept busy on committees passing on applications for funds. Secondly, the scientific workers in need of funds would

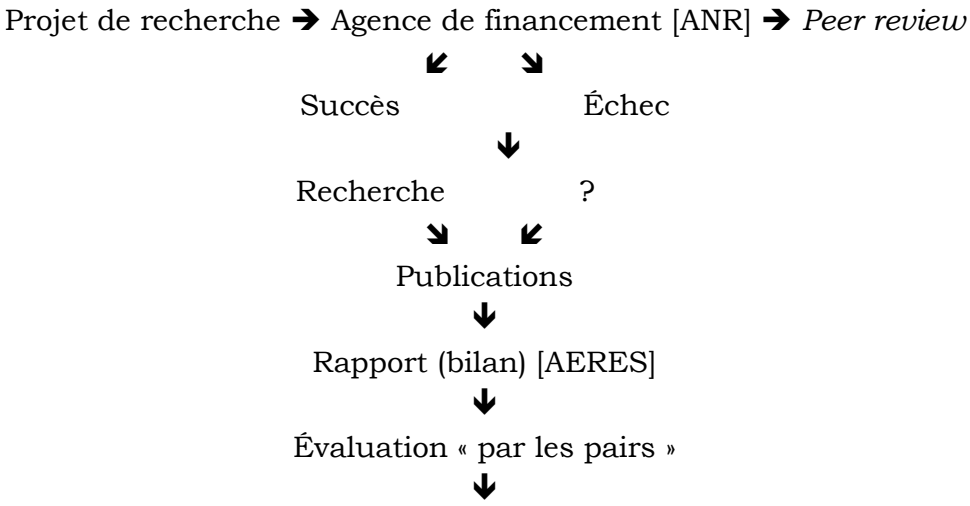
> concentrate on problems which were considered promising and were pretty certain to lead to publishable results. For a few years there might be a great increase in scientific output; but by going after the obvious, pretty soon science would dry out. Science would become something like a parlor game. Some things would be considered interesting, others not. There would be fashions. Those who followed the fashion would get grants. Those who wouln't would not, and pretty soon the would learn to follow the fashion, too." (p. 129)

J'emprunte la référence précédente au livre récemment publié (Seuil, 2009) sous le titre *La science à bout de souffle ?* par Laurent Ségalat, « généticien et directeur de recherches au CNRS », ouvrage dont je ne saurais trop recommander la lecture.

e) Le deuxième point annoncé concerne ce qu'on nomme en anglais *peer review*, l'évaluation par les pairs. Je reproduis ci-après, à titre de rappel, le début de l'article "Peer review" de l'encyclopédie *Wikipedia* :

> **Peer review** (also known as **refereeing**) is the process of subjecting an author's scholarly work, research, or ideas to the scrutiny of others who are experts in the same field. Peer review requires a community of experts in a given (and often narrowly defined) field, who are qualified and able to perform impartial review. Impartial review, especially of work in less narrowly defined or inter-disciplinary fields, may be difficult to accomplish; and the significance (good or bad) of an idea may never be widely appreciated among its contemporaries. Although generally considered essential to academic quality, peer review has been criticized as ineffective, slow, and misunderstood (see anonymous peer review and open peer review).

Il s'agit là du maillon faible dans la chaîne qui enserre la recherche aujourd'hui, que je représenterai comme suit :



Projet de recherche ➔ Agence de financement [ANR] ➔ *Peer review*

↙ ↘

… …

Bien entendu, pour les financements, il n'existe pas que l'ANR ; mais le schéma précédent reste valable : « le taux de succès aux appels d'offres ouverts par les grandes agences de financement, en Europe et aux États-Unis, est de l'ordre de 20 % », précise L. Ségalat (p. 21). En d'autres termes, quatre sur cinq des projets soumis seraient rejetés. Ainsi refuse-t-on à des personnes que l'on paie la possibilité de travailler : c'est le monde à l'envers.

2. La TAD et le problème éditorial

a) Je n'irai pas plus loin, ici, sur l'évaluation par les « pairs », sur ses anomalies et sur les conséquences trop souvent dénaturantes qu'elle a pour la recherche au service du développement de la connaissance – par opposition à la recherche asservie à la seule visée de « publier ». Un travail de didactique des mathématiques que j'ai cosigné récemment a pu ainsi être soumis à un « pair » qui se déclarait tout à la fois *non* didacticien et *non* mathématicien ! J'imagine que chacun pourrait en raconter, sur ce chapitre, des vertes et des pas mûres. Mais je voudrais maintenant m'arrêter sur la situation de la didactique et, plus précisément, de la TAD.

b) Aucun des maux qui assaillent la recherche en général n'est *a priori* épargné à la recherche en didactique et à la TAD. Lors de la séance 1 de ce séminaire, à propos de la terminologie et du formalisme employés en TAD, j'ai souligné l'autocensure que quelques-uns d'entre nous peuvent être tentés d'accepter pour s'épargner les foudres de la censure des « pairs » – qui, il est vrai, semblent manier sans vergogne la férule dès lors qu'ils se croient du bon côté du culturellement correct. J'ajouterai maintenant une autre avanie, que seuls les naïfs (dont je suis) n'avaient pas prévue : les annonces des congrès internationaux sur la TAD déclenchent régulièrement un afflux de propositions de communication dont il appert que les auteurs n'ont qu'une connaissance très vague de la TAD et ne voient dans le congrès qu'une opportunité parmi d'autres de « publier ». On touche ainsi du doigt le cynisme mercenaire auquel conduit tout droit l'organisation bureaucratique actuelle de la recherche : « placer » une communication (ou un article) *où que ce soit*, en recherchant bien sûr les circuits de publication *les plus cotés possibles*, sans engager davantage sa personne dans un projet scientifique collectif, par nature incertain.

c) Le problème essentiel reste cependant celui-ci : étudier les questions que permet de poser la TAD ou qui se posent à la TAD, c'est-à-dire faire de la

recherche ; rédiger des exposés relatifs aux avancées réalisées ; publier ces exposés ; les faire recevoir par le ou les publics visés, ce qui inclut bien sûr leur mise en débat. Il me semble que, dans l'état actuel des choses, et en supposant ici des recherches de qualité, la clé de cette organisation de recherche se trouve dans ce que je nommerai *le problème éditorial* : où publier, sans pasteurisation dirimante, des exposés de nos travaux qui alimentent tout à la fois le développement de la TAD et sa diffusion ? Comment faire connaître – plutôt que méconnaître – les exposés ainsi publiés ? Telles sont les questions que je me contenterai aujourd'hui de poser. Plusieurs idées de réponse pourraient être évoquées. Je n'en ferai rien ici, mais je serais heureux de recevoir suggestions et remarques à ce sujet (y.chevallard@free.fr).

« RECHERCHE ET FORMATION »

1. Une « mascarade »

a) Il y a déjà quelque temps, j'avais accepté de participer à des « assises FSU » qui devaient se réunir le 7 novembre 2009 à l'université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne en vue de « Défendre et rénover la formation des enseignants ». Dans ce cadre, il m'a été demandé d'animer (de 13 h 45 à 15 h 30) un « atelier » qui se déroulait en parallèle avec deux autres ateliers, l'un intitulé « De l'étudiant au fonctionnaire », l'autre, animé par Gilles Baillat, président de la CDIUFM, intitulé « Structures et instances de formation ».

b) Voici la présentation de l'atelier que, de concert avec « un formateur Formation continue » qui avait tenu à garder l'anonymat sur le programme desdites assises, j'ai eu à animer – j'ai découvert cette présentation dans le programme de la journée :

> La recherche en éducation a été trop absente jusqu'à présent : quelles sont les conditions de son développement ? Quelle part de recherche dans la formation ? Quelle part de recherche dans la formation initiale et continue ? Peut-on parler de recherche « appliquée » au métier ?

c) Un communiqué de la tendance *Émancipation* du SNESup (que l'on m'avait transmis l'avant-veille du 7 novembre, car je n'en étais pas le destinataire) précisait : « Émancipation ne peut apporter sa caution à cette mascarade du 7 novembre, nouvelle journée des dupes. » C'est donc du thème de mon *intervention* dans une « mascarade » que je voudrais vous entretenir ici, en reprenant l'essentiel des propos que j'y ai fait entendre.

2. La recherche et les domaines sociaux d'activité

a) Devant tout domaine social d'activité, on doit, en tant que citoyen déjà, se poser cette question : *de quelle recherche bénéficie-t-il ?* Que sont les équipes de recherche « attachées » à ce domaine ? Et surtout : que sont les *questions* qui se posent en ce domaine d'activité et qui font l'objet de recherches ? Ce que l'on découvre alors, c'est l'*inégal développement* de la recherche selon les domaines d'activité et, corrélativement, l'inégale distribution des « cerveaux » : depuis deux siècles, il y a sans doute eu davantage de matière grise investie dans les sciences physiques que dans l'éducation, par exemple.

b) Mais il est un autre scandale. Lorsque la recherche est appelée à concourir à la formation des acteurs d'un certaine domaine d'activité, on est fréquemment mis face à une *indignité partagée* : du côté des *responsables du domaine*, on acceptera de former les acteurs de ce domaine à l'aide des stocks de savoirs existants, généralement *constitués à d'autres fins*, en espérant qu'ils soient « à spectre assez large » ; du côté du *monde de la recherche* éventuellement sollicité, on proposera *ce que l'on a en stock*, sans engager des recherches sur les questions posées au domaine d'activité correspondant. De là ce que j'ai nommé des formations *indignes*.

3. La recherche et les professions de l'enseignement

a) La situation est en particulier celle-là pour les métiers de l'enseignement : la « recherche en éducation », d'organisation libérale, c'est-à-dire qui détermine « librement » ses choix, de façon en quelque sorte autocentrée, voire autiste, constitue des stocks et gère des flux sans véritablement se soucier des besoins du domaine des métiers de l'enseignement ni des questions qui s'y posent.

b) Corrélativement, la plupart des recherches en éducation se veulent « en surplomb » par rapport au domaine des métiers de l'enseignement : d'aucuns voient même en cela une garantie de leur « valeur ». En conséquence, il n'existe que très peu de *recherches « organiques » des métiers de l'enseignement*. Quand elles existent, elles se sont développées surtout dans les IUFM – même si les IUFM abritent aussi de la recherche « libérale », qui suit ses propres lois.

c) Contre cette situation, il faut introduire dans la culture de la recherche la notion de *problèmes posés à un domaine d'activité*, et en particulier de *problèmes d'une profession*, qui appellent des recherches *finalisées* par ces problèmes – ce qui nécessite généralement aussi de la recherche

fondamentale, bien qu'en dernière instance finalisée. Bien entendu, ce qui nous importe ici, ce sont les problèmes posés *aux métiers de l'enseignement*.

4. La recherche comme problème de notre temps

a) Ainsi que je l'ai suggéré plus haut, nous assistons actuellement à la *dégénérescence bureaucratique* du modèle libéral de la recherche : du *publish OR perish* de naguère on passe aujourd'hui au *publish AND perish* qui signe la faillite de la recherche.

b) L'idée classique de formation *par* la recherche (dont l'une des conditions est une formation *à* la recherche) est fortement mise en cause par l'évolution de la culture de la recherche décrite dans ce qui précède. « Former » par la mise en contact avec cette culture-là, en effet, c'est trop souvent *déformer* en donnant de la recherche une image faussée et en en promouvant une pratique dénaturée. C'est ce que donnent à voir certaines formations en sciences de l'éducation où s'initier à la recherche revient à entrer dans un schéma rituel dont Jean-Marie Barbier a peint avec justesse les incongruités dans un entretien avec Françoise Clerc intitulé « Formation et recherche : ambiguïtés sémantiques et formes d'action spécifiques » (paru dans le n° 59 de la revue *Recherche et formation*, pp. 133-139) :

> … on constate fréquemment en recherche un décalage considérable entre la partie dite théorique de la recherche, qui fait un tour d'ensemble ambitieux de toutes les théories connues de l'auteur en rapport supposé avec l'objet, et une grande modestie du travail empirique où les théories citées ne sont pas réellement investies dans le travail d'analyse. Ces recherches produisent peu de résultats et sont en fait une simple mise à plat de la formation et du travail de l'auteur. Ils apportent très peu au lecteur. Quel que soit le plan adopté (séparant ou au contraire mêlant l'exposé du cadre théorique, des hypothèses, de la méthodologie, des résultats, de la discussion et de l'interprétation des résultats), il est important de situer de façon fonctionnelle, les unes par rapport aux autres, les différentes composantes de la recherche : mettre en valeur, par exemple, les outils théoriques réellement investis dans le travail d'analyse, les distinguer des ensembles théoriques plus généraux par rapport auxquels ils prennent signification, mais qui ne pourront pas être éprouvés évidemment dans la recherche. (p. 139)

c) Est-ce cela, la recherche ? Du moins, est-ce à ce type de recherche-là que l'on entend initier les étudiants en sciences de l'éducation et plus généralement les prétendants à un master ? La situation actuelle de la recherche soulève ainsi un très sérieux problème de *transposition didactique*

des activités de recherche – un problème d'autant plus difficile à résoudre adéquatement qu'une « solution » est déjà en place, installée, indurée.

5. Le rapport à la recherche dans l'éducation scolaire : du stock au flux

a) Le rapport à la connaissance culturellement dominant aujourd'hui porte à la conscience du citoyen ordinaire l'existence de *stocks* de savoirs mais maintient l'ignorance des *flux* de connaissances et de la *recherche* qui les engendre. Nous avons là *l'un des grands problèmes éducatifs de notre temps*.

b) Donner une solution à ce problème revient à initier les élèves (et futurs citoyens), non pas tant à la recherche qu'au *fait* de la recherche, aux plans épistémologique, culturel, économique, politique, etc. ; bref, à la recherche comme fait social total. Il s'agit là d'un problème largement ouvert, qui appelle des recherches spécifiques. Les travaux sur l'enquête codisciplinaire et les PER que nous menons participent certainement de la résolution de ce problème ; mais ils ne touchent encore qu'à une *partie* du problème, qui ne se réduit pas à une pratique adéquatement adaptée de la recherche. Il y a là matière à travailler *au sein même de ce séminaire*.

6. Le rapport à la recherche dans la formation des professeurs

a) Pourquoi devrait-on « travailler » leur rapport à la recherche dans la formation des professeurs ? Au vu de ce qui précède, on peut répondre d'abord : parce que les enseignants doivent travailler avec les élèves leur propre rapport à la recherche *s'agissant de la ou des disciplines qu'ils enseignent*. Mais aussi parce que, en vertu même du projet éducatif évoqué ci-dessus, qui s'adresse à *tous* les citoyens, ils doivent développer et entretenir un certain rapport à la recherche relative *à leur domaine d'activité professionnelle* – disciplines enseignées comprises.

b) De là découle l'importance et la spécificité du *rapport à la recherche* des professeurs. Je note qu'un tel rapport ne saurait exister du seul fait que l'enseignant aurait fait « un peu (voire beaucoup) de recherche », surtout s'il s'agit de recherche libérale, formelle et bureaucratique, que ce soit dans la discipline qu'il enseigne ou en matière d'enseignement et d'apprentissage de cette discipline.

7. Que faire ?

a) Je rappelle quelques faits essentiels. Tout d'abord, en amont de la formation des professeurs, il faut situer *le développement de la profession* de professeur, qui commande cette formation. Ensuite, le développement de la

profession se fait dans une dialectique appropriée avec le *développement de la recherche* sur les *problèmes de la profession*. Enfin, la recherche sur les problèmes de la profession suppose des *équipes de recherche organiques*, travaillant sur lesdits problèmes.

b) En quoi peut alors consister l'initiation des futurs professeurs à cette recherche ? Contre l'idée d'en faire des chercheurs au petit pied, qui jouent à la recherche comme des enfants jouent à la marchande ou au docteur, en les maintenant ainsi dans un réel d'opérette, il convient d'*associer* les futurs professeurs à la recherche sur les problèmes de la profession qu'ils veulent embrasser, et cela par le biais d'une immersion bien encadrée dans une équipe de recherche, à propos d'un aspect délimité d'un problème étudié par l'équipe.

c) Insistons sur ce point. La recherche dont le futur enseignant doit être un acteur (et, partiellement, un auteur) ne peut consister en un jeu formel, transposition lointaine d'une authentique recherche organique : ses acteurs, quels qu'ils soient, doivent en assumer solidairement la responsabilité scientifique et sociale. Il faut donc créer les conditions d'une telle assomption.

d) Dans cette perspective, le travail de recherche demandé aux futurs enseignants porterait – c'est un schéma raisonnable – sur un point de difficulté mis au jour par les travaux de l'équipe d'accueil. L'exposé de ce travail serait alors consigné en un mémoire *doublement évalué* : comme mémoire de master, d'un côté, comme production examinée au concours de recrutement (sur l'exemple des TIPE en CPGE), de l'autre.

e) Plus généralement, tout enseignant doit ainsi pouvoir participer à l'effort de recherche touchant les métiers de l'enseignement. Mais l'élaboration (ou la ré-élaboration) du rapport à la recherche d'un enseignant *ne saurait se limiter à cela*. Ce rapport doit en effet lui permettre d'agir, de façon pertinente et efficace, dans le cadre de son enseignement, afin d'impulser, de nourrir, de guider l'élaboration du *rapport des élèves à la recherche* (à tel niveau des études scolaires, en tel domaine). Pour cela, d'une façon générale, la formation des enseignants doit les amener à rencontrer comme *objet d'étude*, selon des problématiques diverses, *la* recherche (relative à tel domaine d'activité) et *les* recherches qui lui donnent son visage concret. Comment faire ? Question clé qui désigne un domaine de recherche appelé à devenir crucial en matière de formation de professeurs, mais dont il semble qu'il soit aujourd'hui encore une *terra incognita* du monde de la formation.

ANALYSES DIDACTIQUES

1. Naissance d'un type de tâches « scolaire »

a) Lors de l'ultime séance du séminaire TAD/IDD de l'année dernière, j'ai évoqué un type de tâches dont, dans divers cadres de formation en sciences de l'éducation, j'ai demandé aux étudiants de montrer – à l'examen – une certaine maîtrise. En l'espèce, la consigne était libellée en ces termes :

> Rédigez une analyse didactique relative aux situations évoquées dans le texte ci-dessous, intitulé…

b) « Rédigez une analyse didactique » : je reviens donc ici sur ce type de tâches. Dans l'unité 6 du cours de didactique fondamentale 2008-2009, les étudiants de licence de sciences de l'éducation pouvaient lire ceci.

6.1.2. Faisons le point sur ce qui constitue, à l'orée de cette Unité 6, une *analyse didactique* d'une situation supposée décrite dans un texte (oral ou écrit) : c'est une analyse de ce type, on le sait, qui sera au cœur de l'épreuve d'examen.

a) Cette analyse doit comporter, en fonction bien sûr des informations disponibles et de ce que l'on peut raisonnablement conjecturer, à propos de chaque système didactique $S(X ; Y ; \heartsuit)$ présent ou évoqué dans la situation, identifié éventuellement comme étant le SDP ou un SDA, l'examen des questions suivantes :

1. qu'est-ce que X ?

2. qu'est-ce que Y ?

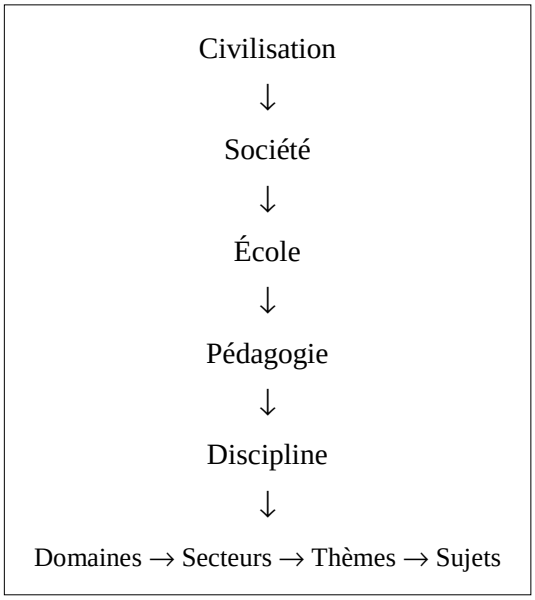
3. que sont les praxéologies [T / τ / θ / Θ] composant $\heartsuit$?

4. que font X et Y, quelles *praxéologies didactiques* mettent-ils en œuvre, mobilisant quelles *ressources didactiques*, pour que X « apprenne » $\heartsuit$?

5. quel *équipement praxéologique* peut-il résulter chez X, à court ou moyen terme, du fonctionnement du système didactique $S(X ; Y ; \heartsuit)$?

6. qu'est-ce que Y et certains environnements éventuels de $S(X ; Y ; \heartsuit)$ auront pu apprendre du fait du fonctionnement de $S(X ; Y ; \heartsuit)$?

b) Pour espérer pouvoir répondre à ces questions, il convient d'identifier les principaux « paquets » de *conditions et contraintes* qui rendent possibles, facilitent ou au contraire interdisent (ou, du moins, gênent) la survenue de tel ou tel état des systèmes didactiques examinés. À cet égard, rappelons l'*échelle des niveaux de co-détermination didactique* à laquelle on est parvenu jusqu'ici : on peut la représenter de la façon suivante.



---

c) Plusieurs exemples d'analyse didactique étaient également proposés. J'ai retenu ici le texte suivant.

L'école primaire à Rome

1. … au point de vue moral, les dangers de la rue et de l'école n'étaient pas moindres, dans l'antiquité, pour les garçons que pour les filles. Aussi les Romains avaient-ils adopté l'usage grec de l'esclave accompagnateur, qu'ils désignaient de leur nom grec de *paedagogus*. Lorsqu'il était bien choisi, il pouvait s'élever au rôle de répétiteur, et surtout d'un véritable gouverneur, assumant la formation morale de l'enfant…

2. Le programme de l'école primaire est toujours d'une ambition très limitée : on y apprend à lire et à écrire, rien de plus ; tout ce qui est au-delà relève déjà du secondaire. On commence bien entendu par l'alphabet, et par le nom des lettres, avant d'en connaître la forme : dans l'ordre, de A à X (Y et Z, qui ne servent qu'à transcrire des mots grecs, sont considérées comme étrangères), puis à l'envers de X à A, puis par couples, AX, BV, CT, DS, ER, puis en brouillant l'ordre par des combinaisons variées, puis à des noms isolés : étapes successives, lentement suivies… Ensuite, avant d'aborder la lecture de textes suivis, on s'exerce sur des petites phrases, des maximes morales d'un ou deux vers… On le voit, c'est, jusqu'en ses plus petits détails, la méthode des écoles grecques ; même pédagogie analytique, même sage lenteur ; Quintillien ne cesse de répéter : « Ne pas chercher à abréger, ne pas se hâter, ne pas sauter d'étapes »…

3. Enfin, le calcul : comme en pays grec, c'est essentiellement l'apprentissage du vocabulaire de la numération pour lequel on s'aide de petits jetons, *calculi*,

et surtout de la mimique symbolique des doigts : on s'en souvient, c'est à l'époque romaine que l'usage est bien attesté de ce comput digital dont les rites survivront pendant de si long siècles. Mais c'est surtout le vocabulaire des fractions duodécimales de l'unité, fondement de tout le système métrique de l'antiquité, qui demandait beaucoup d'efforts. Horace s'est amusé à les évoquer en vers :

Les petits Romains apprennent par de longs calculs à diviser l'unité de cent façons : « Réponds, fils d'Albinus ; si de 5/12 on enlève 1/12, que reste-t-il ? Allons, qu'est-ce que tu attends pour répondre ? – 1/3. – Bien : tu sauras défendre tes sous ! Si (au contraire) on y ajoute 1/12, qu'est-ce que ça fait ? – 1/2.

La traduction française donne à tort l'impression d'un calcul de fractions : le latin ne dit pas 5/12, 1/12, 1/3, 1/2, mais un *quincunx*, une *uncia*, un *triens*, un *semis*, qui sont moins des nombres que des réalités concrètes.

4. Les méthodes de la pédagogie romaine sont aussi grecques que ses programmes ; méthodes passives : la mémoire et l'imitation sont les qualités les plus prisées chez l'enfant. Elles recourent à l'émulation, dont les bienfaits compensent, aux yeux de Quintilien, les dangers de l'éducation collective, mais plus encore à la coercition, aux réprimandes, aux châtiments. Le tableau fameux de Montaigne : « cris d'enfants suppliciés et maîtres enivrés en leur cholère », reste vrai de l'école latine comme il l'était de la grecque ; pour tous les Anciens, le souvenir de l'école est associé à celui des coups : « tendre la main à la férule », *manum ferulae subducere*, est en bon latin une élégante périphrase pour « étudier ».

Extrait de Henri Irénée Marrou, *Histoire de l'éducation dans l'antiquité. II. Le monde romain* (Paris, Seuil, 1948).

---

d) Voici maintenant l'analyse didactique proposée dans le cours, ou plutôt voici ce qui y était présenté comme « *une* analyse didactique concise du texte précédent » (l'obligation de concision imposée à l'examen contraignant à faire des choix).

Les quatre parties du texte proposé apportent des informations sur le fonctionnement de l'école primaire à Rome et en particulier d'un système didactique $S(X ; Y ; \heartsuit)$ de cette école.

La section 1 fait apparaître d'abord une *contrainte* de la *société* sur l'*école* : parce qu'il y a danger à aller de son domicile à l'école et à en revenir, l'écolier x est nanti d'un « pédagogue », z, qui n'est d'abord qu'un serviteur qui l'accompagne et le protège. Mais ce personnage se mue quelquefois en un aide à l'étude, un *répétiteur*, avec lequel l'écolier x forme un SDA $S(x ; z ; \heartsuit)$.

La section 2 donne quelques informations sur l'une des disciplines étudiées, $\heartsuit_1$, la *lecture/écriture*, ainsi que sur l'organisation didactique correspondante. Celle-ci suppose une *analytique didactique* complexe, sur laquelle prend appui une lente progression, strictement définie, dont aucune étape n'est sautée et qui s'étale résolument dans la durée.

La section 3 nous informe de même sur une autre discipline, $\heartsuit_2$, le *calcul*. Une première information a trait aux *instruments* du calcul : vocabulaire de la numération, jetons (*calculi*) et doigts de la main. Les techniques de calcul ainsi instrumentées ne sont pas indiquées ; mais le calcul digital est mentionné, sans autre précision, notamment pour sa très longue postérité dans nos sociétés. Tout cela concerne, à l'évidence, le calcul sur les nombres entiers, $\heartsuit_{21}$. À cela s'ajoute le calcul sur les fractions duodécimales, $\heartsuit_{22}$. Certaines *tâches* de ce calcul sont précisées ; en notation moderne, il s'agit des deux calculs suivants : $\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$; $\frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$. En revanche, on ne sait rien de la *technique* de calcul, hormis que, opérant à l'aide d'un vocabulaire (*quincunx*, *uncia*, *triens*, *semis*) qui désigne et masque à la fois la structure des nombres, elle devait être relativement ardue.

La section 4 met l'accent sur des techniques *pédagogiques* créant des conditions jugées propices à l'étude *en général*. Bien que ces techniques ne soient pas spécifiques d'un contenu particulier, leur mise en œuvre suppose réalisées certaines conditions. Il y a d'abord, ainsi, l'usage de la *mémorisation*, qui demande une matière mémorisable, un « texte » ; il y a ensuite l'*imitation*, qui demande un modèle à imiter (ce peut être le maître) ; il y a enfin un dur effort à fournir, dont les ressorts sont l'*émulation* (qui tire profit de l'existence de la « classe », de l'enseignement collectif) et la *férule*, la violence morale et physique qui s'abat sur l'écolier, condition « pédagogique » que permet la société au sein de l'école, et que Montaigne, longtemps après, dénoncera vivement.

---

e) J'ai insisté dans les enseignements que j'ai donnés – et cela se retrouve dans mon cours écrit – sur un fait clé : l'occultation, la scotomisation, le refoulement du didactique. En pratique, il n'est pas fréquent de rencontrer « dans la littérature » une description de situations sociales didactiques qui laisse apercevoir en celles-ci un *enjeu didactique* (le quelque chose, noté ♥, dont l'apprentissage est visé), et certains au moins des *gestes didactiques* (de la part de *Y* ou de *X*) visant à provoquer ou à aider cet apprentissage. Il en résulte en particulier que le troisième volet de l'épreuve d'examen évoqué plus haut, pour lequel chaque candidat doit apporter une telle description sélectionnée à l'avance par ses soins, comporte une difficulté spécifique très réelle : la « sélection » du texte que le candidat devra analyser est en soi une tâche délicate.

2. Une situation en vidéo

a) L'occasion m'a été donnée récemment d'examiner une *vidéo*. Cette vidéo, il convient d'abord de la visionner. On la trouvera en ligne sur YouTube à l'adresse suivante : http://www.youtube.com/watch?v=XbInceML7Ms.

b) Cela fait, voici l'analyse que j'ai été conduit à rédiger.

Quels systèmes didactiques ?

1. Il convient en premier lieu de s'arrêter sur la *nature* de l'objet à analyser et sur la *fonction didactique* qu'on peut lui prêter. Il ne semble pas qu'il s'agisse, par exemple, d'une vidéo d'un cours de guitare adressé à des personnes qui, quoique se situant hors champ, feraient face à l'acteur $\ddot{y}$ de la situation observée agissant comme professeur de guitare, c'est-à-dire comme un y d'une certaine sorte. Car l'exposé vidéoscopé serait alors, semble-t-il, bien trop rapide, bien trop dense et dépourvu d'assez de redondances pour constituer un fragment d'un cours raisonnable qui, par la nature même de son contenu, ne saurait s'adresser qu'à des débutants absolus.

2. Bien plutôt, il semble qu'il s'agisse, à l'instar d'un exposé sur papier (illustrée d'images, photos ou dessins), d'un exposé en vidéo qui peut être utilisé *en autodidaxie* par une personne x opérant dans un système autodidactique $S(x\,;\,\varnothing\,;\,\heartsuit)$. Comme avec un exposé sur papier, en effet, il n'existe pas pour x de possibilité d'*interaction didactique en temps réel* avec la personne $\ddot{y}$ qui s'exprime dans la vidéo. Pour cette raison, *il n'existe pas*, à proprement parler, de système didactique $S(x\,;\,\ddot{y}\,;\,\heartsuit)$. En fait, l'exposé de $\ddot{y}$, soit $\ddot{E}$, porte en lui des éléments praxéologiques, $\heartsuit_{\ddot{E}}$, que la personne x peut se donner comme enjeu didactique et qu'elle peut alors étudier soit seule, soit avec l'aide d'un y – qui peut être un simple « aide à l'étude » – avec lequel elle constituerait alors le système didactique $S(x\,;\,y\,;\,\heartsuit_{\ddot{E}})$. Comme il en va avec un exposé sur papier, dont x peut reprendre indéfiniment l'examen, x peut ici visionner indéfiniment l'exposé en vidéo, dans un but d'autodidaxie ou d'étude plus ou moins fortement aidée. Bien entendu, comme avec un exposé écrit, x peut accomplir *bien d'autres gestes didactiques* afin d'étudier $\heartsuit_{\ddot{E}}$: l'étude de $\heartsuit_{\ddot{E}}$ excède *a priori* l'étude de $\ddot{E}$ – nous allons y revenir.

Quelles praxéologies « enseignées » ?

3. Il convient maintenant de préciser ce que nous avons noté $\heartsuit_{\ddot{E}}$. Pour aider le lecteur, on reproduit ci-après le texte de l'enregistrement vidéo à analyser.

Alors pour ce cours vous avez besoin d'une guitare électrique ou acoustique, comme ce modèle, ainsi que d'un médiator, et il faut que la guitare soit bien accordée, de préférence.

Ce qui est vraiment très intéressant dans la guitare, c'est que c'est un instrument harmonique, donc où on peut jouer des accords.

Alors bien sûr la guitare est composée de six cordes, *mi*, *la*, *ré*, *sol*, *si*, *mi* ; et quand on joue en accord ces six cordes, on est d'accord pour dire que ce n'est pas très joli. Donc l'intérêt de la guitare réside dans ses cases, et le fait que lorsqu'on met les doigts au bon endroit dans la bonne case on peut faire des accords majeurs. D'accord ?

Ici par exemple je vais vous expliquer comment on fait le *do* majeur, qui est un peu l'accord qu'on apprend toujours au début. Avant d'apprendre ce premier accord, il faut bien tenir sa guitare et pour ça on va réaliser une pince entre le pouce qui passe derrière le manche et le haut de la paume de la main qui tient l'autre côté… D'accord ? Une sorte de pince, comme ceci… Ensuite, on va prendre son annulaire et le mettre sur la troisième case de la deuxième corde : donc deuxième corde, un, deux, troisième case. Sur la troisième corde, le majeur était sur la deuxième case, comme vous le voyez ; on va laisser sonner à vide, comme on dit, la quatrième corde, pour mettre l'index sur la première case de la cinquième corde. On compte un, deux, trois, quatre, cinq, six ; donc cinquième corde, première case ici ; et lorsque nous grattons… nous entendons l'accord de *do* majeur, puisque chaque doigt est positionné de manière à ce que l'accord soit parfait.

L'intérêt, l'intérêt de la guitare, c'est que, quand on additionne deux, trois accords majeurs et mineurs qu'on apprend, à force de les enchaîner on finit finalement par pouvoir faire ce qu'on appelle des grilles d'accords… Ces grilles d'accords sont utilisées dans la plupart des chansons, c'est souvent les mêmes accords qui reviennent. Donc on peut rapidement jouer des chansons, quitte à chanter par dessus, grâce à ces enchaînements d'accords… parfaits, majeurs et mineurs.

---

4. L'horizon praxéologique de l'épisode observé est le type de tâches *T* suivant : « jouer [à la guitare] des chansons » (plutôt d'ailleurs que « s'accompagner à la guitare en chantant des chansons »). Ce qu'affirme alors *ÿ*, c'est que la technique τ à mettre en œuvre pour cela appelle l'accomplissement de tâches de différents types consistant à produire, à la guitare, des « accords parfaits, majeurs et mineurs », qu'il faut en outre « enchaîner ».

5. Quel est le bloc technologico-théorique [θ / Θ] relatif à [*T* / τ] ? Il repose sur une réalité sociale non discutée : les « grilles d'accords sont utilisées dans la plupart des chansons », où ce sont souvent « les mêmes accords qui reviennent ». Cela justifie la technique τ : en enchaînant adéquatement de tels accords on peut jouer « la plupart des chansons ». Qu'il en soit ainsi ne doit pas surprendre : « on est d'accord » pour dire que, « quand on joue en accord » les six cordes d'une guitare, ce qu'on entend n'est pas « joli ». Là se cache une

partie de la théorie Θ : les sons sont jolis ou non, il y a un accord général à ce propos (ce qui est évidemment fort discutable).

6. Le discours technologique de *ÿ* use de nombreuses notions qui, parce qu'elles semblent aller de soi dans la bouche de *ÿ*, peuvent donner l'impression d'un univers certain, non problématique et, pour le dire nettement, largement *naturalisé*. Ainsi en va-t-il notamment dans l'introduction de son exposé, qui évoque comme s'ils étaient bien connus les types d'objets suivants : guitare électrique, guitare acoustique, médiator, guitare (bien) accordée, instrument harmonique, accords. Il en va de même des « six cordes » de la guitare et des sons qu'elles émettent. Le bloc technologico-théorique apparaît ainsi comme ce que l'on ne peut que supputer – sans le connaître davantage – derrière cet univers assuré : il est présent *in absentia*.

7. On peut imaginer qu'il s'agit là d'une conséquence d'une certaine technique didactique mise en œuvre par *ÿ* pour faire qu'un *x* potentiel s'engage sans plus de façon, si peu que ce soit, dans l'étude du seul type de tâches « enseigné » par *ÿ* : « faire » un accord « de *do* majeur », type de tâches T_{Do} que *motive* (a) au plan praxéologique, la technique τ relative à *T*, et (b) au plan pédagogique, le fait qu'il serait « un peu l'accord qu'on apprend toujours au début ». Notons que le type de tâches consistant à *reconnaître* (à l'oreille) un accord de *do* majeur *n'est pas* envisagé. Seule la *production* d'un tel accord est prise en charge dans l'épisode observé : ce n'est pas un *son* qui est « enseigné » mais une technique de production d'un son, lequel ne se reconnaît (ici) qu'à sa manière d'être produit.

Quelles praxéologies didactiques et quels apprentissages ?

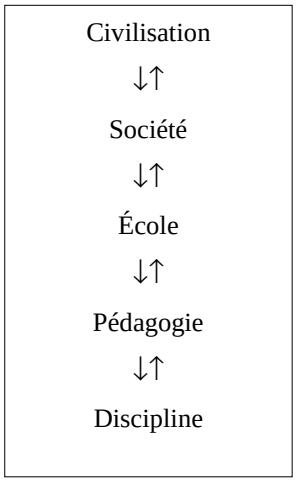
8. Alors que la technique τ relative à *T* est simplement évoquée (pour être invoquée au plan technologique), la technique τ_{Do} relative à T_{Do} est, elle, montrée et « démontrée », ce pour quoi l'exposé en vidéo a un avantage net par rapport à l'exposé sur papier. L'essentiel de la vidéo est en effet consacré à *montrer* la technique τ_{Do}. Cette monstration, qui associe image dynamique et son, procède nettement d'une volonté de simplification, que trahit au reste une petite omission touchant la désignation des cordes (ce que *ÿ* nomme première corde peut être aussi bien regardé comme la sixième corde lorsque les cordes sont comptées en partant du bas : voir par exemple http://six.cordes.over-blog.com/article-5475931.html). Surtout, la monstration réalisée produit un effet d'évidence sans doute trompeur : saisir le « manche », faire « une pince » avec sa main gauche, etc., sont autant de gestes dont la maîtrise n'est sans doute pas immédiate. On a là un piège classique de la « pédagogie de l'ostension » : *ÿ* crée une impression de simplicité qui conduit *x* (et *ÿ*) à croire qu'il sera facile à *x* de reproduire ce que *ÿ* prétend montrer. « Lorsque nous grattons, dit ainsi *ÿ*, nous entendons l'accord de *do* majeur, puisque chaque doigt est positionné de manière à ce que l'accord soit parfait. » Voire !

9. Ce que peut apprendre *x* à partir de *Ë* dépend certes de *Ë* mais dépend aussi, et à certains égards *surtout*, des gestes (auto-)didactiques qu'accomplira éventuellement *x* à l'endroit de ♥*Ë*. En d'autres termes, *Ë* n'est qu'une condition *potentielle* d'apprentissages dont l'actualisation dépend de l'engagement didactique de *x* à l'endroit des enjeux didactiques inscrits dans *Ë*. On peut imaginer *par exemple* que *x* commence par enquêter sur au moins certains des termes employés par *ÿ*, notamment sur la notion d'*accord* ou sur celle d'*instrument harmonique*. Dans ce dernier cas, il découvrira peut-être, en consultant simplement l'article « Harmonie » de l'encyclopédie *Wikipédia*, que, « lorsqu'on dit qu'un instrument est "harmonique", cela signifie que cet instrument est capable de jouer au moins deux sons simultanés » (comme il en va de la guitare ou du piano, et au contraire du violon ou de la clarinette, appelés instruments « mélodiques ») ; et encore que « le mot harmonie renvoie généralement aux simultanéités sonores dans la musique » mais aussi, plus étroitement, à la « science des accords ». Ainsi lira-t-il peut-être que « dans son sens le plus étroit, et plus précisément en musique classique, le mot harmonie désigne la discipline étudiant la disposition et l'enchaînement des accords ». Il lira aussi que « le mot accord, en tant que concept renvoyant à un ensemble de sons simultanés, ne semble pas antérieur au XVI^e^ siècle », ce qui peut instiller en lui une attitude critique à l'endroit des « évidences » distillées par *ÿ*.

10. Le même *x* pourra aussi décider d'ignorer ses ignorances à cet égard et tenter d'apprendre sans plus attendre, à partir de *Ë*, à produire un accord de *do* majeur selon la technique τ_{Do}. Pour cela, il pourra se procurer « une guitare acoustique bien accordée » ainsi qu'un médiator et, *mimant* ce que *ÿ* décrit et montre à travers *Ë*, s'efforcer de maîtriser la technique τ_{Do} « nue », traitée en simple recette (c'est-à-dire sans technologie explicite, quoique non sans théorie – celle du « joli » son). On peut imaginer aussi que, ne parvenant pas à se procurer la guitare en apparence indispensable, *x* décide tout de même de se bricoler un dispositif matériel mimant le système cordes/cases d'une guitare pour avancer tout de même dans la maîtrise de τ_{Do}. D'aucuns sans doute verront en cette manœuvre didactique le danger d'un apprentissage à demi sauvage, déréglé, ou du moins insuffisamment régulé faute de *y* « correcteur ». On répondra que le danger était déjà présent dans la première situation (l'usage par *x* d'une guitare bien accordée, avec ses six cordes et ses cases, pour mimer *ÿ*) et qu'elle est en fait présente dans *Ë* lui-même, nonobstant les vertueux efforts de *ÿ*.

Conditions et contraintes

11. L'analyse des contraintes et des conditions sous lesquelles l'exposé *Ë* a été produit et est susceptible d'être utilisé comme ressource didactique permet de mettre en perspective ce qui précède. Rappelons d'abord la structure de l'échelle des niveaux de co-détermination didactique.



12. Le premier paquet de conditions et contraintes qu'il convient de mentionner est évidemment celui dont se nourrit la tradition immémoriale *du didactique* – de ce fait que quelqu'un envisage de faire quelque chose pour que quelqu'un apprenne quelque chose. L'exercice de cette tradition de *l'intervention didactique dans la cité* se réalise ici dans des conditions et sous des contraintes « ultramodernes », engendrées par l'existence de la vidéo, du Web et de sites qui hébergent des vidéos et permettent d'y accéder, tel YouTube. Ce changement dans la *civilisation* crée des conditions qui élargissent les possibilités d'intervention didactique : au lieu d'un livre publié, projet nécessairement lourd et souvent inabouti, voici une vidéo de 2 minutes 8 secondes rendue publique sans coup férir et visionnée, au moment où ces lignes sont écrites, 188 598 fois. Il en résulte dans nos sociétés ce qui semble bien être une dynamique dont on ne sait si elle se maintiendra longtemps ou s'épuisera vite : la métamorphose possible de chacun de nous en une effigie de professeur, en un professeur au petit pied dépourvu des moyens les plus usuels de l'intervention didactique professorale.

13. Si la *pédagogie* ostensive mise en œuvre par *ÿ* est, on l'a noté, étroitement classique, la question des conditions et contraintes ayant leur siège au niveau de l'*école* se pose. Formellement, *ÿ* semble ici ne s'autoriser que de lui-même : il n'apparaît pas comme le mandataire d'une « institution mandante » qui l'aurait désigné comme « institution enseignante » auprès d'une certaine « institution enseignée » (pour utiliser le vocabulaire de Guy Brousseau). C'est là l'effet, au niveau de l'école, de conditions ayant leur siège aux niveaux de la civilisation et de la société : le faible coût institutionnel et personnel de l'intervention didactique par le truchement d'un exposé mis en ligne et, en particulier, d'un exposé en vidéo. Cette liberté apparente a toutefois un prix praxéologique et didactique que l'on a souligné. N'étant pas autorisé par une école dûment instituée, *ÿ* doit en effet s'autoriser d'une institution établie, présente dès lors dans son exposé comme un bloc inentamable : « la guitare ». La conséquence en est que les objets présentés – accords, accord de *do*

majeur, etc. – sont tenus hors de toute problématisation qui conduirait à les interroger explicitement sur leur raison d'être, leur nature, leur fonctionnement. Nous sommes par cela même loin de la haute tradition de l'enseignement scolaire, dont le premier principe est de tenir bon sur la question de la problématicité du réel étudié. Cela dit, *ÿ* n'en reste pas moins un jeune Occitan fort sympathique.

---

c) Plusieurs additifs ou commentaires mériteraient d'être apportés. Je m'arrêterai sur un aspect central de l'analyse : la *pédagogie de l'ostension* – qui limite les frais didactiques mais en ne faisant faire, souvent, que de fausses économies. Je me réfère ici à un entretien avec l'ethnomusicologue franco-israélien Simha Arom (né en 1930) publié dans l'ouvrage dirigé par Ruth Scheps, *La science sauvage. Des savoirs populaires aux ethnosciences* (Seuil, 1993) sous le titre « Musiques traditionnelles ». J'en extrais ceci, qui se rapporte au travail de terrain d'Arom chez les Pygmées :

> … un jour, aussitôt après avoir enregistré une formule de tambour qui me semblait complexe, je l'ai transcrite, certain de l'avoir notée correctement. Entouré de plusieurs pygmées, tous musiciens chevronnés, j'ai frappé cette formule sur le tambour. Ils m'ont fait de larges sourires, en me laissant entendre que « ce n'était pas ça » ; or j'étais sûr que « c'était ça »… Au bout de nombre d'essais, tous aussi infructueux les uns que les autres, j'ai soudain compris que leur réponse ne concernait pas du tout la formule rythmique que je jouais, mais l'endroit de la peau du tambour que je frappais. (p. 197)

Que faut-il « mimer » de ce qu'on vous laisse voir – mais que vous regardez mal – pour le reproduire de façon « authentique » ? Telle est la question. Dans le cas précédent, l'ethnomusicologue ressemble à un bon élève « occidental » pris en défaut parce qu'il a détaché le son à produire des contingences *apparentes* de sa production : il ne frappe pas « au bon endroit ». Mais sa science de la musique lui permet alors de penser la difficulté rencontrée et de la contourner :

> Leur refus était dû à la sonorité de mes frappes et non à leur espacement dans le temps. En d'autres termes, ils réagissaient au paramètre *timbre* là où je m'attendais à ce qu'ils se prononcent sur le *rythme*. Afin de vérifier l'adéquation de ce dernier, il convenait dès lors de neutraliser le premier. Pour ce faire, l'idée m'est venue de frapper la même formule sur le bord de la table de camping autour de laquelle nous étions assis. Tous ont alors acquiescé par des hochements de fête, signifiant : « Nous y voilà ! » (p. 197)

Le réel est compliqué ! Pour qui n'aurait pas en tête ce qu'est le timbre, je reproduis les premières lignes de l'article "Timbre musical" de l'encyclopédie *Wikipedia* (en espagnol) :

> El **timbre** es la cualidad del sonido que permite distinguir la misma nota producida por dos instrumentos musicales diferentes. A través del timbre somos capaces de diferenciar dos sonidos de igual frecuencia fundamental (o tono) e intensidad.

3. Types de textes

a) Les textes sur lesquels on peut faire porter une analyse didactique relèvent de *types* divers. Le type le plus familier est le compte rendu d'observation d'une situation réellement observée. En voici un fragment, que j'extrais du livre *Un plaisir de collège* de Luc Cédelle (Seuil, 2008).

Les couleurs en 6e

« Nous allons travailler le mélange. Comment, à partir de seulement deux couleurs, obtenir le plus de couleurs possible ? On va commencer par s'installer. » Remue-ménage général mais, comme pour un équipage de navire, dans un ordre fixé à l'avance. Des responsables pour tout : pour les pinceaux, les pots, la peinture, le papier, l'eau... Du papier bon marché est disposé sur les tables pour les protéger et de petites feuilles de papier à dessin sont distribuées. Les gros tubes d'acrylique passent de main en main, parfois pressés un peu généreusement – « Hé, je vous rappelle que ça coûte cher… » – pour déposer à chaque place, à même la table, deux noix de couleur.

Le groupe est divisé en trois parties, chacune disposant d'un jeu de couleurs différent : jaune et bleu d'un côté, jaune et rouge au milieu, bleu et rouge de l'autre côté. La consigne est donnée : « Avec ces deux couleurs, vous allez chercher à obtenir douze couleurs différentes, ou douze nuances si vous préférez. Bien entendu, sans compter les deux couleurs d'origine. » Scepticisme général chez les petits 6e : objections, questions... Mais, rapidement, on n'entend plus que les pinceaux tinter dans les pots. Et différentes méthodes se révèlent. Certains partent d'une couleur pure, du jaune par exemple, pour y ajouter précautionneusement une infime touche de bleu et démarrer ainsi, tache après tache, leur transition du jaune-vert au vert-jaune, etc. D'autres mélangent plus hardiment. Au bout d'un moment, les aventureux et les prudents en sont au même point : à partir de cinq ou six nuances obtenues, l'affaire se complique.

---

b) Un deuxième type de texte décrit une situation *à faire advenir* ou qui pourrait advenir : ainsi en va-t-il avec les *scénarios didactiques* de séances, qui nous sont également familiers. Dans ce cas, l'utilisateur visé par l'auteur du texte est censé *excrire* de celui-ci une certaine *organisation didactique* en vue de la réaliser en quelque institution. Voici de cela un exemple, proposé lors d'un examen du type évoqué plus haut, où l'institution visée est la famille.

Comment aider l'enfant [élève de CP] à relire ?

◗ S'il connaît par cœur la phrase à relire, modifier la tâche

En début d'année, quand les parents demandent à l'enfant d'ouvrir son livre et de lire la (ou les) phrase(s) étudiée(s) en classe, ils sont parfois surpris de le voir s'exécuter sans même jeter un œil sur sa page : il la sait par cœur, pourquoi ferait-il semblant de la décoder ?

Que faire dans ce cas-là ? Plusieurs solutions peuvent être retenues :

– lui faire « relire » la phrase en pointant chaque mot avec son doigt et en vérifiant qu'il associe bien le mot prononcé et le mot désigné (la technique du doigt qui accompagne le regard et la voix ne doit pas être systématique mais c'est néanmoins une technique de bon sens dont on aurait tort de se priver : elle met en scène de manière pertinente les relations entre oral et écrit, encore mal assurées en début d'année) ;

– lui demander de faire voir où se trouve dans la phrase un mot donné par l'adulte ;

– relire le début de la phrase, s'interrompre et demander à l'enfant d'indiquer le mot qui suit l'endroit où on s'est arrêté ;

– lui faire lire le dernier mot de la phrase (en lui demandant de le montrer), puis l'avant-dernier et ainsi de suite (lecture à reculons) ;

– masquer la phrase par une bande de papier et la démasquer progressivement pour qu'elle apparaisse mot par mot, puis, éventuellement, syllabe par syllabe. Faire relire ensuite de manière fluide ;

– suggérer à l'enfant de relire en commettant volontairement une erreur que l'adulte devra détecter : permutation, oubli ou ajout de mot, inversion de syllabe, changement de lettre... Puis inverser les rôles : c'est l'adulte qui se trompe et l'enfant qui détecte (sourire garanti) !

◗ S'il a un peu de mal, l'aider beaucoup

…

Extrait de Roland Goigoux et Sylvie Cèbe, *Apprendre à lire à l'école. Tout ce qu'il faut savoir pour accompagner l'enfant* (Paris, Retz, 2008).

Voici maintenant une analyse didactique de ce texte, proposée à titre de corrigé d'examen.

Le texte examiné doit être considéré de deux points de vue solidaires. D'une part, ce texte est porteur d'un enjeu didactique possible pour les parents Y d'un enfant x élève de CP : son ambition est de nourrir un système autodidactique $S(Y ; \varnothing ; \partial)$, le symbole ∂ (« d rond ») désignant ici une certaine praxéologie didactique que les auteurs du texte s'efforcent de faire connaître aux parents concernés. Sur le fonctionnement possible du système $S(Y ; \varnothing ; \partial)$ afin d'excrire la praxéologie ∂ inscrite par les auteurs dans leur texte, celui-ci est muet : peut-être doit-on comprendre en ce cas que, pour ces auteurs, l'excription de ∂ ne devrait pas poser à Y de problème particulier. D'autre part, et conséquemment, le texte se réfère à un possible système didactique auxiliaire (SDA) du système didactique principal (SDP) qu'est une classe de CP. Ce SDA peut être écrit $S(x ; Y ; \heartsuit)$, où x est un enfant élève de CP et où Y sont ses parents. L'enjeu didactique $\heartsuit$ est une certaine praxéologie de « relecture », $[T/\tau/\theta/\Theta]$, où le type de tâches T consiste à *dire* (à haute voix) *des phrases écrites déjà étudiées en classe*, tandis que la technique τ pour ce faire consiste « simplement » à *lire* ces phrases écrites. La praxéologie ∂ adressée à Y se veut alors une réponse à la question suivante : que peut faire Y s'il arrive que x substitue à la technique τ une autre technique, τ^*, consistant, non pas à *lire* les phrases qui lui sont présentées de nouveau, mais à se les *remémorer* après les avoir « apprises par cœur » en classe ? Quelles conditions Y peut-il créer qui contraindraient x à lire réellement ces phrases ? Un premier ensemble de conditions consiste à imposer à x de dire la phrase « en pointant chaque mot avec son doigt » au fur et à mesure de sa lecture supposée, tandis que Y vérifie que x « associe bien le mot prononcé et le mot désigné ». Cette technique didactique (pour Y) contraint x à adopter une technique de lecture (où le doigt accompagne « le regard et la voix ») qui semble critiquée, sans doute comme trop naïvement mécaniste ; aussi les auteurs en proposent une justification, minimale au plan technologique, mais explicite – cette technique, avancent-ils, « met en scène de manière pertinente les relations entre oral et écrit, encore mal assurées en début d'année ». D'une manière générale, la technique didactique proposée à Y par les auteurs revient à changer momentanément *le type de tâches* T que x devra accomplir, de façon qu'une tâche t^* du nouveau type T^* ne puisse être accomplie si x n'effectue pas un certain repérage dans la phrase écrite, ce repérage étant lui-même censé ne pouvoir se réaliser qu'à travers la *lecture* par l'enfant d'une certaine partie de la phrase. Outre le type T_1^* déjà précisé, ils proposent successivement les types de tâches suivants : x doit montrer « où se trouve dans la phrase un mot

donné par l'adulte » (T_2^*) ; *Y* lit à haute voix le début de la phrase puis s'interrompt, *x* devant alors montrer « le mot qui suit l'endroit où on s'est arrêté » (T_3^*) ; *x* doit lire la phrase « à reculons » en prononçant et en montrant simultanément le dernier mot, puis l'avant-dernier, etc. (T_4^*) ; *Y* dévoile progressivement les mots ou les syllabes dont la succession constitue la phrase et *x* doit les lire au fur et à mesure de leur dévoilement (T_5^*) ; *x* doit lire la phrase en commettant une erreur volontaire que *Y* devra identifier (T_6^*) ; *Y* doit lire la phrase en commettant une erreur volontaire que *x* devra identifier (T_7^*). À l'instar du type *T* lui-même, ces différents types de tâches participent du *moment du travail de la technique de lecture*, qu'ils mettent pour cela en jeu dans des conditions inhabituelles. De tels exercices de « lecture » peuvent paraître arides, comme l'est souvent le travail de la technique ; malgré cela, soulignent les auteurs, le type de tâches T_7^*, qui inverse les rôles habituels, devrait susciter une certaine jubilation chez *x*. Bien entendu, on peut toujours imaginer (même si une telle issue paraît très improbable) que la technique didactique préconisée ne vienne pas à bout de la propension de *x*, mis devant une tâche *t* du type *T*, à recourir à la technique τ*, alors même que, par ailleurs, *x* aurait appris très rapidement à accomplir fort bien les tâches des types T_1^* à T_7^*.

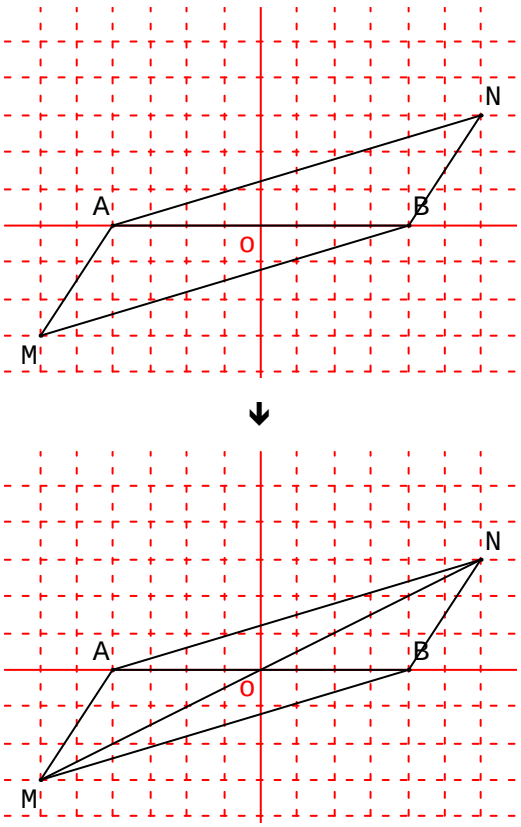
---

b) Un troisième type de textes décrit une certaine *organisation praxéologique* ♥ présentée comme enjeu didactique possible d'un certain type de systèmes didactiques. On retrouve ici le cas rencontré avec la vidéo analysée plus haut : le « texte » ne décrit pas une situation didactique observée ou à créer : il est un exposé *E* d'une organisation praxéologique ♥ face à laquelle il se situe comme une aide à l'étude possible d'une étude possible. Ce type de textes comporte des sous-types culturellement bien connus – recettes de cuisine, modes d'emploi, patrons de couture, etc. Pour cela même, il y a une plus grande facilité à rencontrer des textes de ce troisième type, en sorte qu'on vu fleurir dans les copies d'étudiants l'analyse de recettes ou de modes d'emploi. L'expérience et l'analyse aidant, je demande désormais aux étudiants d'éviter ces rencontres du troisième type, qui peuvent certes conduire à une riche analyse *praxéologique* mais dont le traitement didactique relève moins de l'analyse que de l'*ingénierie* : comment utiliser la vidéo analysée plus haut pour (faire) apprendre l'accord de *do* majeur par exemple ?

INGÉNIERIE DIDACTIQUE

1. Le théorique et l'expérimental en géométrie

a) Les développements qui suivent s'inscrivent dans la perspective ouverte lors de la séance précédente à propos du problème d'ingénierie didactique des PER formulé en ces termes : *Que pourrait être un scénario de PER qui fasse vivre les probabilités comme modélisant la variabilité statistique dans une classe de 3e aujourd'hui ?* À titre introductif, je voudrais pourtant revenir ici sur un cas bien connu : celui de la *géométrie*. La géométrie a pour objet l'espace $\mathscr{E}$ – l'espace autour de nous. Cet objet est de nature physique ; en dernier ressort, c'est donc *l'expérimentation* qui décide de ce qui y est *vrai* ou *faux*. C'est par exemple l'expérimentation (voir ci-après) qui nous dira s'il est vrai que, dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.



b) L'objet de la géométrie *expérimentale* est d'établir, par l'expérimentation, les propriétés de l'espace. L'objet de la géométrie *théorique* est d'organiser fructueusement les propriétés de l'espace sous une forme hypothético-déductive : ainsi la *théorie géométrique disponible* (TGD) devra-t-elle permettre de décider si tel énoncé θ est *déductible*, c'est-à-dire si c'est un *théorème* de ladite théorie. S'il en est ainsi, cet énoncé est alors *vrai* dans l'espace (si la théorie est juste), ce qu'on peut alors vérifier par l'expérimentation. Avec des notations classiques en logique mathématique, on a ainsi l'implication suivante :

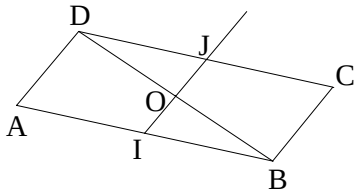
$$\vdash_{\mathrm{TGD}} \theta \Rightarrow \models_{\mathscr{E}} \theta.$$

Bien entendu, on doit avoir aussi la réciproque :

$$|=_{\mathscr{E}} \theta \Rightarrow |\!-_{TGD} \theta.$$

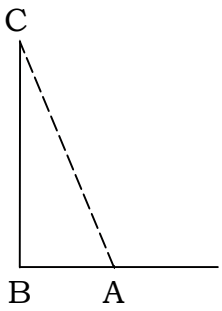
En d'autres termes, si θ est vrai dans $\mathscr{E}$, alors θ doit être déductible dans la TGD (faute de quoi la TGD sera à compléter). Dans le cas de l'énoncé θ relatif aux diagonales d'un parallélogramme, on peut le déduire comme suit (on notera que le travail déductif effectué ci-après *n'est pas* homologue au travail expérimental évoqué ci-dessus).

Dans la figure ci-après, ABCD est un parallélogramme, I est le milieu de [AB] et (IJ) est parallèle à (BC).



D'après le 2e théorème des milieux, dans le triangle ABD, (IJ) coupe [BD] en son milieu O ; par suite, dans le triangle BDC la droite (OJ) coupe [CD] en son milieu, J. D'après le 3e théorème des milieux, dans le triangle ABD, on a IO = AD/2 et, dans le triangle BDC, on a OJ = BC/2. Comme AD = BC, on a IO = OJ : O est donc le milieu de [IJ] et on en conclut que la diagonale [BD] passe par le milieu de [IJ], qui est aussi le milieu de [BD]. On montre de même que la diagonale [AC] passe par le milieu de [IJ], O, qui est aussi le milieu de [AC]. Les deux diagonales se coupent donc en leur milieu.

c) En règle générale, on peut *mesurer* une grandeur. Mais, dès lors qu'on dispose d'une théorie de l'espèce de grandeurs à laquelle elle appartient, on peut en général la *calculer* – moyennant le mesurage d'autres grandeurs. Considérons l'exemple élémentaire suivant. On pose une échelle [AC] de 8,2 m de longueur contre un mur ; à quelle hauteur BC arrive-t-elle si AB = 3,2 m ? Si l'on ne peut pas mesurer [BC], on peut *calculer* sa longueur : d'après le théorème de Pythagore, on a en effet :



$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{8{,}2^2 - 3{,}2^2}\ \text{m} \approx 7{,}4\ \text{m}.$$

C'est là le miracle de la géométrie : les longueurs que l'on ne peut mesurer – la distance de la Terre à la Lune, par exemple –, on peut les calculer. On va voir que tout cela reste vrai avec les fréquences et les probabilités.

2. Le cas des probabilités (suite)

a) De même qu'on a parlé de géométrie expérimentale, on peut parler de *statistique expérimentale*. Imaginons par exemple que nous disposons de

deux générateurs aléatoires de nombres entiers compris entre 1 et 4 dont on suppose que, sur de longues séries, ils donnent à peu près le même nombre de sorties égales à 1, à 2, à 3 et à 4, ce qu'on énoncera encore ainsi : les *fréquences théoriques* des sorties de 1, 2, 3, 4 sont égales à 0,25. Lors d'une sortie, la somme des nombres obtenus varie entre 2 et 8. Quelle sera la fréquence d'obtention de la somme 6 sur une longue série de sorties ? Pour répondre, on peut aujourd'hui *simuler* une telle expérimentation (ci-après).

Rang	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4
19980	3	3	6	0,18253253
19981	3	4	7	0,1825234
19982	1	4	5	0,18251426
19983	2	3	5	0,18250513
19984	2	4	6	0,18254604
19985	2	4	6	0,18258694
19986	2	2	4	0,1825778
19987	1	4	5	0,18256867
19988	4	1	5	0,18255954
19989	1	3	4	0,1825504
19990	3	4	7	0,18254127
19991	4	2	6	0,18258216
19992	2	4	6	0,18262305
19993	4	4	8	0,18261391
19994	1	1	2	0,18260478
19995	4	2	6	0,18264566
19996	3	4	7	0,18263653
19997	4	1	5	0,18262739
19998	4	3	7	0,18261826
19999	2	1	3	0,18260913
20000	2	4	6	0,18265

Sur le tableau précédent, obtenu avec Excel, les colonne 1 et 2 donnent les sorties des deux générateurs aléatoires, la colonne 3 la somme des sorties, enfin la colonne 4 la fréquence de l'obtention de la somme 6. L'échantillon est de taille 20 000 ; la fréquence obtenue est 0,18265.

b) Qu'en est-il de la « fréquence limite » postulée ? Comment passer à une statistique *théorique*, qui nous permette de la *calculer* ? Lors de la séance précédente, on a vu, en suivant Gnedenko et Khintchine, une première théorisation permettant un calcul rudimentaire très efficace dans les cas simples. Désignons par X et Y respectivement les sorties affichées par le premier et par le second générateur aléatoire. La somme $X + Y$ est égale à 6 dans trois cas : $X = 2$ et $Y = 4$; $X = 4$ et $Y = 2$; $X = 3$ et $Y = 3$. Supposons effectués 10 000 tirages ; dans un quart des cas, soit dans 2500 cas, on a $X = 2$; sur ces 2500 cas, on a $Y = 4$ dans un quart des cas, soit dans 625 cas. On observera donc 625 fois les sorties simultanées $X = 2$ et $Y = 4$. On observera de même 625 fois $X = 4$ et $Y = 2$ et encore 625 fois les sorties $X = 3$ et $Y = 3$. La somme $X + Y$ sera donc égale à 6 dans $3 \times 625 = 1875$ cas sur

10 000 : la fréquence d'apparition d'une somme égale à 6 est donc 0,1875 ou 18,75 %.

c) Les résultats de la simulation évoquée ci-dessus montrent que, au bout de 20 000 sorties, la fréquence *empirique observée*, égale en l'espèce à 0,18265, est proche de la fréquence *théorique calculée*, 0,1875, mais n'en est pas *très* proche : l'erreur relative, soit,

$$\frac{|0{,}18265 - 0{,}1875|}{0{,}1875}$$

est de l'ordre de 3 %. On peut réduire cette erreur en multipliant les échantillons (ce qui se fait d'un clic avec Excel). On a ainsi, ci-après, les fréquences observées sur 50 échantillons de taille 20 000, les valeurs étant rangées par ordre croissant (elles vont de 0,1819 à 0,19535).

0,1819 ; 0,18275 ; 0,1832 ; 0,1834 ; 0,18425 ; 0,18445 ; 0,18505 ; 0,1851 ; 0,18515 ; 0,18525 ; 0,1854 ; 0,18585 ; 0,1859 ; 0,186 ; 0,1863 ; 0,1864 ; 0,1865 ; 0,1867 ; 0,1868 ; 0,18725 ; 0,1873 ; 0,18735 ; 0,1874 ; 0,1874 ; 0,1874 ; 0,18765 ; 0,1877 ; 0,1878 ; 0,18795 ; 0,1881 ; 0,1881 ; 0,1881 ; 0,18835 ; 0,1885 ; 0,18855 ; 0,1887 ; 0,1889 ; 0,1891 ; 0,1892 ; 0,18925 ; 0,18925 ; 0,18965 ; 0,18995 ; 0,19 ; 0,1908 ; 0,1913 ; 0,19135 ; 0,19155 ; 0,1918 ; 0,19535

La *moyenne* des fréquences *empiriques* (qui est également une fréquence empirique) est alors égale 0,187548, ce qui est beaucoup plus proche de la fréquence *théorique calculée*, 0,1875.

3. Les probabilités et la statistique théorique

a) La définition de la notion de probabilité comme « fréquence limite » (ou fréquence théorique) est en fait traditionnelle. J'ai commencé à le montrer lors de la séance précédente de ce séminaire. Je voudrais ici ajouter quelques pièces au dossier. Je citerai d'abord l'ouvrage de Yakov G. Sinai intitulé *Probability theory : An introductory course* (Springer-Verlag, 1992). Dans le passage qui suit, $\mathcal{F}$ désigne une σ-algèbre de parties de Ω, c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω tel que : 1) $\Omega \in \mathcal{F}$; 2) si $C \in \mathcal{F}$ alors $\Omega \setminus C \in \mathcal{F}$; 3) si $C_1, \ldots, C_k, \ldots \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$.

> We now return to the general case and turn out our attention to the central concept of our theory, the concept of probability. We noted earlier that probability is a special case of measure. Now consider an arbitrary measurable space $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definition 1.7. A probability measure is a function P, defined on $\mathcal{F}$, which satisfies the following conditions:

1) $P(C) \geq 0$ for any $C \in \mathcal{F}$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) if $C_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ and $C_i \cap C_j = \varnothing$, then

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i).$$

The number $P(C)$ is called the probability of the event C.

We now discuss the meaning of properties 1) – 3). The concrete idea of probability of an event or a phenomenon or an occurrence is the frequency of occurrence of this event, or the "chances" of its taking place. Since the frequency of occurrence is always non-negative, a probability must be non-negative. Property 2) means that when we consider an experiment whose outcome can be any point $\omega \in \Omega$ we are dealing with a situation where some outcome of the experiment will be observed. Sometimes property 2) is called the normalization property. Those events C for which $P(C) = 1$ are called certain (they have a 100% chance of occurrence). Since $\Omega = \Omega \cup \varnothing$ and $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$, $P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$, and so $P(\varnothing) = 0$. Those events C for which $P(C) = 0$ are called impossible (0% chances of occurrence). The meaning of property 3) will be developped gradually. It is called the property of countable additivity, or σ-additivity of probabiliy measures. It is fundamental to general measure thory. Properties 1) – 3) show that probabilities are normed measures.

Definition 1.8. The triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is called a probability measure. (pp. 6-7)

b) Voici maintenant un extrait du chapitre 2, intitulé « La probabilité », du traité classique d'Alfred Rényi, *Calcul des probabilités* (Dunod, 1966) où l'on retrouve la manière d'élaborer la théorie des probabilités comme modélisant les fréquences « limites ».

---

§ 3. ALGÈBRES DE PROBABILITÉ

La théorie que nous développerons dans ce livre a été fondée par A. N. Kolmogorov. Elle est la base du développement moderne du calcul des probabilités. Dans cette théorie on part habituellement de l'hypothèse suivante : à chaque résultat possible d'une épreuve (ou du moins à chacun des résultats envisagés), autrement dit à chaque élément d'une algèbre d'événements, correspond un nombre : la probabilité de l'événement considéré. Si nous effectuons une épreuve n fois et si l'événement A se produit k fois, on a

$$0 \leq k \leq n, \text{ d'où : } 0 \leq k/n \leq 1 ;$$

la fréquence relative d'un événement est donc toujours un nombre compris entre 0 et 1. Il est clair que la probabilité de chaque événement devra aussi être comprise entre 0 et 1. De plus la fréquence relative d'un événement certain est évidemment égale à 1 et celle d'un événement impossible égale à 0. De même la probabilité de l'événement « certain » sera donc égale à 1 et celle de l'événement « impossible » égale à 0. Si A et B sont deux résultats possibles de la même épreuve qui s'excluent mutuellement, si, quand on répète n fois l'épreuve, A se produit k_A fois, et B, k_B fois, l'événement $A + B$ s'est produit $k_A + k_B$ fois. Si f_A, f_B, f_{A+B} sont les fréquences relatives de A, B et $A + B$, on a

$$f_{A+B} = f_A + f_B.$$

En d'autres termes, la fréquence relative de la somme de deux événements incompatibles est toujours la somme des fréquences relatives de chacun des deux événements. Il doit donc en être de même pour les probabilités. C'est pourquoi nous poserons les axiomes suivants :

α) *À tout élément A d'une algèbre d'événements* $\mathscr{A}$ *correspond un nombre non négatif* $P(A)$ *que nous appelons probabilité de A.*

β) *La probabilité de l'événement certain égale* 1, $P(I) = 1$.

γ) $AB = 0 \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Une algèbre d'événements $\mathscr{A}$ dans laquelle, à tout élément A, correspond un nombre $P(A)$ qui satisfait à α), β), γ) s'appelle une *algèbre de probabilité*.

Étudions d'abord quelques conséquences des axiomes :

Théorème 1 :

$$B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leq P(A).$$

Démonstration. – $B \subseteq A \Rightarrow A = B + C$, où $C = A\bar{B}$, donc $BC = O$, et, d'après l'axiome γ)

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

Comme, en raison de l'axiome γ), $P(C) \geq 0$, le théorème 1 en résulte immédiatement.

Le théorème 1 peut aussi être déduit directement de la relation entre probabilité et fréquence relative. En effet si la réalisation de B entraîne celle de A (c'est-à-dire si $B \subseteq A$), il en résulte que, dans toute série d'épreuves, l'événement A se produit au moins aussi souvent que B.

Comme $A \subseteq I$ pour tout $A \in$ A, il résulte du théorème 1 que

$$P(A) \leq 1 \text{ pour tout } A.$$

Une autre conséquence importante des axiomes est que nous pouvons exprimer au moyen de la probabilité de A celle de l'événement « opposé » $\bar{A}$. En effet :

$$A + \bar{A} = I \text{ et } A\bar{A} = O,$$

donc, en raison de l'axiome γ)

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(I) = 1.$$

Nous pouvons énoncer le

Théorème 2. – *Quel que soit l'événement A*

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(I) = 1.$$

Puisque $O = \bar{I}$, il en résulte

$$P(O) = 1 - P(I) = 1 - 1 = 0 ;$$

la probabilité de l'événement impossible est nulle.

Le théorème 2 peut aussi être déduit directement de notre définition concrète de la probabilité. En effet si dans une série de n épreuves l'événement A se produit k fois, $\bar{A}$ se produit exactement $(n - k)$ fois. Donc, pour leurs fréquences relatives, f_A et $f_{\bar{A}}$ on a

$$f_A + f_{\bar{A}} = 1.$$

L'axiome γ) pose que la probabilité de la somme de deux événements incompatibles est égale à la somme des probabilités de chacun d'eux. On en déduit aussitôt le

Théorème 3. – *Si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, c'est-à-dire si $A_iA_j = O$ pour $i \neq j$, alors*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

La démonstration se fait par récurrence… (pp. 23-28)

On rencontre ici un choix fréquent dans les débuts du calcul des probabilités : l'établissement d'un énoncé mathématique, par exemple $P(A + B) = P(A) + P(B)$ lorsque $A \cap B = \varnothing$, soit à partir du mathématisé (ici, les fréquences), soit comme théorème de la théorie disponible.

c) Une question qui mérite d'être posée est évidemment celle du rejet puis de l'oubli (ou de la péjoration) du *fondement* statistique – fréquentiste – du calcul des probabilités. Voici d'abord un autre passage du traité de Rényi, qui écarte la « définition de Laplace » de la probabilité d'un événement (au profit de la définition fréquentiste).

---

§ 4. ALGÈBRES DE PROBABILITÉ FINIES

Quand l'ensemble des événements d'une algèbre de probabilité est fini, on peut, comme on l'a vu au chapitre I, représenter ces événements par toutes les parties d'un ensemble fini Ω. Soit N le nombre des éléments de Ω ; notons-les ω_1, ω_2, …, ω_N. La probabilité $P(A)$ de tout événement A est alors bien déterminée par la donnée de P pour les ensembles réduits à un seul élément, soit $\{\omega_i\}$, avec $P(\{\omega_i\}) = p_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$). Alors, pour tout événement,

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i,$$

et comme $P(\Omega) = 1$, les nombres (non négatifs) p_i satisfont à la condition

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Un cas particulier important est celui où tous les p_i sont égaux, donc égaux à $1/N$. Nous appellerons *algèbres de probabilité classiques* ces algèbres particulières, car le calcul des probabilités classique s'est occupé exclusivement de ce cas.

Au début du développement du Calcul des Probabilités on voulait ramener la solution de tous les problèmes à cette forme. Mais dans de nombreux cas c'est impossible ou bien artificiellement et inutilement compliqué. Cependant, comme les probabilités dans les jeux de hasard (pile ou face, dés, roulette, cartes, etc.) se calculent effectivement de cette façon et comme, dans beaucoup de questions de physique ou de technique, on peut pratiquement s'y ramener, il n'est pas inutile d'étudier spécialement ce cas (parfois appelé « cas de Laplace » [*N. d. T*]).

Dans une algèbre de probabilité classique

$$P(A) = K/N$$

où K est le nombre des éléments de A. Cela nous amène à la « définition classique » de la probabilité qui s'énonce ainsi : la *probabilité* est le quotient du nombre des cas favorables à l'événement considéré par le nombre de tous les cas possibles s'ils sont équiprobables.

La « définition classique » n'est plus considérée aujourd'hui comme une définition mais seulement comme une méthode pour calculer les probabilités, dans une algèbre de probabilité finie dont les événements élémentaires, pour certaines raisons (par exemple propriétés de symétrie), ont la même probabilité. (pp. 33-34)

Ce qui *fonde* la notion de probabilité, c'est donc le point de vue des fréquences empiriques. La « définition de Laplace » apparaît alors, non comme une *définition*, mais comme un moyen de *calculer* une probabilité,

lorsque l'expérience aléatoire étudiée paraît satisfaire la condition d'équiprobabilité des événements élémentaires.

d) Je m'arrêterai maintenant sur un ouvrage sensiblement de la même époque, qui a le mérite de présenter ensemble, en les combinant en fonction des besoins, calcul infinitésimal et statistique : il s'agit du livre *Calculus and Statistics* de Michael C. Gemignani, dont la première édition est de 1970 (j'utilise ici l'édition parue chez Dover en 2006). Le premier chapitre de ce livre s'intitule "The Basic Concepts of Function and Probability". En voici le sommaire :

Sets and functions	1
The notion of probability	6
The basic laws of probability	11
More basic facts about probability	15

Le premier « symptôme » d'une évolution alors en cours du statut de la notion de probabilité se trouve sans doute dans le fait suivant : la section intitulée "The notion of probability" est en fait consacrée à la notion d'*événement* et à *l'algèbre* des événements. Mais il y a plus. Cette section comporte – à l'instar des autres – un ensemble d'*exercices* ; le sixième et dernier des exercices proposés, qui précède immédiatement la section suivante, "The basic laws of probability", a l'énoncé que voici :

> We have not yet defined what is meant by the probability of an event; however, the reader should already have some intuitive ideas about the properties of probabilities. If A is any event, we let $P(A)$ denote the probability of A. In each of the following, A and B are events. Decide which of the following statements are true and which are false. Justify each of your assertions.
>
> a) $P(A \cup B)$ is at least as large as $P(A)$.
>
> b) $P(A \cap B)$ is no larger than $P(B)$.
>
> c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
>
> d) $P(A \cap B)$ is less than or equal to $P(A)P(B)$.
>
> e) If A and B are mutually exclusive, then $P(A \cap B)$ will have the smallest value permitted for a probability.
>
> f) If A is twice as probable as B, then $P(A) = 2P(B)$. (p. 10)

Ainsi donc, bien que la notion de probabilité *n'ait pas encore été définie*, l'auteur postule que "the reader should already have some intuitive ideas about the properties of probabilities". Je crois alors pouvoir reprendre ici, *mutatis mutandis*, ce que je disais à propos de l'algèbre lors de la séance 1 :

> Il y a là un exemple d'un phénomène général de *vieillissement culturel* qui conduit à couper le mathématique du mathématisé. Ainsi en va-t-il en géométrie lorsque, comme cela est de plus en plus vrai aujourd'hui, on tend à identifier, sans autre forme de procès, le plan à l'ensemble $\mathbb{R}^2$ ou l'espace à l'ensemble $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire la réalité au modèle. On substitue ainsi à la mathématisation d'une réalité physique l'étude formelle d'une structure mathématique que l'on finit par identifier à la réalité qu'à l'origine elle prétendait seulement modéliser. Revenir sur ce glissement ontologique ne va pas de soi : il faut réinvestir la réalité modélisée, il faut reprendre le processus de mathématisation, et enfin maîtriser le modèle, ce qui suppose une organisation infrastructurelle relativement lourde qui ne se réinvente pas en un tournemain.

e) Voici alors les premières lignes de la section suivante, "The basic laws of probability" :

> We would like to define the *probability* $P(A)$ of an event A in such a manner that if the experiment associated with A is performed n times, then A should occur about $nP(A)$ times. […] It follows then that if we wish to find the probability of an event A, we could perform the appropriate experiment n times. If A occurs m times out of the n trials, then we may estimate $P(A)$ to be m/n. (p. 11)

Ici se produit le retournement crucial : $P(A)$ se voit conférer une existence *première* ; et les fréquences empiriques ne sont plus alors que des « estimations » de la probabilité – alors même que, bien entendu, c'est la fréquence théorique, la probabilité, qui fournit une estimation de la fréquence empirique que l'on peut attendre lorsque n est assez grand. Mais ce statut *second* donné ici aux fréquences empiriques va être encore minoré. Notant $R(A)$ la fréquence empirique m/n, l'auteur ajoute : "We have said that $R(A)$ could be used to estimate $P(A)$. However, the 'relative frequency' approach to probability has certain limitations". Que sont ces limitations ? La première tient à ce que "in order to obtain a reasonably good estimate of a probability, a fairly large number of trials would have to be performed", ce qui n'est pas faux, certes. Une seconde limitation, plus étonnante, semble bien relever de la mauvaise foi ; la voici :

> Although a probability estimate based on a large number of trials should be fairly accurate, there is always the possibility that the unusual will happen. For example, even though the true probability of flipping heads with a fair coin is $\frac{1}{2}$, it is not impossible to flip 1000 consecutive tails.

Un tel événement – une suite ininterrompue de 1000 faces –, de probabilité $0{,}5^{1000} = 2^{-1000}$, est pratiquement impossible : en observant que l'égalité $2^{\alpha} = 10$ équivaut à $\alpha = \ln 10/\ln 2$, on a en effet : $2^{1000} = (2^{\alpha})^{10/\alpha} = 10^{10/\alpha} = 10^{1000 \ln 2/\ln 10} = 10^{301{,}029995663981195213738894724\ldots} > 10^{301}$.

f) Il est alors frappant que la prise de position de l'auteur ne l'empêche pourtant pas de tirer ensuite les axiomes de la théorie des probabilités des propriétés des fréquences. Ayant établi les égalités

$R(A) + R(\bar{A}) = 1$,
$R(A) + R(B) = R(A \cup B) + R(A \cap B)$,
soit $R(A \cup B) = R(A) + R(B) - R(A \cap B)$,
$\dfrac{R(A \cap B)}{R(A)} = R(B \mid A)$,
soit $R(A \cap B) = R(A)\, R(B \mid A)$,

Gemignani écrit :

> If we assume that for a large number of trials, $R(A)$ is a "good" estimate of $P(A)$, then the probabilities should satisfy the same relationships that relative frequencies satisfy. In particular, motivated by the relationships among relative frequencies derived in this section, we make the following *assumptions* about probabilities.
> *Assumption 1. If A is any event, then* $P(A)$*, the probability of A, is a real number which lies between* 0 *and* 1*, inclusive.* $P(A) = 0$ *if A is the empty set (an impossible event) and* $P(A) = 1$ *if A is the entire sample space (a certain event).*
> *Assumption 2. If A and B are events, then*
> $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
> *Assumption 3. For any events A and B,*
> $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$
> if $P(A)$ and $P(B)$ are not 0. If either $P(A)$ or $P(B)$ is 0, then $P(A \cap B) = 0$.

En d'autres termes, l'auteur propose bien une théorie axiomatique des probabilités dont les axiomes sont calqués sur le comportement des fréquences empiriques.

4. Un bilan d'étape

a) Un petit nombre de conclusions provisoires découlent de ce qui précède. La première concerne la statistique *expérimentale* : l'expérimentation visant à préciser la « fréquence limite » d'un événement est en règle générale impossible au-delà d'un certain ordre de grandeur de la taille n des échantillons observés (la production d'une usine ne peut être « aussi grande

qu'on veut », par exemple) – ce qui justifie l'intervention du *calcul* (des probabilités). Plus généralement, et en contraste avec ce qui semble être le cas en géométrie expérimentale, en statistique l'expérimentation proprement dite est souvent délicate, lorsqu'elle n'est pas tout simplement impossible.

b) Une deuxième conclusion concerne l'intégration du concept de probabilité en statistique, qui plonge l'univers des fréquences observées dans un monde plus vaste, où l'on suppose des fréquences « limites », « théoriques », *ce qui change la conceptualisation de la variabilité statistique*. Considérons à ce propos l'énoncé suivant, emprunté à Gnedenko et Khintchine (1969) :

> Dans une usine, 96 % des articles produits sont acceptés au contrôle (événement *A*) ; sur 100 articles ainsi acceptés, 75 sont reconnus comme étant de première qualité (événement *B*). On demande quelle est la probabilité pour qu'un article fabriqué dans cette usine soit de première qualité. (p. 25)

Que signifie cet énoncé ? Reformulons-le ainsi :

> Dans une usine, 96 % des articles produits sont acceptés au contrôle (événement *A*) ; sur 100 articles ainsi acceptés, 75 sont reconnus comme étant de première qualité (événement *B*). *On demande le pourcentage des articles fabriqués dans cette usine qui sont de première qualité.*

Ici, la notion de probabilité – de fréquence *théorique* – a formellement disparu. De fait, on pourrait penser que les pourcentages proposés ou demandés portent sur une population déterminée, finie, par exemple de 500 articles produits. Dans ce cas, 0,96 × 500 = 480 articles auront été acceptés au contrôle ; parmi ceux-là, 75 %, soit 0,75 × 480 = 360, auront été jugés de première qualité. Le pourcentage demandé est donc 360/500 = 72 %. L'énoncé obtenu est alors tout proche du suivant, rédigé sous forme typiquement scolaire, et qui porte sur les pourcentages :

> Dans une usine, 96 % des 500 articles produits au cours d'une certaine période ont été acceptés au contrôle ; 75 % des articles acceptés ont été reconnus comme de première qualité.
> Combien d'articles ont été acceptés ?
> Combien d'articles ont été reconnus de première qualité ?
> *Quel pourcentage des articles fabriqués sont de première qualité ?*

Bien entendu, l'énoncé d'origine *ne dit pas cela*. Pour clarifier la chose, on peut le reformuler ainsi :

Dans une usine, la probabilité qu'un article produit soit accepté au contrôle (événement *A*) est 0,96 ; la probabilité qu'un article accepté soit reconnu comme étant de première qualité (événement *B*) est 0,75. On demande quelle est la probabilité pour qu'un article fabriqué dans cette usine soit de première qualité.

On est alors pleinement dans le cadre du « calcul des probabilités "comme modélisant la variabilité statistique" ». La « statistique probabiliste » plonge ainsi les situations du monde dans un univers plus grand, augmenté des probabilités des événements qui y surviennent.

c) Une troisième conclusion, qui concerne d'abord la statistique théorique – c'est-à-dire « probabiliste » –, consiste en ceci que, grâce aux moyens de calcul actuels, le « travail théorique » peut être aujourd'hui *contrôlé* par la simulation, c'est-à-dire par un travail expérimental : je n'y reviens pas ici.

d) L'intégration dans la science statistique de la notion de probabilité permet de nouvelles formes de calcul. C'est ainsi que, dans le cas étudié plus haut – d'abord par simulation, puis par des calculs d'effectifs –, le « calcul des probabilités » conduit d'abord à travailler dans l'algèbre des événements pour écrire

$$\{ X + Y = 6 \} = \{ X = 2 \text{ et } Y = 4 \} \text{ ou } \{ X = 4 \text{ et } Y = 2 \} \text{ ou } \{ X = 3 \text{ et } Y = 3 \}$$

afin et avant de se livrer au calcul de probabilités élémentaire que voici :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P(X + Y = 6)} \quad &= P(X = 2 \text{ et } Y = 4) + P(X = 4 \text{ et } Y = 2) + P(X = 3 \text{ et } Y = 3) \\ &= P(X = 2) \times P(Y = 4) + P(X = 4) \times P(Y = 2) + P(X = 3) \times P(Y = 3) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16} = \mathbf{0{,}1875}. \end{aligned}$$

Bien entendu, à ce stade, on peut trouver *plus simple* (praxéologiquement) le traitement donné plus haut, par calcul arithmétique d'effectifs. Le problème de motiver l'étude du calcul des probabilités reste donc, en ce point, en partie *ouvert*.

That's all, folks!

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

➔ Séance 3 – Vendredi 11 décembre 2009

« LE FAIT DE LA RECHERCHE »

1. Se former à la TAD

a) Pour la première fois, le congrès international sur la TAD, qui se tiendra à Sant Hilari (Catalogne) du mardi 26 janvier après-midi au vendredi 29 janvier matin, sera précédé de deux demi-journées (représentant 8 h en tout) d'un « cours de TAD » portant sur certaines des connaissances fondamentales qu'un chercheur peut avoir besoin de rencontrer en matière de TAD.

b) Le mécanisme envisagé consiste à demander aux participants de faire connaître à l'avance des questions sur lesquelles ils souhaiteraient travailler dans le cadre de cet atelier. Ces questions seront exploitées lors des séances de « cours » dans le cadre de « groupes de questions » ayant chacun à les examiner pour faire connaître tant les éléments de réponse qui leur paraissent assurés (mais qui ne le sont peut-être pas) que leurs doutes et interrogations à leur propos.

c) Un outil concret de repérage des éléments de la TAD devrait, selon moi, être élaboré au long cours (avec, prioritairement, une version en anglais afin de toucher des « publics » élargis par exemple aux pays nordiques) : un *glossaire*. Ce travail a été commencé dans le cadre du mémoire de Julia Marietti ; pour en illustrer l'idée, je le reproduis ci-après.

> **Chronogenèse.** Genèse du temps didactique c'est-à-dire du temps de la construction praxéologique.
>
> **Clinique.** En TAD, ce terme est englobant : toute recherche, et en particulier toute *expérience* (au sens des sciences expérimentales) suppose et implique un abord et une connaissance cliniques de l'objet de la recherche (par exemple les AER ou les PER). L'expérience est ainsi une modalité de la clinique. Les recherches en didactique, qu'elles soient fondamentales ou appliquées, s'inscrivent nécessairement dans une *clinique du didactique* (à propos de l'objet étudié).
>
> **Conditions et contraintes.** Ce qui est décrit ordinairement en termes de « variables » ou de « facteurs » l'est en TAD, de façon générique, en termes de *conditions*. Étant donné une position p dans une institution I, on dit qu'une condition est une *contrainte* pour les personnes occupant la position p si, en tant qu'elles occupent cette position, elles n'ont pas le pouvoir de modifier cette condition.
>
> **Dialectique des médias et des milieux.** L'une des sept dialectiques de l'enquête codisciplinaire. L'opération élémentaire de cette dialectique consiste à soumettre un énoncé issu d'un *média* (c'est-à-dire d'un système émettant des messages à l'intention de certains publics) au verdict d'un *milieu* « adidactique » par rapport à cet énoncé et à celui qui l'interroge à son propos, c'est-à-dire d'un système dont on peut supposer que la réponse à la question de la vérité de cet énoncé est dépourvue d'intention à l'endroit de celui qui le questionne.
>
> **Didactique.** La didactique est définie en TAD comme la science des conditions et des contraintes de la diffusion des entités praxéologiques auprès des personnes et des institutions. On parle de la didactique de tel ou tel complexe praxéologique : didactique de la grammaire du français, didactique de l'orthotypographie, didactique de l'algèbre élémentaire, didactique de la danse

classique, didactique des PER, etc. L'objet central de la didactique est *le* didactique, dimension du réel présente en toute situation institutionnelle où une personne ou une institution fait ou envisage de faire quelque chose pour qu'une personne ou une institution rencontre telle ou telle entité praxéologique : on parle à cet égard d'*intention didactique* et de *geste didactique* (intentionnel).

Institution. Tout système social lentement évolutif imposant aux personnes qui en sont les sujets un équipement praxéologique déterminé (dépendant de leur position dans l'institution) dans certains domaines d'activité. Une classe est une institution, de même qu'une école ; une bande de copains peut l'être tout autant.

Mésogenèse. Genèse du milieu didactique, c'est-à-dire du système des ressources utilisées dans le processus de construction praxéologique.

Objet. En TAD, tout est objet (comme tout est ensemble en théorie des ensembles). La didactique est un objet, une institution *I* est un objet, une personne *x* est un objet, de même qu'une classe [*X*, *y*], etc.

Personne. Tout individu est une personne, c'est-à-dire la résultante évolutive d'une foule d'assujettissements passés et présents à des institutions dont cet individu est ou a été le sujet, et qui ont engendré son équipement praxéologique personnel actuel.

Position. Situation au sein d'une institution *I* donnée qu'une personne ne peut en principe occuper si son équipement praxéologique personnel n'est pas conforme à l'équipement praxéologique que *I* requiert de ses sujets dans cette situation. Dans une classe, on distingue ordinairement la position d'élève et celle de professeur, dans une famille, celle de père, celle de mère, celle d'aîné de la fratrie, etc.

Problème (de la profession). Un problème est une difficulté que l'on fait reconnaître en tant que telle par une institution existante ou nouvellement créée autour de ce problème. La difficulté en question est alors reconnue comme un problème posé *à* l'institution, dont celle-ci se sent responsable de la résolution : c'est un problème *pour* l'institution. Un problème de la profession (voir ce mot) est un problème *pour* la profession, dont celle-ci reconnaît en outre qu'il n'affecte pas tant certains de ses membres que le *métier* même qu'ils exercent.

Profession. Une profession est une institution qui organise un *métier* et ceux qui l'exercent en recherchant les moyens optimaux de l'adéquation praxéologique de ce métier à sa mission sociale. La profession de professeur est l'organisation qui prend en charge le métier de professeur. Ce qu'on appelle ici « la profession », tout court, est l'institution rassemblant les professeurs de mathématiques des collèges et lycées, les responsables officiels de l'enseignement scolaire des mathématiques (inspecteurs généraux,

inspecteurs pédagogiques régionaux, etc.), des militants et responsables associatifs ou pédagogiques (ceux œuvrant à l'APMEP ou dans les IREM par exemple), ainsi que les chercheurs en didactique des mathématiques travaillant sur les *problèmes de la profession*.

Praxéologie. Le concept de praxéologie est une généralisation anaxiologique des notions courantes de savoir et de savoir-faire. Dans le cas le plus simple, celui d'une praxéologie *ponctuelle*, une praxéologie s'écrit [T / τ / θ / Θ] où T est un *type de tâches* (par exemple additionner deux entiers, se moucher, composer un opéra, enseigner par PER), τ est une *technique* pour accomplir au moins certaines tâches t du type T, θ est une *technologie* relative à la technique τ, c'est-à-dire un « discours » susceptible de justifier, de rendre intelligible, voire de contribuer à produire la technique τ, et Θ est une théorie de la technologie θ qui, à son tour, permet de justifier, de rendre intelligible, voire de contribuer à produire la technologie θ. Généralement, une technologie θ est telle à l'endroit de plusieurs techniques τ_i relatives à autant de type de tâches T_i ($1 \leq i \leq n$) : on note alors [T_i / τ_i / θ / Θ] la praxéologie correspondante. Alors qu'une praxéologie du premier type est dite *ponctuelle* (elle est construite autour de ce « point » qu'est le type de tâches T), une praxéologie du deuxième type est dite *locale*. Une praxéologie peut être scindée en un bloc pratico-technique ou *praxis*, [T / τ], et un bloc technologico-théorique ou *logos*, [θ / Θ]. La diffusion praxéologique opère fréquemment des modifications dans la structure des praxéologies, lorsqu'une praxéologie « habitant » dans une institution I donnée est transposée dans une autre institution I' : on parle alors de *transposition institutionnelle* – et de transposition *didactique* lorsque celle-ci procède d'une intention didactique. Le système total, plus ou moins intégré, des praxéologies qu'une personne ou une institution peut, à un moment donné de son histoire, mobiliser sous des conditions idoines est appelé son *équipement praxéologique*.

Raisons d'être. Par raisons d'être d'une œuvre – c'est-à-dire de tout objet créé et diffusé par l'activité humaine –, on entend l'intention qui a présidé à sa création ou à sa diffusion en telle institution, l'usage (ou les usages) que l'on compte en faire, l'utilité qu'on lui reconnaît. Les raisons d'être – et d'être *là* – d'une œuvre constituent la réponse à la question sans apprêt « À quoi ça sert ? » ou « En quoi cela peut-il être utile ? » En quoi est-il utile de distinguer angle saillant et angle rentrant, par exemple ? Bien entendu, les raisons d'être d'une œuvre dépendent en règle générale, mais dans une certaine mesure seulement, de l'institution qui lui sert d'habitat (voire de la position à l'intérieur d'une telle institution). C'est dans le refoulement de la question des raisons d'être que la TAD voit l'origine de la « perte de sens » identifiée par la profession.

Rapport. Une personne x a une certaine relation à un objet O qui découle de cette partie de son équipement praxéologique personnel dont l'objet O est un

élément constituant – le rapport d'une personne à l'objet « fonction logarithme » peut ainsi inclure ou non le fait que cette fonction permet de résoudre l'équation $1{,}25^t = 2$. On parle de *rapport personnel*, que l'on note $R(x, O)$. Bien entendu, $R(x, O)$ peut être vide : on dit alors que *x ne connaît pas O*. On parle de même de *rapport institutionnel* à propos du système noté $R_I(p, O)$ qui désigne le rapport qu'une personne *x* occupant la position *p* à l'objet *O* est censé avoir : on parle alors du rapport institutionnel à *O* pour les personnes occupant la position *p* dans *I*. D'une façon générale, le rapport personnel $R(x, O)$ est *une* résultante de tous les rapports institutionnels $R_I(p, O)$ tels que la personne *x* ait été (ou soit) assujettie à l'institution *I* en position *p*. Comme dans le cas du rapport personnel, le rapport $R_I(p, O)$ peut être vide : on dit alors que les sujets de *I* en position *p* n'ont pas, en tant que tels, à connaître *O*.

Topogenèse. Genèse des équipements praxéologiques (et des rapports institutionnels associés) selon les positions d'élève et de professeur au cours de la construction praxéologique. Le *topos* (le lieu, en grec ancien) de l'élève (respectivement du professeur) est cette partie de la position d'élève (resp. de professeur) qui a trait aux entités praxéologiques construites ou en cours de construction dans la classe.

d) Bien entendu, un tel glossaire, toujours provisoire, doit être regardé comme un chantier permanent. À ce titre, je propose d'en faire à la fois un objectif et un étalon du travail qui sera réalisé dans le cadre « du cours » de TAD pour chercheurs.

2. « Lecture critique d'article »

a) Depuis 2004, le concours de l'internat qui structurait les études médicales a été remplacé par les ECN – les *épreuves classantes nationales* – organisées en 12 filières dont la filière « médecine générale » (là-dessus, je renvoie à l'article « Épreuves classantes nationales » de *Wikipédia*). Depuis 2009, les ECN comportent une épreuve redoutée, la LCA, la *lecture critique d'article*, la part accordée à cette épreuve aux ECN devant progressivement croître au fil des années (voir par exemple http://www.mediwiki.fr/Lecture_critique_d%27article). Je reproduis un commentaire que l'on trouve sur le site de l'université de Paris 5 (http://www.cnci.univ-paris5.fr/medecine/LectureCritiqueArticle.pdf) :

> L'objectif de l'épreuve est d'amener l'étudiant à lire de façon critique et à analyser le contenu d'un article en vue de son autoformation actuelle et future.
> Le mot « critique » ne doit pas être entendu dans le sens où l'on demanderait aux étudiants de chercher systématiquement tous les défauts d'un article.

Cette épreuve part du principe que toute information médicale doit être analysée avec du recul, en cherchant les défauts éventuels mais aussi les limites, les implications, l'utilité pour la pratique.

b) Les articles analysés relèvent de ce qu'on nomme en anglais l'*evidence-based medicine*, la « médecine fondée sur des données établies » (voir l'article de même nom dans *Wikipedia* et l'article correspondant dans la version française de cette encyclopédie). Ils ont en principe la « structure IMRAD », dont voici une présentation figurant sur le site de la Société française de stomatologie et chirurgie maxillo-faciale : ainsi qu'on le verra, le contenu explicité et le ton employé illustrent bien le niveau de standardisation formelle, voire de ritualisation, de ce secteur de la recherche médicale (http://www.sfscmf.fr/index2.php?ref=IMRAD)

La structure IMRAD

C'est la structure imposée de tout résumé soumis à acceptation

Rédaction d'un article scientifique médical :

– Objectif : transmettre un message scientifique
– Technique dérivée de la science et non de la littérature ou de la poésie
– Le but, c'est d'être lu : le contenu importe plus que le style (rigueur, clarté concision)

Structure univoque et stéréotypée : IMRAD

– **Introduction** :

Rappel des connaissances sur le sujet
On situe la localisation sur un point ou un sujet particulier
But : **poser une question** (et une seule !)

– **Matériel et méthode** :

Quel est le matériel d'étude ?
Qu'a-t-on cherché à évaluer ?
Quels ont été les critères de jugement ?

– **Résultats** :

tous les résultats et **rien que les résultats**

– **Discussion** :

Elle commence toujours par la **réponse à la question** posée dans l'introduction
Comparer les données de la littérature sur certains points
Critiquer l'étude
Ce n'est pas de l'enseignement

– **Références bibliographiques** :

But : justifier tout fait énoncé :
Présentation standardisé (normes de Vancouver)
Toutes doivent être présentes dans **Medline**, (sinon refus !)

Pour un cas clinique :

– **Introduction**
– **Observation**
– **Discussion**

c) Voici maintenant une présentation de la structure IMRAD dans la langue d'origine (je l'emprunte à l'article "IMRAD" de *Wikipedia*) :

> **IMRAD** is an acronym for **I**ntroduction, **M**ethods, **R**esults **A**nd **D**iscussion. It relates to the standard main structure of a scientific paper, which typically includes these four sections in this order:[1]
>
> ■ **Introduction** – why and where was the study undertaken? What was the purpose?
>
> ■ **Materials & Methods** – how was the study done? What materials and methods were used?
>
> ■ **Results** – what did the study find?
>
> ■ **Discussion** – what might it mean, why does it matter, what next? And, last but not least, How does it fit in with what other researchers have found?

d) En fait, la structure IMRAD est celle-là même que propose par ailleurs l'APA (*American Psychological Association*), comme on peut le lire dans un exposé en ligne (http://www.uta.fi/FAST/FIN/RESEARCH/imrad.html) intitulé "The *IMRAD* Research Paper Format" :

> ***IMRAD*** (**Introduction**, **Methods**, **Research** [and] **Discussion**) is a mnemonic for a common format used for academic ['scientific'] research papers. While used primarily in the hard sciences, like physics and biology, it is also widely used in the social and behavioral sciences. The IMRAD format is also known as the APA format, as the American Psychological Association employs the IMRAD headings in its APA stylesheet.

De fait, la présentation des *empirical studies* que propose le *Publication Manual of the American Psychological Association* (6e édition, 2009) est la suivante :

> **1.01 Empirical Studies**

Empirical studies are reports of original research. These include secondary analyses that test hypotheses by presenting novel analyses of data not considered or addressed in previous reports. They typically consist of distinct sections that reflect the stages in the research process and that appear in the following sequence:

- **introduction:** development of the problem under investigation, including its historical antecedents, and statement of the purpose of the investigation;
- **method:** description of the procedures used to conduct the investigation;
- **results:** report of the findings and analyses; and
- **discussion:** summary, interpretation, and implications of the results.

e) En quoi tout cela nous intéresse-t-il ? Le master de recherche de sciences de l'éducation comporte, en première année, deux unités d'enseignement (UE) – une par semestre – intitulées respectivement *Actualités de la recherche 1* et *2*. La seconde de ces UE devrait cette année être organisée autour d'un type de tâches que j'appelle simplement, et sans doute provisoirement, *Lecture et analyse d'articles scientifiques* (LAAS), ce qui est en grande partie nouveau. Contrairement à l'épreuve de LCA des ECN, les articles lus et analysés ne seront pas seulement des *empirical studies*, pour reprendre ici une classification présentée lors de la séance 2 de ce séminaire :

1.01 Empirical Studies
1.02 Literature Reviews
1.03. Theoretical Articles
1.04. Methodological Articles
1.05 Case Studies
1.06 Other types of Articles

Un article à lire et à analyser devrait faire l'objet d'abord d'une lecture *inventoriante* qui en dégage la structure et en résume les contenus, suivie d'une lecture *questionnante*, qui interroge le même texte sur certains points clés non dégagés (ou dégagés insuffisamment) par la lecture inventoriante. Dans tous les cas, un *système de questions* devrait être élaboré et proposé afin de guider lecture et analyse. La première de ces questions devrait demander de situer l'article analysé par rapport à la classification que je viens de rappeler. Une deuxième question aura trait à la question *Q* étudiée. Une question ultérieure conduira certainement à évaluer la place donnée dans l'article à *l'apport propre de l'auteur* (ou des auteurs) par contraste avec la place allouée à simplement mentionner d'autres auteurs et leurs travaux (travaux dont on devra analyser le lien, ou la ténuité du lien, avec l'étude de la question *Q* proposée par l'auteur). Mais je n'irai pas plus loin sur ce sujet aujourd'hui.

MODÉLISATION ET TAD

1. Une « commande »

a) Il y a quelque temps déjà, André Pressiat m'a contacté en vue d'une intervention dans le cadre du groupe de travail « Mathématiques et réalités » dirigé par Alain Kuzniak dans le cadre du laboratoire André Revuz de l'université de Paris 7. Il m'a précisé sa « commande » dans un courriel que je me permets de reproduire ci-après.

> Notre groupe travaille depuis quelques temps sur la modélisation (*Mathematical modelling*) telle qu'elle apparaît à la lecture des deux numéros 38.2 et 38.3 de *ZDM* (avril et juin 2006) [...]. Notre but est de faire une brochure présentant une lecture critique de ces articles (un peu comme nous l'avons fait dans la brochure *Du monde réel au monde mathématique*, publiée en 2008 à l'IREM de Paris 7, en ce qui concerne l'approche italienne des DDE et l'approche de la *Realistic Mathematics Education*, mais en augmentant la partie critique).
>
> Le mot "modélisation" apparaît assez tôt dans tes travaux, à travers l'article bien connu de *Petit x* n° 19 (*Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*, 2e partie, 1989) mais également la publication moins connue de l'IREM de Marseille n° 16, *Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche*, qui date de la même année, dans laquelle tu évoques la situation des boîtes flottantes. Tu y dresses d'ailleurs un chantier bibliographique (pages 167 à 170) dans lequel figure le *mathematical modelling* qui en était alors à ses premiers développements. Plus récemment, tu évoques encore la modélisation dans ton cours à l'EE11 *Organiser l'étude : 1. Structures et fonctions* quand tu décris la "modélisation" du moment de première rencontre avec une tâche problématique (système, modèle, travail du modèle).
>
> Pourtant, tu t'es affranchi du cadre du *mathematical modelling* pour construire les développements de la TAD (praxéologies mathématiques et didactiques). Nous souhaiterions que tu essaies de nous dire quelles en ont été les raisons. L'article *Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics* écrit par Fco Javier García, Josep Gascón, Luisa Ruiz Higueras et Marianna Bosch (que je te joins également ci-dessous) donne implicitement une réponse a posteriori à la question : les auteurs réinterprètent le *mathematical modelling* dans le cadre de la TAD, en l'intégrant dans un "modèle épistémologique plus général des activités mathématiques institutionnelles", ce dernier permettant de résoudre certains problèmes curriculaires (l'exemple du PER sur les plans d'épargne y est développé). On imagine que la réponse du bâtisseur de la TAD à l'époque de

l'élaboration des praxéologies mathématiques et didactiques n'a pas été la même…

Les trente-cinq thèses pour un débat que tu as développées au chapitre 5 de ta publication de 1989 à l'IREM de Marseille donnent des pistes sur la réponse que tu donnais à ce moment-là (Thèses 16, 17 et 18) :

Thèse 16 :
Il existe aujourd'hui en divers pays, et notamment aux États-Unis, un mouvement, attesté par de nombreuses publications, en faveur de l'enseignement de la modélisation, ou, encore, de l'enseignement des mathématiques (et en particulier des mathématiques appliquées) par la modélisation. Il ne semble pas qu'un mouvement analogue, semblablement développé, existe en France à l'heure actuelle. […] il convient d'examiner les conditions de possibilité de l'introduction d'une telle modification dans le système d'enseignement. […].

Thèse 17 :
Face à ce problème - qui met en jeu des rapports de forces au sein de la société toute entière -, il existe des stratégies d'évitement […] une troisième stratégie consiste à tenter d'intégrer, dans des proportions variables, l'étude et l'emploi de modèles dans un enseignement mathématique globalement traditionnel.

Thèse 18.1 :
[…] À rebours de "l'enseignement des modèles" (ou "par les modèles"), l'activité de modélisation semblerait mieux admise par les mathématiciens (parce qu'elle se rapproche de l'activité mathématique savante, dans laquelle la "modélisation" existe aussi, même si elle porte sur une réalité elle-même mathématique). Mais, bien qu'acceptable dans son principe, cette activité, se référant nécessairement à une réalité extramathématique, pose problème aux mathématiciens, dans la mesure où elle introduit du non-mathématique dans un enseignement de mathématiques. […] L'introduction dans l'enseignement de l'activité de modélisation supposerait une redéfinition du découpage en matières enseignées, qui introduirait par exemple une discipline "modélisation mathématique" ayant son statut, ses horaires, ses enseignants, etc. Cela suppose en amont un consensus social assez puissant pour faire apparaître l'activité de modélisation comme une pratique digne de rentrer à l'école, dont l'intérêt fasse à son tour apparaître acceptables au sein de l'école la matière première sur laquelle elle porte et les produits de l'activité de modélisation – les modèles – eux-mêmes.

Thèse 18.2 :
La difficulté à ce qu'apparaisse un tel consensus est lié au fait que la fabrication sociale de modèles aussi bien que leur mise en œuvre dans des pratiques sociales spécifiques sont des faits socialement "cachés". […]

Thèse 18.3 :
L'effort à fournir pour atténuer l'opacité qui retranche la plupart des pratiques de savoir spécifique de la vue de ceux qui n'en sont pas les agents directs ou les familiers immédiats est immense et ses résultats, incertains. [...] On atteint ainsi une limite possible de notre capacité actuelle de poser et résoudre, théoriquement et pratiquement, le problème posé.

C'est sur l'évolution de ta réponse depuis cette date jusqu'aux développements récents de la TAD que nous souhaiterions que tu interviennes.

Enfin, la lecture de ZDM montre que l'apprentissage de la modélisation est vue comme une compétence en mathématique (*modelling competence*) dans le projet KOM (Niss, 2003 : http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf), articulé autour du cercle de modélisation de Werner Blum. Par le canal de PISA et d'autres mouvements noosphériens au niveau mondial, cette *modelling competence* gagne du terrain, y compris en France (voir le programme de seconde actuel). Lors de la discussion qui suivra ton intervention, nous te solliciterons pour connaître ton avis sur cette évolution, et sur ce que la TAD permet d'en dire.

b) Comme on le voit, le programme proposé n'était pas vide ! Dans ce qui suit, j'ai réuni les notes que j'ai rédigées en vue de l'intervention proposée, qui s'est déroulée comme prévue le 4 décembre dernier. Après avoir beaucoup hésité, j'ai choisi de mélanger, si l'on peut dire, « ordre de découverte » et « ordre d'exposition », même si l'ordre de découverte l'emporte largement. Le titre et le résumé que j'ai dû proposer étaient les suivants (on notera leur prudence) :

Titre : **TAD et modélisation**

Résumé : l'exposé portera sur les notions de modèle et de modélisation telles qu'elles ont été employées jusqu'ici en TAD et montrera leurs liens avec les notions de praxéologie et de PER.

2. Systèmes et modèles

a) L'emploi du mot de *modèle* est en vérité très tôt ubiquitaire dans les travaux auxquels je suis associé. Pour s'en assurer, on pourra par exemple demander au moteur de recherche Google de repérer sur mon site (http://yves.chevallard.free.fr/), bien qu'encore très incomplet, les mots « modèle » et « modélisation » : on verra qu'ils y fleurissent, dans des contextes très divers. Dans les 509 pages du séminaire adressé aux PLC2 de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille pour l'année 2000-2001, par exemple, « modélis » a 100 occurrences exactement.

b) De fait, avant même de rencontrer Guy Brousseau et la didactique des mathématiques (en juin 1976), j'avais créé à l'IREM d'Aix-Marseille un atelier « Mathématiques et interdisciplinarité » (AMI), auquel participait notamment Alain Mercier. De cet atelier sortit en particulier un livre d'une centaine de pages intitulé *Deux études mathématiques sur la parenté* (CEDIC, Paris, 1977), opuscule pour lequel, m'avait-on rapporté à l'époque, Claude Lévi-Strauss en personne avait eu un mot gentil lors d'un entretien avec François Le Lionnais sur France Culture.

c) J'en viens à la notion clé : celle de *système*. C'est là une notion que je prends volontairement aussi *faible* qu'il semble possible : un système est un *objet* (au sens de la TAD) que l'on regarde comme potentiellement composé d'objets – de « composants » – supposés en interrelation et cela de façon plus ou moins intégrée (le bas latin *systema* et le grec *sustêma* dont il dérive renvoient à l'idée d'assemblage). On n'aura pas tort de conclure que tout ou presque peut alors être regardé comme un système.

d) Le minimalisme sémantique qui gouverne l'emploi que je fais du mot *système* est pour moi essentiel. Je resterai minimaliste en introduisant maintenant la notion de *modèle* : un modèle μ d'un système σ est lui-même un système qui permet de produire des connaissances sur σ. Généralement, pour au moins certaines assertions A relatives à σ, on sait *interpréter* A dans μ, et *réciproquement*. Le problème crucial est alors de savoir si, lorsque A_μ est vraie dans μ, alors son interprétation $A_\sigma = A$ est vraie dans σ :

$$\models_\mu A_\mu \stackrel{?}{\Rightarrow} \models_\sigma A_\sigma$$

L'idée est ainsi que, à certains égards, le système σ *se comporte comme* son modèle μ, et réciproquement. Dans le cas le plus général, cependant, une telle supposition demeure conjecturale.

e) Ce qui précède revient à interroger et à « faire parler » μ en lieu et place de σ : faute de pouvoir interroger σ, on interroge μ « à sa place ». Le modèle μ est ainsi promu au statut de « porte-parole » de σ. C'est en ce sens seulement que je dirai que μ *représente* σ ou en *est un représentant* : le mot de représentant a ici la valeur qu'on lui confère quand on parle de représentant diplomatique, de représentation politique d'un pays, etc. Bref, μ est alors considéré « à la place de σ ». Pour tout cela, j'ai beaucoup insisté autrefois sur le fait qu'un modèle d'un système n'a pas à « ressembler » à ce système en un sens naïf du terme : en quoi par exemple l'équation $y = 2x + 7$ « ressemble »-t-elle à la droite d'un plan, qui, dans un certain repère affine de ce plan, passe par les points ayant respectivement pour coordonnées (–2, 3) et (2, 11) ? Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'on espère que le comportement

du modèle nous informera *à certains égards* sur le comportement du système. Ainsi, si l'on se demande si le point de coordonnées (45, 91) est bien sur la droite considérée plus haut, on aura avantage interroger le modèle « analytique » de la droite plutôt qu'à procéder à une inspection graphique de la droite.

f) La notion de modèle utilisée généralise des notions « partielles », classiques en mathématiques, mais davantage contextuelles. Ainsi est-il usuel de dire que la fonction $y = 2x + 7$ « représente » une certaine droite, et que, inversement, cette droite est une « interprétation » (géométrique) de la fonction $y = 2x + 7$. L'intérêt de cette généralisation, on le verra, est notamment d'unifier des points de vue qui sont ordinairement séparées en permettant de désigner aussi bien des modèles de systèmes *mathématiques* que de systèmes *extramathématiques*.

g) Dans tous les cas, l'intérêt fondamental de remplacer σ par μ devrait être clair : on espère que l'interrogation du modèle se révèlera *plus facile* et *plus fiable* que celle du système et que la réponse apportée par μ sera *plus audible* et *plus univoque*, même si l'on subodore que cette réponse n'est – en un sens à préciser – qu'une « approximation » de la réponse qui *pourrait* être celle de σ. Bien entendu, il se peut que, ayant obtenu de σ une réponse par d'autres voies – par la voie expérimentale pratiquée directement sur σ, notamment –, on découvre que la réponse de μ est incompatible avec celle obtenue de σ : on conclura alors que, *du point de vue considéré*, μ n'est pas « un bon modèle » de σ.

3. Systèmes mathématiques

a) J'ai laissé entendre dans ce qui précède que σ pouvait être un système « mathématique ». Il y a là, après le minimalisme de la notion de modèle, un autre point capital : le point de vue développé en TAD, en effet, est que l'activité de modélisation de systèmes (mathématiques) *est au cœur du travail mathématique*, même si – pour des raisons sur lesquelles je vais revenir – la chose n'est pas toujours perçue clairement.

b) Je commencerai par un exemple simple, qui permettra d'illustrer plusieurs notions relatives à l'activité de modélisation. Prenons pour « système » le nombre $\sqrt{2}$. En quoi d'abord, demandera-t-on peut-être, est-ce là un système ? Réponse : c'est bien un objet ; et sa description même désigne en lui plusieurs composants mis en interrelation – le *nombre* 2 et (disons) la *fonction* $\sqrt{\ }$ (ou l'*opération* « racine carrée », la 5e opération de l'arithmétique d'autrefois). Cela noté, considérons l'équation suivante :

$$x = \frac{2 - x}{x - 1}.$$

Cette équation est un « système » (au sens donné à ce terme plus haut) et ce système peut être regardé comme un modèle de $\sqrt{2}$ *en ce sens* que $\sqrt{2}$ en est une solution positive ; on a en effet :

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})} = \sqrt{2}.$$

Voyons alors comment on peut faire « parler » l'équation

$$x = \frac{2 - x}{x - 1}$$

à propos de la question *Q* suivante : que sont les quatre premières décimales de $\sqrt{2}$? Posée au modèle choisi, cette question s'énonce ainsi : que sont les quatre premières décimales d'une solution positive de l'équation

$$x = \frac{2 - x}{x - 1} ?$$

Pour répondre, on va « travailler » ledit modèle. Si $x > 0$ vérifie cette équation, on a

$$\frac{2 - x}{x - 1} > 0,$$

ce qui implique que, soit $2 - x < 0$ et $x - 1 < 0$, soit $2 - x > 0$ et $x - 1 > 0$. Dans le premier cas on devrait avoir à la fois $x > 2$ et $x < 1$, ce qui n'est pas possible. On a donc la seconde paire d'inégalités, qui s'écrit encore

$$1 < x < 2.$$

Ce « résultat » – si x est une solution positive de l'équation, alors $x \in]1, 2[$ – est certes peu spectaculaire, mais la *manière de faire parler* l'équation que l'on a employée mérite d'être retenue. On a en effet

$$x = \frac{2 - x}{x - 1} = \frac{2 - \dfrac{2 - x}{x - 1}}{\dfrac{2 - x}{x - 1} - 1} = \frac{2(x - 1) - (2 - x)}{(2 - x) - (x - 1)} = \frac{3x - 4}{3 - 2x}$$

en sorte qu'on peut conclure, de même, que l'on a $3 - 2x > 0$ et $3x - 4 > 0$ ou $\frac{4}{3} < x < \frac{3}{2}$, c'est-à-dire encore $1{,}33\ldots < x < 1{,}5$. À partir de l'égalité

$$x = \frac{3x - 4}{3 - 2x}$$

on obtient ensuite

$$\frac{3x-4}{3-2x} = \frac{3\,\dfrac{3x-4}{3-2x} - 4}{3 - 2\,\dfrac{3x-4}{3-2x}} = \frac{9x - 12 - 12 + 8x}{9 - 6x - 6x + 8} = \frac{17x - 24}{17 - 12x}$$

et, de là, $\frac{24}{17} < x < \frac{17}{12}$ ou $1{,}4117\ldots < x < 1{,}4166\ldots$ Une itération de plus donne

$$\frac{17x-24}{17-12x} = \frac{17\,\dfrac{17x-24}{17-12x} - 24}{17 - 12\,\dfrac{17x-24}{17-12x}} = \frac{577x - 816}{577 - 408x}$$

et donc $\frac{816}{577} < x < \frac{577}{408}$ ou $1{,}414211\ldots < x < 1{,}414215\ldots$, ce qui permet de répondre à la question proposée : les quatre premières décimales d'une solution positive de l'équation, et donc de $\sqrt{2}$, sont 4, 1, 4, 2 (la cinquième décimale étant 1).

c) Dans le cas précédent, l'intérêt de remplacer le système $\sqrt{2}$ par le modèle

$$x = \frac{2-x}{x-1}$$

tient à ce qu'on peut « travailler » ce modèle de multiples façons. Supposons ainsi qu'il existe $x \neq \sqrt{2}$ vérifiant cette équation ; en posant $\sqrt{2} = \alpha$ pour alléger les écritures, on a alors

$$\frac{x(x-1)}{2-x} = 1 \text{ et } \frac{\alpha(\alpha-1)}{2-\alpha} = 1.$$

Il en résulte que l'on a :

$$1 = \frac{x(x-1)}{2-x} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2-\alpha} = \frac{x(x-1) - \alpha(\alpha-1)}{(2-x) - (2-\alpha)} = \frac{x^2 - \alpha^2 - (x-\alpha)}{-(x-\alpha)} = 1 - (x+\alpha).$$

On a donc $x = -\alpha = -\sqrt{2}$, valeur dont on vérifie aisément qu'elle est bien solution de l'équation considérée. On déduit de là en particulier que la seule solution positive de l'équation est $x = \sqrt{2}$. J'ajoute que ce même modèle permet aussi d'établir que $\sqrt{2}$ est un nombre *irrationnel*. Si en effet, pour une solution x de l'équation, il existait des entiers p et q tels que $x = \frac{p}{q}$ (avec p et q premiers entre eux), on aurait :

$$x = \frac{2-x}{x-1} = \frac{2 - \dfrac{p}{q}}{\dfrac{p}{q} - 1} = \frac{2q - p}{p - q}.$$

Puisque $2q > p$, on devrait conclure alors que $p - q < q$, amorçant ainsi une descente infinie évidemment impossible.

d) Dans plusieurs textes, Marianna Bosch et Josep Gascón ont souligné le phénomène selon lequel l'étude mathématique d'un système $\mu_0 = \sigma$ se traduit généralement par la fabrication d'une chaîne de modèles $(\mu_i)_{1 \leq i \leq k}$ dans laquelle μ_i est un modèle de μ_{i-1}. C'est ainsi que, dans le cas du système $\sqrt{2}$, l'étude du modèle équationnel μ_1 conduit à construire comme suit un modèle μ_2 de ce modèle afin d'accroître la puissance productive du modèle utilisé. Soit d un décimal choisi de façon que $1 \leq d < \sqrt{2}$; on a alors :

$$x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - d^2 = 2 - d^2 \Rightarrow (x - d)(x + d) = 2 - d^2 \Rightarrow x = \frac{2 - d^2}{x - d} - d = \frac{2 - dx}{x - d}.$$

D'une manière évidente, l'équation paramétrique

$$x = \frac{2 - dx}{x - d}$$

est un modèle μ_2 de l'équation numérique initiale μ_1. Cette fois, on en tire que l'on a

$$d < x < \frac{2}{d}$$

ou $x \in \left]d, \frac{2}{d}\right[$. En passant, on peut noter une valeur approchée « remarquable » de x : le milieu de l'intervalle $\left]d, \frac{2}{d}\right[$, soit

$$x_H = \frac{1}{2}\left(d + \frac{2}{d}\right),$$

avec $|x - x_H| < \frac{2}{d} - d$, majorant qui décroît lorsque d croît en restant inférieur à x. Mais on peut reprendre alors avec μ_2 le travail accompli sur μ_1 ; il vient :

$$x = \frac{2 - dx}{x - d} = \frac{2 - d\dfrac{2 - dx}{x - d}}{\dfrac{2 - dx}{x - d} - d} = \ldots = \frac{(2 + d^2)x - 4d}{2 + d^2 - 2dx}.$$

On en déduit alors que $\frac{4d}{2 + d^2} < x < \frac{2 + d^2}{2d}$ avec donc

$$x_H(d) = \frac{1}{2}\left(\frac{4d}{2 + d^2} + \frac{2 + d^2}{2d}\right) = \frac{(2 + d^2)^2 + 8d^2}{4d(2 + d^2)}$$

et

$$\delta = \frac{2 + d^2}{2d} - \frac{4d}{2 + d^2} = \frac{(2 + d^2)^2 - 8d}{2d(2 + d^2)} = \frac{(2 - d^2)^2}{2d(2 + d^2)}.$$

Pour $d = 1{,}4$, par exemple, on a

$$x_H(1{,}4) = \frac{(2 + d^2)^2 + 8d^2}{4d(2 + d^2)} = \frac{3{,}96^2 + 8 \times 1{,}96}{4 \times 1{,}4 \times 3{,}96} = 1{,}4142135\ldots$$

et $\delta = \dfrac{0{,}04^2}{2 \times 1{,}4 \times 3{,}96} = 1{,}443\ldots \times 10^{-4}$.

e) J'arrêterai là l'étude de l'exemple précédent pour en tirer quelques conclusions. Ce qui me paraît émerger à travers cet exemple est bien ce qui fait l'intérêt de regarder l'activité mathématique – même élémentaire – comme activité de modélisation, où l'on crée des modèles et où on les travaille pour les faire parler : à savoir le sentiment non pas de simplement visiter des monuments tout faits mais bien de découvrir des situations, des points de vue, des manières inédites (ou partiellement inédites) d'interroger le réel mathématique en ouvrant des chemins non encore parcourus. Pour le dire autrement : on peut simplement *analyser de l'extérieur* l'activité mathématique comme activité de modélisation ; mais si l'on *vit de l'intérieur* l'activité mathématique comme activité de construction et de travail de modèles, on vit alors une autre activité mathématique.

f) Tout ce qui précède n'est pas récent. C'est ainsi que, dans le séminaire adressé aux PCL2 déjà mentionné figure entre autres le passage suivant (qui s'insère dans un développement plus vaste, qu'on me pardonnera de ne pas reproduire en entier) :

> • Ainsi, associer à la ***formule*** $h = \sqrt{2xr+x^2}$ la ***fonction*** définie par $h(x) = \sqrt{2xr+x^2}$, c'est modéliser un système relevant ***de l'algèbre élémentaire*** par un modèle relevant ***de l'analyse élémentaire***, ce qui permet alors de disposer de notions et de moyens de travail jusque-là non disponibles (monotonie, dérivabilité, etc.).
>
> • De même, récrire l'expression
>
> $$h^2(x)(r+x+1)^2 - h^2(x+1)(r+x)^2$$
>
> sous la forme
>
> $$A(B+C) - (A+C)B$$
>
> revient à ***modéliser la première expression par la seconde***. Celle-ci peut être regardée comme une « miniature » de la première : elle est en tout cas ***plus facile à travailler***, et fournit donc à peu de frais l'information recherchée à propos du « système » étudié.
>
> • C'est le même principe de miniaturisation qui, dans l'étude des variations de la fonction φ_u, avait conduit – très classiquement – à modéliser cette fonction par une autre fonction, sa dérivée φ_u'.

– Cette extension de la notion de modélisation permet notamment une ***vision d'ensemble*** de l'activité mathématique, qui peut dès lors être décrite – de manière toute formelle, certes – par une suite (finie) de systèmes, (σ_n), où σ_n est un modèle de σ_{n-1}, les systèmes σ_n étant « mathématiques », à l'exception peut-être de σ_0, dont la nature seule spécifie les cas d'interventions extramathématiques des mathématiques :

$$\sigma_0 \hookrightarrow \sigma_1 \ldots \hookrightarrow \sigma_{n-1} \hookrightarrow \sigma_n \hookrightarrow \ldots$$

– Ce schéma formel suggère que l'on retrouve, en toute activité mathématique, l'essentiel des caractères reconnus plus haut aux ***interventions extramathématiques des mathématiques***. En particulier, que le système de départ soit ***ou non*** de nature mathématique, l'approfondissement de l'étude suppose, en règle générale, la mobilisation de ressources mathématiques plus nombreuses ou, du moins, plus avancées. Inversement, une même situation du monde – du monde mathématique ou du monde extramathématique – pourra être « exploitée » à des niveaux d'approfondissement différents, et apparaîtra alors comme lieu d'intervention de différents outils mathématiques.

g) Voici maintenant un extrait du Séminaire adressé aux PCL2 durant l'année 2002-2003. On y verra la plasticité de la conception du travail mathématique que permet le concept de modèle. On y notera surtout que « modéliser » *n'a pas de sens univoque* (j'y reviendrai) : ce que l'on fait sous ce nom dépend de la question à laquelle on veut répondre, qui spécifie le type du modèle cherché.

③ Une part essentielle des apprentissages mathématiques secondaires a pour objet la maîtrise de semblables ***mises en relation*** entre les domaines ***numérique***, ***géométrique***, ***algébrique***, ***analytique***, ***probabiliste***, etc. Bien entendu, la relation de système à modèle $(\sigma \hookrightarrow \mu)$ continue de décrire adéquatement la structure du travail mathématique ***même lorsqu'il n'y a pas changement de cadre***. Ce cas est fréquent, notamment dans la phase de ***travail du modèle*** : c'est ce qui se produit par exemple lorsque, au cours d'un calcul algébrique, on est amené – comme on l'a fait lors de la séance 20 – à « poser » telle expression égale à telle autre.

❶ Ce ***jeu avec les modèles*** sera illustré ici à propos du système σ qu'est l'expression numérique $A = \dfrac{1}{(\sqrt{2}-1)^3}$. […]

……

④ L'exemple précédent montre en particulier que le travail mathématique à accomplir sur un modèle dépend de la « nature » du modèle. Inversement, si l'on fixe *a priori* le style de travail que l'on entend accomplir sur le modèle, il convient d'établir un modèle d'un type approprié.

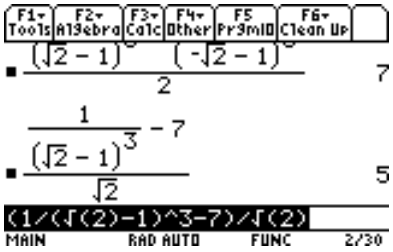
❶ Supposons ainsi que, dans l'exemple précédent, à la place du travail ***algébrique*** réalisé, on envisage d'accomplir un travail ***numérique***, et cela à l'aide d'une ***calculatrice***. En d'autres termes, supposons qu'on se propose de calculer ***l'expression canonique*** $a + b\sqrt{2}$ de $A = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^3}$ ***à l'aide d'une simple calculatrice***. La chose est-elle possible ?

❷ La question cruciale est ici : comment – si on le peut – exprimer les coefficients a et b au moyen de l'expression A ? La réponse consiste à remplacer le modèle μ précédemment utilisé par le ***modèle*** μ_{calc} ci-après :

$$\begin{cases} A = a+b\sqrt{2} \\ a = \dfrac{A(\sqrt{2})+A(-\sqrt{2})}{2} \\ b = \dfrac{A-a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Cette modélisation est fondée essentiellement sur le résultat technologique (dont la démonstration est laissée au lecteur) selon lequel, si $A(\sqrt{e})$ est une expression contenant $\sqrt{e}$ (avec e entier naturel non carré parfait), et si $A(\sqrt{e}) = a+b\sqrt{e}$, alors on a : $A(-\sqrt{e}) = a-b\sqrt{e}$.

❸ Le travail « à la calculatrice » requis est illustré sur le contenu d'écran reproduit ci-après :



On obtient bien : $A = 7+5\sqrt{2}$.

4. La modélisation et l'enseignement

a) Comment se fait-il que le regard jeté ordinairement sur l'activité mathématique scolaire ne permette pas de la voir comme activité de modélisation ? À cela il y a, je crois, une raison simple mais radicale : l'enseignement des mathématiques ordinaire fait travailler les élèves, de façon souvent très guidée, sur des modèles mathématiques *tout faits*, souvent *canoniques*, que ces mêmes élèves n'ont pas eu à construire et dont le problème de la construction reste toujours extérieur au travail de la classe. Pour la racine carrée, ainsi, à un certain niveau d'études, l'élève visitera la *méthode de Newton*, dont l'emblème est la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},$$

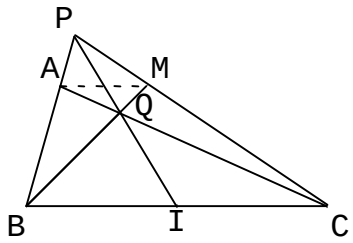
avant de visiter l'*application* de la méthode de Newton au cas où $F(x) = x^2 - 2$, qui donne ici

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

On retrouve ainsi une formule que nous avons vu apparaître au fil d'un parcours « original », ouvert par l'étude du « système » $\sqrt{2}$, et non pas « programmée » par une tradition désignant ce qu'il y a lieu de visiter à tel ou tel niveau des études scolaires.

b) D'une façon générale, dans l'enseignement des mathématiques, on peut considérer trois types de rapports aux modèles et à la modélisation. Dans un *premier type de rapports*, l'élève visite des *modèles tout faits*, que l'ancienneté de leur présence dans le curriculum a naturalisés et qui ne sont donc plus vus comme des modèles qu'il a fallu un jour construire et que l'on pourrait aujourd'hui « discuter », « revisiter », si j'ose dire ! Cet état de choses a *notamment* pour conséquence, je le souligne en passant, que le modèle tend à l'emporter sur le système qu'il prétend modéliser, système qui n'est plus, bien souvent, que le faire-valoir, voire le repoussoir, du modèle. À l'extrême pointe de cette évolution, le modèle devient tout et le système modélisé n'est plus rien : il disparaît. Ainsi en va-t-il aujourd'hui du calcul des probabilités, dont, sauf exception, on semble ne même plus savoir ce qu'il modélise.

c) Un *deuxième type de rapports* fait intervenir des modèles *régionaux* : ceux-là sont rencontrés *tout faits* par les élèves ou étudiants ; c'est en principe leur *emploi* pour fabriquer des modèles *locaux* qui fait l'objet du travail de la classe. Pour tracer une ligne de démarcation entre premier et deuxième rapports, je prendrai un exemple où le modèle régional est la « géométrie analytique » du plan. Voici un énoncé de problème dont la résolution suppose que l'élève fabrique un modèle local :



Soit un triangle ABC ; par le milieu I de [BC] on mène une droite coupant (AB) en P et (AC) en Q. Montrer que le point de rencontre de (BQ) et de (CP) est situé sur la parallèle à (BC) passant par A.

L'ouvrage auquel j'emprunte cet énoncé (en le modernisant) date de 1963 : il s'agit du manuel pour la classe de mathématiques élémentaires intitulé *Géométrie* et sous-titré *Géométrie analytique – Géométrie descriptive*, signé de Joanny Commeau et paru chez Masson dans une collection dirigée alors par Georges Cagnac et Lucien

Thiberge. L'exercice y est proposée (p. 180) dans un chapitre intitulé *Repère affine*, et s'assortit de cette indication bienveillante : *On prendra pour repère* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. On imagine aisément comment un énoncé d'aujourd'hui organiserait une rencontre sévèrement guidée avec un modèle local « donné » du système géométrique en question :

> On prend pour repère $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
> 1. Quelles sont les coordonnées de I ?
> 2. Soit $(p, 0)$ et $(0, q)$ respectivement les coordonnées de P et de Q. Vérifier que la droite (PQ) admet l'équation suivante : $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. En déduire que l'on a : $2pq = p + q$.
> 3. …

Je poursuis librement. Si l'on sait que, de façon générale, la droite passant par les points $U(\alpha, 0)$ et $V(0, \beta)$ admet l'équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

alors on peut conclure que la droite (BQ) admet pour équation $\frac{x}{1} + \frac{y}{q} = 1$ et que la droite (CP) admet de même l'équation $\frac{x}{p} + \frac{y}{1} = 1$, en sorte que les coordonnées de M, point de rencontre de (BQ) et (CP), constituent la solution du système

$$\begin{cases} x + \frac{y}{q} = 1 \\ \frac{x}{p} + y = 1 \end{cases}.$$

La solution de ce système est

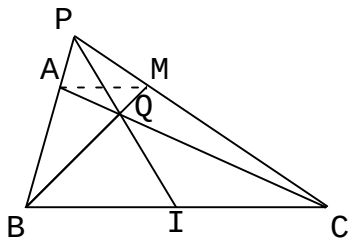
$$\begin{cases} x = \frac{pq - p}{pq - 1} \\ y = \frac{pq - q}{pq - 1} \end{cases}.$$

On a donc :

$$x_M + y_M = \frac{2pq - (p + q)}{pq - 1} = 0.$$

La droite d'équation $x + y = 0$ passe donc par M ; comme elle passe aussi par A(0, 0), c'est la droite (AM). Elle est en particulier parallèle à la droite (BC), dont une équation est $x + y = 1$: (AM) est donc parallèle à (BC).

d) Le *troisième type de rapports* est celui où l'on doit situer ce qui est présenté usuellement, dans la noosphère internationale, comme le *mathematical modeling*. (On écrit *modelling* en anglais britannique et canadien, *modeling* en anglais américain.) À ce niveau, on ne donne à l'élève qu'une description de base du système σ ainsi bien sûr que la question *Q* que l'on se pose à son sujet. Le cadre de la modélisation, le modèle lui-même, en particulier ce qu'on doit prendre en compte dans le système, *font ici partie du problème*. Dans le cas du problème de géométrie vu plus haut, ainsi, le choix du repère et même le choix de l'outil analytique seraient à la charge de l'élève (ou de la classe) : tout en principe est à faire ! Par exemple, pour qui connaît le théorème de Ceva, le système géométrique proposé dans l'énoncé gagne à être modélisé par le triangle PBC dans lequel les droites (PI), (CA), (BM) sont regardées comme des céviennes particulières, ce qui conduit à l'égalité $\frac{CI}{IB}\frac{AB}{AP}\frac{MP}{MC} = 1$; puisque I est le milieu de [BC], on arrive à l'égalité $\frac{PM}{MC} = \frac{PA}{AB}$, d'où il résulte (d'après le théorème de Thalès) que (AM) est parallèle à (BC).



e) J'illustrerai le cas de systèmes extramathématiques avec un exemple très simple que j'emprunte à un auteur espagnol, Sixto Ríos (1913-2008), regardé comme "el padre de la estadística española" (voir l'article qui lui est consacré dans *Wikipedia*). Dans son livre *Modelización* (Alianza Universidad, 1995), il propose de modéliser la circulation d'un cycliste qui veut aller de Valladolid à Cuéllar pour revenir ensuite à Valladolid. Ríos suppose d'abord des conditions qui sont les suivantes :

> B_1) Su velocidad en carretera horizontal y bien acondicionada sin viento es 30 km/hora.
> B_2) Hace un poco de viento en la dirección y sentido de la marcha.
> B_3) Puede mantenerse en forma normal sin fatiga durante unos 100 km.
> B_4) La temperatura en la tarde va a ser 22 º y, probablemente, no lloverá.
> B_5) La carretera está en buen estado y es prácticamente horizontal en todo el trayecto.

En outre, il imagine que le cycliste parvient à la conclusion que, lorsqu'il roulera contre le vent, sa vitesse sera diminuée d'environ 3 km/h, et augmentée d'autant quand il roulera avec le vent dans le dos. Tout un ensemble de « simplifications » précisées et commentées par l'auteur conduisent à écrire plus généralement la formule suivante donnant la durée *t* du trajet aller-retour en fonction de la distance *d* entre les deux villes, avec un vent de vitesse v, pour une vitesse constante sans vent du cycliste égale à *c* :

$$t(d) = \frac{d}{c+v} - \frac{d}{c-v}.$$

Cette formule constitue-t-elle un « bon modèle » du système étudié ? Une propriété remarquable du modèle est la suivante :

$$t(d) \propto d.$$

En d'autres termes, la durée du trajet est proportionnelle à la longueur du trajet (alors même que celui-ci comporte deux étapes parcourues à des vitesses différentes). Cela permettra de confronter *par l'expérience* le modèle et le système, en donnant à d des petites valeurs, de l'ordre de quelques kilomètres. J'ajoute que, bien entendu, le travail de modélisation réalisé s'inscrit dans un modèle régional, celui de la cinématique la plus élémentaire ; mais le « choix du modèle », sa construction sont supposées ici *à la charge de l'élève* (ou, ici, du cycliste évoqué par l'auteur). Par contraste, on peut imaginer la réduction que subirait ce problème dans le cadre scolaire traditionnel : il prendrait la forme d'un énoncé que l'on peut imaginer proche du suivant.

> Un cycliste fait un aller-retour entre une ville A et une ville B distantes de 50 km. À l'aller, il aura le vent dans le dos et roulera à une vitesse constante de 33 km/h ; au retour, il aura le vent de face et roulera à une vitesse constante de 27 km/h.
>
> 1. Quelle sera la durée de l'aller-retour ?
>
> 2. En fait, au tiers du trajet de A vers B, il s'aperçoit que l'orage gronde au loin et il décide en conséquence de revenir vers A aussitôt. Est-il vrai que cet aller-retour aura duré alors le tiers du temps qu'il lui aurait fallu pour aller jusqu'à B et en revenir ?

Ici, le système n'est plus qu'une évocation lointaine : on travaille directement sur le modèle *imposé* par l'énoncé, modèle qui n'est plus vu comme tel mais comme qui devient une réalité d'opérette. Surtout, il n'y a plus, ici, de travail de modélisation ; il y a seulement le travail d'un modèle qui n'en est pas un, parce qu'il passe pour la réalité.

5. Systèmes extramathématiques et codisciplinarité

a) Je reviendrai plus loin sur la perspective dans laquelle la TAD situe aujourd'hui les trois types de rapports à la modélisation et aux modèles que je viens de brosser. Mais je vais maintenant m'arrêter sur une difficulté engendrée par des contraintes scolaires et extrascolaires et pesant sur l'écologie de la modélisation de systèmes *extramathématiques* dans la classe

de mathématiques. J'évoquerai ici, trop rapidement sans doute, deux ordres de contraintes que l'on peut réunir en disant qu'il n'existe pas aujourd'hui, de façon régulière, dans l'enseignement secondaire français, de lieu ouvert à la *codisciplinarité*.

b) Un premier ordre de contraintes tient à ce que, dans la classe de mathématiques *d'aujourd'hui*, des objets regardés comme non mathématiques ne sauraient vivre longtemps, sinon sous une forme ancillaire (tels les jeux de cartes en « probabilités »). C'est là une situation qui s'est durcie tout au long du XX^{e} siècle. Pour ne prendre qu'un exemple, voici ce qu'était encore le programme de cosmographie du 24 juin 1948 pour les classes terminales de *Philosophie* et de *Sciences expérimentales* :

Classes de Philosophie et de Sciences expérimentales.

1^{o} Le Ciel et les constellations. – Sphère céleste locale ; verticale et horizon. Coordonnées horizontales ; azimut et hauteur. Théodolite.

Lois du mouvement diurne (explication par la rotation de la Terre) ; équatorial. Sphère des fixes ; axe du Monde : équateur céleste. Méridien astronomique ; points cardinaux.

Angle horaire d'une étoile : temps sidéral. Coordonnées célestes équatoriales : ascension droite et déclinaison. Instrument méridien.

2^{o} La Terre. – Coordonnées géographiques : longitude et latitude. Notions sommaires sur la forme et les dimensions du géoïde.

3^{o} Mouvement apparent du Soleil sur la sphère des fixes ; écliptique. Mouvement diurne du Soleil ; inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes, crépuscules. Saisons.
Année tropique. Calendriers.
Temps universel (T. U.). Temps légal; fuseaux horaires.

4^{o} Le système solaire. – Les Planètes. Système de Copernic ; lois de Klépler [*sic*] ; loi de Newton.
Les planètes principales. Leurs distances moyennes au Soleil.
Dimensions du Soleil et des planètes. Description physique des planètes. Comètes, météores et météorites.

5^{o} La Lune. – Révolution sidérale. Phases ; révolution synodique. Rotation. Description physique.
Notions sur les éclipses de Lune et de Soleil. Le saros.

6^{o} Constitution physique du Soleil : photosphère, taches, chromosphère, protubérances, éruptions, couronne solaire.

7^{o} Les étoiles. – Leurs distances à la Terre.
Étoiles doubles. Étoiles variables. Céphéïdes. Novae.
La galaxie. Nébuleuses galactiques et extragalactiques. Matière interstellaire.

Tout cela, dois-je le rappeler ?, était confié *au professeur de mathématiques*. Mais ce programme marque en vérité un *recul substantiel*, contre lequel des auteurs de manuels fort connus – Roland Maillard et Albert Millet – protestent énergiquement dans la préface de l'édition de 1953 (chez Hachette) de leur *Cosmographie* pour lesdites classes, en indiquant ce qu'a été leur ligne de résistance à l'agression contre ce qu'ils regardent alors comme une partie intégrante de leur discipline, les mathématiques :

> Le programme de Cosmographie, commun aux classes de *philosophie* et de *Sciences Expérimentales,* est réduit au minimum de ce qu'un homme cultivé ne peut ignorer.
>
> En comparant ce programme à celui de la classe de Mathématiques, on se rend compte de suppressions pour lesquelles aucun doute n'est permis ; par exemple : le *nivellement*, la *représentation plane d'un hémisphère terrestre*, la *précession des équinoxes*, *l'année sidérale*, ne font pas partie du programme des classes de Philosophie et de Sciences expérimentales.
>
> Mais on peut hésiter devant d'autres suppressions. Comment parler de la *constitution physique du Soleil* en ignorant tout du *spectre solaire* ? Et peut-on donner une idée de la *distance des étoiles à la Terre* sans quelques notions sur la *magnitude des étoiles* et sur les *spectres stellaires* ?
>
> Les questions nettement supprimées n'ont pas été traitées dans ce Cours ; celles dont le libellé a disparu mais qui nous ont semblé nécessaires à la bonne compréhension d'autres parties du programme ont été exposées succinctement.

C'est là, à l'évidence, un état de la cartographie – évolutive ! – des disciplines scolaires qui surprendra plus d'un professeur d'aujourd'hui, qu'il professe « les mathématiques », « la physique et la chimie » ou « les SVT »…

c) L'autre ordre de contraintes que j'ai annoncé n'est que le revers de l'avers que je viens d'évoquer : de même que des objets « non mathématiques » ne sauraient vivre que de façon plus ou moins clandestine dans la classe de mathématiques, de même les objets *réputés relever*, scolairement (et déjà parfois « savamment »), de telle autre discipline enseignée (physique, chimie, biologie, géologie, géographie, etc.) ne sauraient, pour les desservants de cette discipline, être « manipulés » légitimement, au double plan épistémologique et didactique, par des agents enfermés dans leur habit strictement coupé de « mathématiciens ». Aujourd'hui encore, les corporatismes disciplinaires, ce que j'ai appelé aussi, plus crûment, les « ethnicismes disciplinaires », portent leurs agents à regarder comme de leur devoir de *soupçonner* le membre de l'autre ethnie qui prétend s'affubler d'emblèmes « disciplinaires » qui ne sont pas les siens. Cette *idiotie*

disciplinaire – je prends idiotie au sens grec du mot, bien entendu – a sans doute son utilité. Par exemple, elle oblige les « mathématiciens » à croire qu'ils seraient « compétents » en mathématiques, les physiciens-chimistes à penser qu'ils seraient compétents en physique et chimie – et plus encore qu'ils seraient *seuls* compétents en ces matières –, etc. Ces soupçons croisés, ordinairement réservés aux élèves, se manifestent en l'endroit des membres des autres ethnies disciplinaires comme une seconde nature : ces « mathématiciens » ne confondent-ils pas *densité* et *masse volumique* ? Et d'ailleurs savent-ils *vraiment* ce qu'est la masse volumique ? Etc.

d) On connaît la recette employée lorsqu'on veut tenter d'atténuer les rigueurs de ces impérialismes épistémologiques têtus : se mettre à deux professeurs (par exemple en TPE), chacun se portant implicitement garant de l'autre, et autorisant l'autre à prendre part à une activité « bidisciplinaire » pour laquelle il n'a pas institutionnellement qualité. Il s'agit là sans doute d'un moyen d'ébranler les interdictions disciplinaires croisées qui n'est pas à négliger. Mais cela reste bien loin d'une configuration véritablement codisciplinaire, où l'exigence n'est pas tant la présence d'un « physicien », d'un « biologiste » ou d'un « mathématicien » par exemple que la disponibilité de *connaissances* adéquates en physique, en biologie ou en mathématiques. La figure stérilisante du « commissaire disciplinaire », qui hante la culture épistémologique actuelle de l'enseignement secondaire et supérieur, nous pouvons espérer qu'elle dépérisse. Du moins devons-nous apprendre collectivement à nous émanciper de sa tutelle.

6. Mathématicités

a) À partir de quand a-t-on un modèle d'un système ? Réponse : dès lors qu'on « a » le système, c'est-à-dire dès qu'on l'évoque à travers l'usage d'ostensifs, car *le système est le premier de ses modèles*. Pour beaucoup de gens, ainsi, il y a un système qui a nom « l'opinion publique » – même si, pour Pierre Bourdieu, « L'opinion publique n'existe pas » (1972). À propos d'un modèle outrageusement simplifié de ce système, je cite Sixto Ríos :

> Si consideramos como sistema *S* la opinión pública de un país, que va pasando en épocas sucesivas de posiciones radicales a conservadoras y viceversa, un modelo *M* de *S* puede ser el movimiento de un péndulo…

Bien entendu, le modèle choisi aurait pu être aussi bien (ou aussi mal) un essuie-glaces de voiture. Cela noté, Ríos poursuit ainsi :

> … un modelo *M* de *S* puede ser el movimiento de un péndulo (se trata de un modelo *cualitativo* o *verbalista*). En estos modelos las relaciones entre las

variables no se expresan cuantitativamente, lo que es, en general, une imperfección del modelo.

Le modèle en question nous dit que l'opinion publique va changer – passer de l'état « conservateur » à l'état « radical », ou l'inverse. Mais, par exemple, il ne nous dit pas dans *combien de temps* elle le fera, ou *avant* combien de temps, ce qui est une « imperfection » de ce modèle en ce sens qu'il ne peut répondre à la question : c'est là une connaissance que le modèle en question semble incapable de produire.

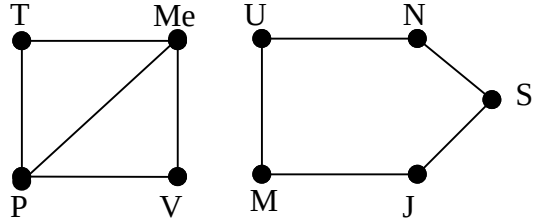
b) Pour qu'un modèle soit « mathématique », faut-il qu'il contienne des composants « quantitatifs » ? Remarquons que le modèle du pendule contient un tel composant : le *nombre d'états* – pas trois, par exemple, mais deux – entre lesquels il prétend que le système *S* va osciller. C'est là, pourra-t-on penser, le niveau zéro de la « mathématicité ». Mais je prendrai au sérieux ce qui peut apparaître d'abord comme une boutade, en considérant qu'il y a « de la mathématicité » dès lors qu'on distingue diverses entités dans le système examiné. Où commence le mathématique ? Je me refuse à tracer une frontière absolue. Voici un exemple que je tire du séminaire déjà évoqué.

Nous sommes en 2951. Un voyageur *x* souhaite aller de la Terre sur Mars. Dans un catalogue, il repère une agence de voyages qui propose les liaisons régulières suivantes : Terre-Mercure, Pluton-Vénus, Terre-Pluton, Pluton-Mercure, Mercure-Vénus, Uranus-Neptune, Neptune-Saturne, Saturne-Jupiter, Jupiter-Mars et Mars-Uranus.

……

• Un « mathématicien praticien » *x** qui ne connaîtrait que les mathématiques de l'enseignement scolaire actuel ne saurait guère vers quel type de modèles « mathématiques » se tourner…

• Le type de modèles nécessaire existe pourtant : le modèle approprié est ici un ***graphe***, et plus précisément le graphe des itinéraires des navires spatiaux. Les ***sommets*** de ce graphe correspondent aux planètes et les ***arêtes*** indiquent les itinéraires des navires entre les planètes :



• Il suffit alors d'***observer*** ce modèle pour répondre à la question posée. Le modèle μ obtenu ***montre*** que l'énoncé A_μ = « Il est possible d'aller du point T

au point M sur le graphe » est ***faux*** : il n'existe pas de lien entre les deux sous-ensembles de sommets { T, P, V, Me } et { Ur, Ma, J, S, N }. L'énoncé A_σ = « Il est possible d'aller de la Terre à Mars par cette l'agence de voyages » est donc lui-même faux.

c) Bien entendu, dans la vision usuelle des mathématiques, un seuil est franchi lorsque des variables quantitatives sont dégagées et des relations entre elles établies. Voici un autre extrait encore du séminaire 2000-2001 des PLC2 de Marseille :

– En cela le mathématicien paraît se distinguer du commun des mortels... Dans l'Égypte ancienne, un contremaître ayant à distribuer leur ration de pains à ses ouvriers ne pouvait guère opérer qu'ainsi (C. Grimberg, *Histoire universelle*, tome 1, Marabout Université, Paris, 1963, pp.130-131) :

« Il [faisait] ranger les ouvriers sur un rang et [donnait] à chacun un pain, puis un autre, jusqu'à épuisement de la provision. Si à la dernière distribution, quelques hommes ne [recevaient] rien, le contremaître [n'avait] plus qu'une chose à faire : reprendre la dernière distribution et diviser les pains jusqu'à ce que chacun ait reçu une part égale. »

Par contraste, le scribe, faisant usage de l'arithmétique, pouvait ***calculer*** la ration de pain à attribuer à chaque ouvrier. Si, par exemple, il s'agissait de répartir 19 pains entre 8 ouvriers, il était capable d'indiquer au contremaître que chaque homme devait recevoir 2 pains, plus un quart de pain, plus un huitième de pain, information qu'il tirait d'un modèle de la situation que nous écririons

$$\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

L'historien déjà cité commente ce fait dans les termes suivants :

« Les illettrés étaient fort impressionnés par ce scribe qui pouvait calculer la ration quotidienne de chaque travailleur, sans devoir prendre lui-même les pains en main, sans même devoir quitter sa chambre. »

Mais il est important d'observer qu'il existe une mathématique *pré-arithmétique* – celle du contremaître égyptien. Des praxéologies intermédiaires existent d'ailleurs. Imaginons qu'on modélise les ouvriers chacun par un caillou, chaque ouvrier donnant au contremaître un caillou ; le contremaître peut alors opérer avec les cailloux ainsi qu'il le faisait avec les ouvriers eux-mêmes. Un pas encore : il remplace les pains par des tessères ; le travail du modèle ne requiert plus dès lors qu'il manipule les pains mêmes. Même s'il ne sait pas *nommer* le nombre d'ouvriers et le nombre de pains, il aura construit ainsi un modèle dont la mathématicité

n'est pas *nulle*. On peut de même réaliser un partage équitable sans effectuer de division au sens arithmétique du terme. Supposons qu'on ait des bonbons à distribuer entre des enfants ; l'ensemble des bonbons est mis en bijection avec l'ensemble des b, celui des enfants avec l'ensemble des e ci-après : bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb ; eeeeeee. On peut procéder d'une façon évidente pour aboutir à ceci (sur le papier) :

e	e	e	e	e	e	e
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b

Il reste des bonbons : bbbb. Si l'on désigne par ∅ la moitié d'un bonbon, les bonbons restant donneront des moitiés de bonbons en bijection avec l'ensemble de symboles final : bbbb ➘ ∅∅bbb ➘ ∅∅∅∅bb ➘ ∅∅∅∅∅∅b ➘ ∅∅∅∅∅∅∅∅. La distribution des moitiés sera modélisée par :

e	e	e	e	e	e	e
∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅

et il restera une moitié de bonbon : ∅. On pourrait écrire :

bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb

=

e	e	e	e	e	e	e
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b	b
∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅

+

∅

Certes, on est loin encore de pouvoir écrire : $46 = 7 \times \left(6 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$; mais on s'en rapproche…

d) Travailler avec une notion minimaliste de modèle et en même temps avec une idée minimaliste de mathématicité paraît essentiel pour le didacticien, qui analyse en divers contextes (pas seulement à l'école maternelle) des activités mathématiques *in statu nascendi*. Je vais y revenir, mais je donnerai d'abord, ici, un nouvel extrait du séminaire adressé aux PLC2 « marseillais » en 2000-2001 : on y retrouvera que, même à l'école, « le mathématique » se fabrique avec une diversité de matières ostensives.

Déterminer trois nombres dont la somme est 100, tels que le deuxième est égal au premier plus 10, et le troisième est égal au deuxième plus 5.

• On peut évidemment modéliser le système indiqué par le système

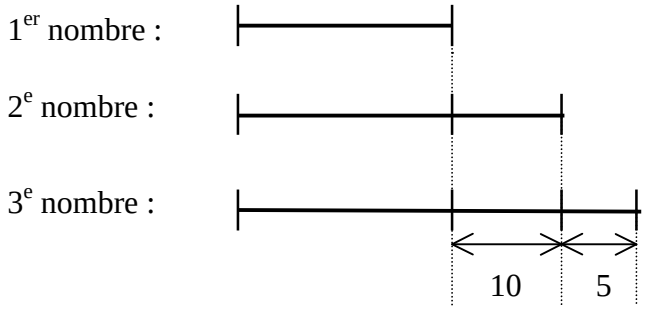
$$\begin{cases} x \text{ est le } 1^{er} \text{ nombre} \\ x + 10 \text{ est le } 2^{e} \text{ nombre} \\ (x + 10) + 5 \text{ est le } 3^{e} \text{ nombre} \\ x + (x+10) + ((x+10) + 5) = 100 \end{cases}$$

L'équation $x+(x+10)+((x+10)+5) = 100$ donne lieu à un travail classique de ***calcul (algébrique)*** :

$$x + (x+10) + ((x+10)+5) = 100 \Leftrightarrow 3x + 25 = 100 \Leftrightarrow 3x = 75 \Leftrightarrow x = \frac{75}{3} = 25$$

Le 1er nombre est donc 25, le 2e est 35, le 3e est 40 : la somme est bien égale à 100.

• Il existe toutefois une modélisation ***pré-algébrique*** – en fait de nature ***numérico-graphique*** – qui a pu être utilisée autrefois dans les premières classes du collège, et qui remplace avantageusement l'équation algébrique précédente :



Ce modèle ***montre*** que trois fois le 1er nombre, plus 10+10+5 est égal à 100 ; par conséquent, trois fois le 1er nombre est égal à 100–25 = 75, et le 1er nombre vaut 75÷3 = 25, le 2e, 25+10 = 35, et le 3e, 35+5 = 40.

– Le travail du modèle est ici, pour l'essentiel, ***discursif*** : il s'effectue surtout avec des ***mots***, sous la forme d'un ***discours***, chose plus typique encore de l'***arithmétique*** traditionnelle, comme l'illustre le problème suivant, où le modèle ne se distingue pas du système.

On veut payer 100 F avec 32 pièces de 2 F et 5 F. Combien devra-t-on donner de pièces de chaque espèce ?

La « solution arithmétique traditionnelle, qui procédait par application de la « règle de fausse position », prenait la forme du travail discursif suivant, aujourd'hui oublié :

Supposons qu'on donne 32 pièces de 2 F. On verserait ainsi 32 fois 2 F, soit 64 F, et il manquerait donc 100 F moins 64 F, soit 36 F.

Si on remplace alors une pièce de 2 F par une pièce de 5 F, la somme versée augmentera de 3 F.

Pour qu'elle augmente de 36 F, « il faut employer autant de pièces de 5 F qu'il y a de fois l'augmentation due à une pièce (3 F) dans l'augmentation totale (36 F) », soit 36 divisé par 3 ou 12.

Il faut donc verser 12 pièces de 5 F, et 32 moins 12, égale 20 pièces de 2 F.

On a bien : 12 fois 5 F plus 20 fois 2 F égale 100 F.

7. *Mathematical modeling* et TAD

a) À l'époque où est parue, à l'IREM d'Aix-Marseille, la brochure intitulée *Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche* (1989), l'idée que l'école pourrait un jour offrir un habitat stable à une pratique de la modélisation mathématique était bien présente, mais le point de vue sur lequel se concluait notre travail demeurait dubitatif. Je reproduis à cet égard quelques-unes des 35 thèses formulées à ce propos dans le chapitre V du compte rendu de notre recherche.

Thèse 16

Il existe aujourd'hui en divers pays, et notamment aux États-Unis, un mouvement, attesté par de nombreuses publications, en faveur de l'enseignement de la modélisation, ou, encore, de l'enseignement des mathématiques (et en particulier des mathématiques appliquées) par la modélisation. Il ne semble pas qu'un mouvement analogue, semblablement développé, existe en France à l'heure actuelle. Quoi qu'il en soit, et sans prendre parti sur la question de son intérêt didactique et/ou social, il convient d'examiner les conditions de possibilité de l'introduction d'une telle modification dans le système d'enseignement. Une première condition est celle de la place éventuellement reconnue à un tel enseignement. Il ne saurait s'intégrer à l'enseignement des mathématiques en n'y occupant qu'une place marginale (comme c'est le cas actuellement des problèmes « concrets »), parce qu'il suppose une problématique assez éloignée de la problématique qui prévaut traditionnellement dans cet enseignement et parce qu'il exige un volume horaire important. Il doit, pour exister de manière durable, se voir

reconnu une place pleine et entière, et pour cela obtenir la reconnaissance de sa dignité et de son intérêt. Il doit donc apparaître au moins comme un objet d'enseignement socialement légitime et, éventuellement, socialement souhaité.

Thèse 17

Face à ce problème – qui met en jeu des rapports de forces au sein de la société toute entière –, il existe des stratégies d'évitement, qui tentent d'apporter des solutions locales, traitant les problèmes d'écologie didactiques du savoir sans affronter les problèmes « macro-écologiques » liés à l'insertion du système d'enseignement dans une société donnée. Certaines de ces stratégies sont permanentes et structurelles : il en est ainsi dans les enseignements professionnels ou à finalité professionnelle, à quelque niveau qu'ils soient situés (enseignement des mathématiques financières par exemple). Dans ce cas, un tel enseignement est souvent donné à part, à titre de spécialité justifiée et exigée, non par les demandes de la société en général, mais par les besoins d'un secteur professionnel particulier. En revanche, une autre stratégie consiste à (tenter de) détourner l'enseignement des mathématiques, en promouvant un enseignement « par les modèles ». Il semble qu'en France du moins (mais sans doute aussi en d'autres pays) cela ne soit toléré que dans les filières d'enseignement sur lesquelles le contrôle et la pression des mathématiciens (comme communauté se tenant pour responsable de ce qui s'enseigne sous le nom de mathématiques) se trouvent relâchées (enseignement des mathématiques pour les étudiants en sciences sociales, en biologie, etc.). Enfin, une troisième stratégie consiste à tenter d'intégrer, dans des proportions variables, l'étude et l'emploi de modèles dans un enseignement mathématique globalement traditionnel. Cette troisième solution apparaît encore moins viable à terme que ne l'est la précédente.

Thèse 18.1

Dans tous les cas cependant, il y a une propension à enseigner des modèles – éléments de savoir bien définis et dont l'enseignement peut donc faire l'objet d'une négociation sociale explicite –, plutôt que « la modélisation », activité plus floue, sur laquelle le contrôle social et administratif manque de prises. À rebours de « l'enseignement des modèles » (ou « par les modèles ») , l'activité de modélisation semblerait mieux admise par les mathématiciens (parce qu'elle se rapproche de l'activité mathématique savante, dans laquelle la « modélisation » existe aussi, même si elle porte sur une réalité elle-même mathématique). Mais, bien qu'acceptable dans son principe, cette activité, se référant nécessairement à une réalité extramathématique, pose problème aux mathématiciens, dans la mesure où elle introduit donc du non-mathématique dans un enseignement de mathématiques. En fait, il y a là une difficulté qui n'est pas liée à l'humeur des mathématiciens (elle est ressentie aussi bien par les enseignants et par les élèves), mais, plus profondément, à l'état du champ scolaire du savoir et à son découpage entre les diverses disciplines enseignées.

L'introduction dans l'enseignement de l'activité de modélisation supposerait une redéfinition du découpage en matières enseignées, qui introduirait par exemple une discipline « modélisation mathématique » ayant son statut, ses horaires, ses enseignants , etc. Cela suppose en amont un consensus social assez puissant pour faire apparaître l'activité de modélisation comme une pratique digne d'entrer à l'école, dont l'intérêt fasse à son tour apparaître acceptables au sein de l'école la matière première sur laquelle elle porte et les produits de l'activité de modélisation – les modèles – eux-mêmes.

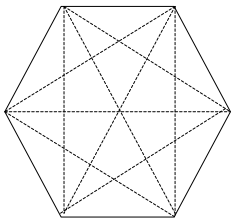
Thèse 18.2

La difficulté à ce qu'apparaisse un tel consensus est liée au fait que la fabrication sociale de modèles aussi bien que leur mise en œuvre dans des pratiques sociales spécifiques sont des faits socialement « cachés ». Hormis en ce qui concerne les « grands modèles » (ceux de la physique, etc.), les pratiques correspondantes manquent en général de dignité scientifique et (donc) sociale, puisque ce sont le plus souvent des ingénieurs, des techniciens ou des chercheurs non mathématiciens – membres invisibles de la communauté scientifique, ou extérieurs à la communauté mathématique – qui en sont les agents. Le blocage est ici consubstantiel à une transparence sociale insuffisante des pratiques de savoir spécifiques au sein de la société.

Thèse 18.3

L'effort à fournir pour atténuer l'opacité qui retranche la plupart des pratiques de savoir spécifiques de la vue de ceux qui n'en sont pas les agents directs ou les familiers immédiats est immense et ses résultats, incertains. De plus, on ignore dans quelle mesure cette opacité n'est pas fonctionnellement nécessaire à la perpétuation de ces pratiques : il se pose ici un problème, théorique et pratique, d'écologie des savoirs au sein de la société (et plus seulement au sein de l'école). On atteint ainsi une limite possible de notre capacité actuelle de poser et de résoudre, théoriquement et pratiquement, le problème étudié.

b) Que peut-on conserver des analyses précédentes vingt plus tard ? Je crois



pouvoir dire que nous avons progressé – je dirai comment dans un instant. Mais je voudrais d'abord souligner, pour écarter tout malentendu, deux points contrastés : 1° la culture scolaire actuelle ne prépare pas les élèves à concevoir et à exploiter des modèles ; 2° pourtant les élèves sont, potentiellement, parfaitement capables de le faire – c'est-à-dire qu'ils peuvent le faire dès lors qu'ils travaillent dans des conditions idoines. Pour illustrer le premier point, je rappellerai une observation de classe présentée lors de la séance 3 du séminaire TAD/IDD 2008-2009 et où l'on voit des élèves sud-africains de 15-16 ans soutenir qu'un hexagone possède *trois* diagonales exactement, au mépris de la figure qu'ils ont pu tracer (voir ci-contre). À l'inverse, les élèves peuvent accéder à

une culture « de la modélisation » : j'évoquerai à cet égard, à gros traits, le travail dit « des boîtes flottantes », dont la narration est au cœur de la brochure *Arithmétique, algèbre, modélisation*. Ce travail a été mené à bien avec des élèves de 3e dans le cadre d'un « atelier de modélisation mathématique ». Le problème était le suivant : si l'on plonge dans l'eau une boîte en plomb, cette boîte peut-elle flotter ? Sous quelles conditions ? Nous disposions de boîtes à base carrée (afin de simplifier la modélisation), ouverte vers le haut (sans « plafond »). Un premier choix de trois boîtes avait été fait de façon à « perturber » certaines hypothèses spontanément émises : la plus petite des trois boîtes coulait, la plus grande flottait. Pour les boîtes qui coulaient, il fut décidé de se procurer des boîtes de même base mais plus hautes. Si la boîte plus haute flottait, cela confirmait l'idée qu'en augmentant la hauteur des parois latérales, on arrivait à faire flotter une boîte. Dans certains cas, pourtant, les boîtes plus hautes disponibles coulaient toutes… On pouvait évidemment faire fabriquer des boîtes plus hautes encore, sans savoir par exemple si l'on n'arriverait pas ainsi à une situation peu gérable expérimentalement à l'aide des moyens disponibles – on ne pouvait imaginer des boîtes de 15 cm de large et de 3 m de haut par exemple. Comment faire alors ? Réponse d'élèves : « Par le calcul ! » En d'autres termes, il fallait fabriquer, non pas des boîtes, mais un modèle « mathématique », ici algébrique. Si L est le côté de la base, et H la hauteur, la paroi en plomb a pour aire

$$L^2 + 4\,LH$$

tandis que le volume de l'eau déplacée pour un « enfoncement » X est L^2X. Désignons par m la masse surfacique du matériau utilisé pour les boîtes, par u la masse volumique de l'eau ; le principe d'Archimède conduit à l'égalité

$$uL^2X = m(L^2 + 4\,LH)$$

et on a donc : $X = \frac{m}{u} + 4\,\frac{m}{uL}\,H$. Pour que la boîte flotte, il faut que l'on ait $X < H$, soit $\frac{m}{u} + 4\,\frac{m}{uL}\,H < H$, ce qui équivaut à $\left(1 - 4\,\frac{m}{uL}\right)H > \frac{m}{u}$. Ce résultat livrait une surprise : pour que l'inéquation ait une solution positive, il est en effet nécessaire que l'on ait

$$1 - 4\,\frac{m}{uL} > 0$$

soit encore $L > 4\,\frac{m}{u}$. En d'autres termes, si la boîte a une base carrée *trop petite*, elle ne pourra *jamais* flotter, *quelle que soit sa hauteur*. (Nous avions en l'espèce $\ell = \frac{m}{u} \approx 1{,}74$ cm et donc $4\ell \approx 6{,}96$ cm.) Le travail de l'atelier, que

je ne saurais résumer ici, mettait ainsi au jour un résultat que nous n'avions pas anticipé. Un autre résultat était le suivant : alors qu'une photo (sans décor) d'une boîte ne permet pas de connaître sa taille, mais seulement ses proportions (est-elle large de 10 cm et haute de 12, ou de 50 et de 60, ou de 120 et de 144 ?), la photo (sans décor) d'une boîte *plongée dans l'eau* permet de déterminer sa vraie taille : si l'on connaît le rapport X/H, en effet, comme

$$X = \frac{m}{u} + 4\,\frac{m}{uL}\,H = \ell + 4\ell\,\frac{H}{L}$$

on a $H = \frac{1}{X/H}\,X = \frac{1}{X/H}\left(\ell + 4\ell\,\frac{H}{L}\right)$ d'abord et ensuite $L = H\,\frac{1}{H/L}$. Bien d'autres aspects du travail accompli mériteraient d'être soulignés, par exemple le fait que, sans qu'on le leur demande, mais pour des raisons d'utilité pratique, les élèves mémorisaient les relations affines obtenues, qu'ils pouvaient restituer de mémoire lors de la séance suivante, telle celle-ci (qui correspond à L = 15 cm) : X = 0,464 H + 1,74.

c) L'étude des boîtes flottantes était en vérité ce que nous appelons maintenant un *parcours d'étude et de recherche*, un PER – un PER codisciplinaire. Un tel parcours est la réalisation concrète de l'étude d'une question Q, ou, comme on dit aussi, d'une enquête sur Q. Dans l'enquête sur les boîtes flottantes, la question Q était : « Une boîte en plomb plongée dans l'eau peut-elle flotter ? Sous quelles conditions ? » Le schéma de base symbolisant une telle enquête est, on le sait, celui-ci :

$$S(X\,;\,Y\,;\,Q) \hookrightarrow R.$$

Dès qu'une question Q est posée devant une communauté d'étude [X, Y], potentiellement une enquête se profile qui suivra tel ou tel parcours d'étude et de recherche. Mais comment expliquer l'émergence de la notion de PER par rapport à la notion de « modélisation mathématique » ? Cet avènement se comprend à la lumière d'une analyse qui *prolonge en la rectifiant* la perspective dessinée par les thèses de 1989. Le destin scolaire de la modélisation de systèmes extramathématiques ne saurait s'expliquer *seulement* par la nature non mathématique des systèmes à modéliser : cela, on peut l'inférer du fait que le destin scolaire de la modélisation de systèmes *mathématiques* n'est pas meilleur, cette modélisation n'existant qu'à travers des vestiges, l'étude de modèles tout faits, qui ne sont plus vus comme des modèles. Comment l'analyse développée depuis 1989 rectifie-t-elle les vues de l'époque ? Tout d'abord, elle déplace le centre de gravité de la conceptualisation alors adoptée : la modélisation *n'en est plus l'alpha et l'oméga* ; c'en est seulement un *moyen*, indispensable et indépassable sans doute, mais qui n'en est pas le tout : l'essentiel, c'est le mouvement que désigne le schéma herbartien rappelé plus haut, qui prend son essor à partir

d'une question *Q* posée et reçue. Quel est alors le rôle de la modélisation ? La réponse tient en peu de mots : pour fabriquer une réponse *R* à la question *Q*, on doit construire un ou des modèles du type de systèmes auxquels la question *Q* se rapporte. Ce déplacement capital fait apparaître crûment que « modéliser un système » *n'a de sens univoque* : on modélise un système *pour* répondre à une certaine question *Q* relative à ce système : le modèle à construire *dépend de la question* à laquelle il doit aider à répondre. Les notions solidaires d'enquête et de PER concrétisent ce déplacement.

d) Pourquoi l'évolution récente au sein de la noosphère internationale a-t-elle promu le *mathematical modeling* en en faisant une réalité en soi et pour soi – une hypostase ? C'est à mes yeux le symptôme majeur de la résistance qu'oppose, dans nos sociétés, ce que j'ai appelé le *paradigme scolaire de la visite des savoirs*, typique des sociétés héritières de l'Ancien Régime et qui définit le contrat du professeur avec la société en termes de savoirs visités avec ses élèves (et qui, ajouterai-je, regarde le chercheur comme un « savant », celui qui sait, et non comme celui *qui questionne et tente de répondre*). C'est là un paradigme de l'étude scolaire qui façonne les élèves en *spectateurs*, à qui l'on montre les savoirs, à qui l'on donne un petit rôle dans le spectacle du savoir, mais que l'on maintient à distance de ses tenants et aboutissants – motivation, utilité, usages. Mais à quoi résiste le paradigme de la visite des savoirs ? À une évolution planétaire (quoique inégalement développée) vers ce que j'ai appelé le *paradigme de questionnement du monde* – lequel, de ce fait, tarde à émerger. Or c'est ce paradigme seulement qui *permettrait* d'« enseigner par PER », et cela parce qu'il *obligerait* à enseigner ainsi, le contrat du professeur avec la société s'énonçant dès lors en termes de *questions étudiées* (et non plus de savoirs visités), comme il en va d'un programme de recherche.

e) Bien entendu, le passage au paradigme de questionnement du monde s'accompagne de ruptures significatives avec la culture dominante, celle de la visite des savoirs. Ainsi la vénération quasi fétichiste des « savoirs » perd-elle sa légitimité : si les savoirs et autres œuvres sont plus que jamais des moyens précieux des enquêtes à mener, ils cessent d'être « intouchables ». Le schéma herbartien réduit présenté plus haut s'écrit de façon semi-développée

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightharpoonup M] \hookrightarrow R.$$

où *M* est le milieu didactique, lequel s'écrit lui-même

$$M = \{\, R_1^\diamondsuit,\, R_2^\diamondsuit,\, \ldots,\, R_n^\diamondsuit,\, O_{n+1},\, \ldots,\, O_m \,\}.$$

Cette « formule » indique que *M* sera fait de *réponses* $R^{\diamondsuit}_1$, $R^{\diamondsuit}_2$, …, $R^{\diamondsuit}_n$ existant « toutes faites » (dans la culture courante) à la question *Q* et des « œuvres » O_{n+1}, …, O_m regardées comme des *outils* de travail pour construire la réponse attendue. Cette réponse elle-même sera alors notée $R^{\heartsuit}$ pour signifier qu'elle a été construite pour « vivre » sous certaines contraintes et dans certaines conditions (à savoir les conditions et contraintes inhérentes au projet Π dans le cadre duquel la question *Q* a surgi). Le bilan du travail du système didactique pourra alors s'écrire ainsi (c'est le schéma herbartien « développé ») :

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrow \{\, R^{\diamondsuit}_1,\, R^{\diamondsuit}_2,\, \ldots,\, R^{\diamondsuit}_n,\, O_{n+1},\, \ldots,\, O_m \,\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}.$$

Aller « regarder » les réponses $R^{\diamondsuit}$ et les œuvres *O* existant dans la culture est traditionnellement *prohibé* dans le paradigme de la visite des savoirs – où l'on ne saurait avoir avec elles qu'un *commerce strictement contrôlé* – alors que c'est là une obligation – à titre heuristique ou vérificatoire – dans la culture de questionnement du monde. Bien entendu, la mésogenèse, qui n'est plus ici l'apanage du professeur, suppose des choix : cela vaut-il la peine d'aller examiner telle réponse $R^{\diamondsuit}$ ou de prendre le temps d'étudier telle œuvre *O* au lieu de « chercher » directement ? Éternelle question, que j'illustrerai par ce souvenir d'Emilio Segrè (prix Nobel de physique en 1959) à propos du physicien italien Enrico Fermi (1901-1954), lauréat du prix Nobel de physique en 1938, dont il fut l'étudiant à l'université de Rome, souvenir que cite l'historienne Françoise Waquet dans son ouvrage *Parler comme un livre. L'oralité et le savoir (XVI^e - XX^e siècle)* publié chez Albin Michel en 2003 (pp. 311-312) :

> Déjà à cette époque [1928], Fermi faisait peu d'usages des livres […]. S'il avait besoin d'une équation compliquée qui se trouvait dans un livre de la bibliothèque, il proposait souvent un pari, disant qu'il dériverait l'équation plus vite que nous ne la trouverions dans un livre. En général, il gagnait […].

En même temps que les créations humaines retrouvent leur rôle de moyens que l'on n'honore vraiment qu'en les mettant en œuvre dans des enquêtes visant l'accroissement de notre équipement praxéologique, les frontières durement imposées par le découpage pluridisciplinaire des ressources didactiques, terre d'élection des ethnicismes épistémologiques et ressort par excellence tant des ostracismes que des autocensures (on ne touche pas à la physique si l'on est déclaré mathématicien sur sa carte d'identité académique, etc.) tendent à s'estomper : on les franchit désormais non parce qu'on aurait obtenu – de qui, d'ailleurs ? – l'autorisation formelle de le faire, ou parce qu'on y est contraint comme élève (par le passage des heures au long d'une journée d'école), mais parce que le *besoin* de l'étude en cours y pousse. L'enquête, le PER, qui peut en quelques cas être quasi

monodisciplinaire, est en fait normalement *codisciplinaire*, c'est-à-dire suppose une *synergie disciplinaire* : la « modélisation mathématique » apparaît à cet égard comme le fruit d'un découpage infidèle à la réalité du travail d'étude et de recherche que la TAD s'efforce d'assumer.

f) En suivant les observations formulées par André Pressiat, je voudrais encore ajouter une remarque sur les liens entre modèles et modélisation d'un côté et *praxéologies* de l'autre. Le noyau d'une praxéologie (ponctuelle) est un *type de tâches T*. Les tâches de ce type portent sur un certain *type de systèmes* Σ : la simple mention de *T* porte en elle une référence à Σ (à travers tel ou tel système $\sigma \in \Sigma$). Depuis toujours, une technique τ relative à *T* a été conçue en TAD comme l'union d'un *dispositif* et de *gestes* permis par ce dispositif. Or l'ensemble dispositif + gestes (c'est-à-dire la technique τ relative à *T*) suppose un *modèle approprié de* Σ, dont il découle. Ainsi, lorsqu'on effectue une division d'un entier par un autre entier – disons, de 537 par 24 – selon la technique apprise à l'école primaire, on dresse d'abord ce dispositif :

$$\begin{array}{r|l} 537 & 24 \\ \hline & \\ & \end{array}$$

Celui-ci découle d'un modèle de la division qu'en même temps il concrétise (et, bien souvent, dissimule). L'accomplissement des gestes adéquats conduira alors à faire parler comme suit le modèle en question à propos du système étudié, le couple d'entiers (537, 24) :

$$\begin{array}{r|l} 537 & 24 \\ \hline 57 & 22 \\ 9 & \end{array}$$

Ainsi arrive-t-on à l'égalité $537 = 24 \times 22 + 9$. Notons que, là encore, il existe d'autres modèles, tel celui que l'on voit fonctionner sur la suite d'égalité ci-après, laquelle naît d'un dispositif quelque peu inusuel ($a \div b$ y désigne le quotient entier *q*) : on a $q = 537 \div 24 = 536 \div 24 = 268 \div 12 = 134 \div 6 = 67 \div 3 = 66 \div 3 = 22$ et donc $r = 537 - 24 \times 22 = \ldots = 9$. D'une façon générale, un modèle adéquat (adéquat à la technique τ relative à *T*) participe du *logos* de la praxéologie construite autour de *T* : il engendre la technique τ en lui donnant son dispositif et en inspirant ses gestes. Bien entendu, et comme je l'ai déjà souligné, le modèle de Σ à mobiliser *dépend de T*. Pour le dire à l'aide d'un exemple extérieur au monde mathématique, et qui me permettra de généraliser ce que je viens de dire, « se moucher » est un type de tâches qui a trait à un système que, dans le langage courant, on désigne comme étant « le nez ». Un instant de réflexion montrera que la technique que nous mettons

en œuvre pour nous moucher (ou pour moucher autrui), quelle qu'elle soit, suppose un certain modèle du système « nez » ; et que ce modèle est fort différent de celui auquel nous nous référons quand nous voulons, non pas *moucher* un nez, mais *dessiner* un nez. D'aucuns voudront à cet égard parler de la *représentation* que nous avons du nez, soit comme nez à moucher, soit comme nez à dessiner. J'ai dénoncé il y a déjà longtemps (voir mon site, à l'adresse http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=97), les dangers du mot de représentation pour ne pas réintroduire ce mot là où on n'en a pas besoin : dire que l'on dispose d'un modèle – lequel appartient au *logos* de la praxéologie – ne dit rien, volontairement, quant à son mode de manifestation psychique. L'a-t-on « devant soi », comme le suggère le sens classique de « représentation », ou l'a-t-on « derrière la tête », ou même est-il « refoulé » quoique non moins à la source de nos gestes ? Il s'agit là d'une autre question, qui concerne seulement la manifestation psychique du modèle, non le modèle comme constitutif de la praxéologie.

That's all, folks!

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

➔ Séance 4 – Vendredi 26 février 2010

DIDACTIQUES, DIDACTIQUE

1. Mathématiques et autres disciplines

a) Le III^{e} congrès international sur la TAD (CITAD III) s'est tenu à Sant Hilari Sacalm, en Catalogne, du mardi 26 janvier au vendredi 29. Pour la première fois, ce congrès était précédé d'un « cours de TAD pour chercheurs », ce qui est l'ébauche d'une « école (d'été, d'automne, d'hiver, de printemps) de TAD ». Je ne ferai pas, ici, de bilan improvisé d'une suite de journées de travail dont une évaluation demandée aux participants a montré le beau succès qu'elles ont remporté auprès des participants.

b) Ce qui m'importe davantage, ici, est un point qui, sans doute – c'est là une partie du problème ! –, sera passé presque inaperçu de la plupart des participants : il s'agit des communications qui, de façon explicite ou implicite, ne relevaient pas principalement des mathématiques mais « des autres savoirs », selon la formule que nous avions tenté de mettre en avant lors du congrès d'Uzès. Le bilan de ces communications est modeste : je note, dans cette catégorie,

– la communication de Marianne Mortensen (Danemark) et Martha Morandino (Brésil) intitulée *Museographic transposition: Accomplishments and application* ;

– une autre communication de Marianne Mortensen intitulée *Praxeology as a tool for the analysis of a science museum exhibit* ;

– une communication de Adriano Dias de Oliveira & Martha Marandino (Brésil) intitulée *Museographic transposition: Discussing scholarly knowledge of biodiversity in the organization of museum exhibitions* ;

– une communication de Elio Carlos Ricardo et Mauricio Pietrocola (Brésil), *Epistemological vigilance and didactic textbooks: demonstrating the didactic transposition process of physics knowledge* ;

– la communication présentée par Caroline Ladage et moi-même sous le titre *Clinique et ingénierie de l'enquête codisciplinaire : un atelier « Enquêtes sur Internet » au collège*.

Cinq communications sur 36, donc, soit un peu moins de 14 %. Les trois premières ont préférentiellement à voir avec la biologie, la quatrième avec la physique, la dernière (celle de Caroline et moi-même) n'a de lien privilégié avec aucune discipline particulière de l'enseignement secondaire.

c) La question évoquée ici me paraît *cruciale*, et cela à un double titre. Tout d'abord, si je puis dire, se pose le problème de l'enfermement maintenu de la TAD dans la seule question de la diffusion des praxéologies *mathématiques*. Or cet état ne saurait donner à la TAD sa véritable *valeur* en lui communiquant les *ambitions* qui devraient aujourd'hui impulser son développement : *tel est le problème clé*. Bien entendu, nous le savons, quelques-uns ne rêvent que de voir ce confinement « mathématique » de la TAD se prolonger indéfiniment : s'il en allait autrement, en effet, ceux-là devraient en règle générale assumer un aggiornamento de leur équipement praxéologique d'assez grande ampleur, ce qui ne va jamais de soi, certes.

d) Il est aussi, à l'inverse, d'autres chercheurs, dont le « terroir » n'est pas la discipline mathématique, et qui, pour cela, se sentent abandonnés du fait de la fermeture relative que je viens d'évoquer. Eux nous montrent

concrètement le problème : s'ils veulent mobiliser la TAD dans des études disciplinairement autres, où feront-ils connaître leurs travaux ? La TAD n'ayant pas encore diffusé suffisamment, la réception au sein de leur communauté d'origine (fût-elle celle des « sciences de l'éducation ») sera médiocre, voire nulle ; et si nous ne créons pas, au moins provisoirement, un espace spécifique, un *lieu franc*, leur parole sera empêchée et, les logiques académiques étant ce qu'elles sont, ils seront bientôt contraints de déserter la TAD. En fait, il me semble qu'il faut avancer, là-dessus, d'un double mouvement, en nous ouvrant à *l'altérité disciplinaire* et, ce faisant, en suscitant la multiplication des habitats de la TAD au sein du continent didactique et éducatif.

2. Quelle évolution ?

a) Le point de vue formulé jusqu'ici comporte une ambiguïté que je voudrais tenter de lever. Il ne s'agit pas *seulement* de s'ouvrir formellement en réservant des places à des chercheurs « forains », que nous côtoierions, sans plus, en de rares occasions ouvertes à une telle promiscuité. Il faut aussi *oser se mêler* de ces questions qui ne peuvent guère être rapportées, même au prix d'un émondage vigoureux, à notre *seul* terroir disciplinaire : les mathématiques. En d'autres termes, il faut oser sortir de ce terroir d'origine pour explorer et viabiliser de nouveaux territoires de recherche, quand bien même certains disent détenir sur eux un droit ancien de propriété ou, simplement, un droit de préemption. En pratique, rien n'est impossible : un didacticien – je ne dis pas un didacticien *de quoi* – peut décider de travailler sur quelque sujet que ce soit : il lui appartiendra – *comme toujours* – de créer les conditions, sous les contraintes qui lui sont imposées, de mener à bien la recherche en question. Bien entendu, la création de telles conditions peut absorber beaucoup de temps, d'énergie, de talent. En particulier, si je veux travailler sur un sujet dont l'étude suppose une foule de connaissances que je n'ai pas, il me faudra les acquérir. Les conditions d'une telle acquisition peuvent être plus ou moins exigeantes, en fonction notamment de mon degré de familiarité avec la discipline dont elles relèvent – si, du moins, une telle discipline existe. Mais, je le répète, rien n'est impossible ; rien du moins ne doit être tenu pour interdit, nonobstant les ethnicismes disciplinaires déchaînés.

b) À cette liberté disciplinaire, il y a bien sûr des obstacles. Dans le *paradigme de la visite des savoirs*, qui façonne aujourd'hui l'enseignement des disciplines scolairement établies, la *problématique de base* est dominante : pour un complexe praxéologique $\wp$ « donné », elle conduit, je le rappelle, à étudier l'ensemble $\{ \hat{C} / \partial(K, \hat{C}, \wp, U) \}$ ou plus largement l'ensemble $\{ \hat{C} / \Re(K, \hat{C}, \wp, U) \}$. Lors du congrès de Sant Hilari Sacalm, les

communications relatives à des œuvres mathématiques données, $\wp$, étaient, me semble-t-il, majoritaires (elles avaient trait aux nombres relatifs, aux limites, etc.). Il me semble qu'il nous faut maintenant impulser une évolution dont l'institution scolaire actuelle tend évidemment à nous détourner : au lieu de travailler sur *l'étude de praxéologies $\wp$ en première ligne*, il s'agit de travailler sur *l'étude de questions Q en première ligne* et de s'occuper ensuite de l'étude de praxéologies $\wp$ *en deuxième ligne* – lorsque l'étude de $\wp$ est finalisée par l'étude de *Q* (ou d'un ensemble $\mathcal{Q}$ de questions). Ce changement doit se réaliser certainement « en mathématiques », où le paradigme *de questionnement du monde* doit progressivement être mis à l'épreuve, tant au plan de *l'analyse didactique* qu'au plan de *l'ingénierie didactique*, à travers des travaux sur des PER où l'on renonce à désigner à l'avance les œuvres (mathématiques) *à rencontrer* et, en conséquence, où la question génératrice de l'enquête retrouve toute sa place.

c) Considérons la question *Q* suivante (dont la formulation paraîtra peut-être éminemment critiquable aux yeux du « spécialiste compétent ») : *Comment connaître la mesure d'un objet ?* Sommes-nous, avec cette question, *en mathématiques* ? Ou *en physique* ? Ou *en technologie* ? Ou ailleurs encore ?… En vérité, ces questions sont secondes par rapport à celle-ci, qui est bien sûr *générique* (elle doit être posée à propos de toute question désignée à l'étude) : *Dans quelles œuvres O chercher ?* Déjà, là, les propriétaires potentiels de la question *Q* – y compris les métrologues, qui n'existent guère au secondaire – seront peut-être moins enclins à se manifester. Par ailleurs, il est évident que cette question a une très grande *généralité* (elle donne lieu à d'innombrables *cas particuliers*) et une redoutable *générativité* (son étude, quelque PER que l'on choisisse de parcourir, fait foisonner les questions engendrées). Cela noté – qui, au vrai, importe peu ici –, il est aussi évident que, dès qu'on étudie la question *Q*, même de façon élémentaire, on voit qu'il sera difficile d'enfermer son étude dans un domaine praxéologiquement homogène. Considérons ainsi le galet représenté ci-contre. Chacun de nous imaginera, je suppose, comment il serait possible de déterminer (approximativement) son *poids*, son *volume* ou même son *diamètre* (c'est-à-dire le maximum de la distance entre deux de ses points). Mais comment mesurer *l'aire de sa surface* ? Je laisse cette question ouverte ici : elle doit nous rappeler discrètement ce qu'est une enquête *ouverte*, dans laquelle les problèmes ne sont pas réglés d'avance, ni même *reconnus* à l'avance.

d) Bien entendu, nous sommes là tout près de l'idée de *codisciplinarité* : l'étude d'une question *Q*, quelle qu'elle soit, conduit à interroger des œuvres

relevant de disciplines diverses. Pour ce qui concerne la TAD, il me semble indispensable que s'accroissent les travaux sur l'étude de questions, quelles qu'elles soient, sans préjuger de la nature (disciplinaire) des moyens utiles à cette étude.

3. Question de langues

a) Celles et ceux d'entre nous qui ont participé au congrès de Sant Hilari Sacalm auront remarqué que s'y posait un problème de *langue de travail* (de *working language*). Deux semaines plus tard, j'étais à Copenhague, où Marianna Bosch et moi-même, à l'invitation de Carl Winslow, avons animé une session d'enseignement à l'intention de doctorants. Ces étudiants ne faisaient pas tous leur thèse en didactique des mathématiques : l'un au moins s'occupait de musique, un autre de physique, etc. Mais surtout, parmi eux, deux étaient danois, sept suédois, une était issue de l'ex-Yougoslavie, un autre était turc et une dernière, coréenne. Le problème de la langue de travail se règle en ce cas, aujourd'hui, *par le recours à l'anglais*. Un chercheur doit ainsi avoir, *parmi les langues de travail qu'il peut utiliser*, la langue anglaise, qui est aujourd'hui, ordinairement, la langue de travail commune à ceux qui n'ont pas d'autre langue commune. Si j'écris en anglais, je serai lisible de tous ceux qui se conforment au principe selon lequel, dans son domaine de travail, un chercheur doit se rendre capable, dans l'ordre, de *lire*, de *parler*, d'*écrire* en anglais. En d'autres termes, le chercheur – et, donc, le didacticien – doit intégrer à son équipement praxéologique les moyens d'user de l'anglais de façon pertinente et efficace dans le cadre de son travail.

b) Les arguments des réfractaires à ce rôle dévolu *de fait* à l'anglais – ils se recrutent hors des sciences « dures », où l'usage de l'anglais va de soi – sont trop connus pour que je les rappelle ici. Je ferai toutefois une exception à propos d'une argutie fréquemment brandie : l'anglais langue de travail de chercheurs non anglophones (si l'on peut dire) serait de médiocre, voire de piètre qualité. Certes. Mais si ces chercheurs sont français (ou francophones), la qualité de « leur » français (parlé, écrit), d'après ce que j'ai pu voir au long de plusieurs décennies, n'est que rarement au-dessus du médiocre, alors même qu'on doit leur refuser les circonstances atténuantes qu'on pourrait leur accorder s'ils utilisaient l'anglais ! Cependant, plutôt que de ferrailler contre des moulins à vent, je préfère ajouter ceci : un outil de travail *se travaille* ; on le perfectionne et on perfectionne la maîtrise qu'on en a, qu'il s'agisse de « sa » langue ou d'une autre langue. Si, en tel contexte donné, un chercheur est amené à user d'une langue de travail qui ne soit ni l'anglais ni sa propre langue – ce pourrait être par exemple le danois –, il devra en accroître sa maîtrise en la travaillant, en la faisant travailler, tout

de même qu'il devra le faire s'agissant de l'anglais ou *de sa propre langue elle-même*. À cet égard, les chercheurs locuteurs ordinaires d'une langue donnée (français, danois, catalan, etc.) doivent co-assumer le travail d'expression en anglais (ou dans telle langue de travail qu'on voudra) de tout ce qu'il y a d'un peu particulier dans le langage qu'ils utilisent ainsi « couramment » : ils contribueront en cela à enrichir l'anglais *mis à la disposition* de l'ensemble des praticiens de leur domaine.

c) Je voudrais souligner deux aspects encore, sur lesquels il nous faudra peut-être revenir. Tout d'abord, on aura noté que jamais, dans ce qui précède, je n'ai parlé de langue *étrangère*. L'expression n'a de sens que par rapport à une langue *nationale*. En outre, dans son emploi banalisé par l'école, elle vient *au mauvais moment*, lorsqu'on prétend tout à l'inverse *faire sienne* cette langue qu'on ne doit plus voir alors comme langue *étrangère*, mais comme langue *prochaine*. Ensuite et conséquemment, il faut que plusieurs d'entre nous révisent leur point de vue spontané et à vrai dire simpliste sur l'usage de la *traduction*, du moins s'ils la voient comme permettant à la langue « cible » *de leur demeurer étrangère*, en cela qu'une opportune médiation – l'instance de traduction supposée – vient s'intercaler entre elle et nous, assurant ainsi, croit-on à tort, une totale étanchéité linguistique – alors même que, tout au contraire, *ce contact entre langues* doit être l'un des soucis permanents de notre communauté.

d) Ainsi que je l'avais annoncé, j'ai commencé à travailler sur un *glossaire* de la TAD, que j'ai rédigé en anglais afin qu'il soit un instrument de travail pour tous ceux qui ne lisent pas le français (ils sont évidemment plus nombreux que ceux qui le lisent). Ce glossaire ne saurait être à ce stade qu'un *chantier*, au plan de la forme comme au plan du fond. J'en reproduis simplement, ici, à titre de spécimen, l'article *Didactics*. (L'abréviation *q.v.* utilisée ci-après est celle de l'expression latine *quod vide*, « ce que voir » : elle se place *après* l'expression à laquelle on se réfère.)

> **Didactics**. Didactics is defined as the science (q.v.)—still in infancy—the object of which is to study the conditions and constraints (q.v.) that govern the diffusion of praxeologies (q.v.) in institutions (q. v.) across society (q. v.). Diffusion is taken here in an extended sense: it also includes *non* diffusion and most notably *deliberate withholding* of praxeologies with respect to specific institutions.

Bien entendu, il ne saurait être question d'aborder ce glossaire par le biais d'une *traduction* (en français) : il s'agira d'en travailler le texte (avec autant de dictionnaires qu'on voudra !) jusqu'à en devenir *familier*.

ENQUÊTES ET PER

1. Que faut-il savoir ?

a) Supposons qu'un didacticien soit amené à travailler sur un ensemble $\mathcal{Q}$ de questions. Que doit-il savoir pour cela ? Que doit être son équipement praxéologique ? Nous connaissons une situation homomorphe : un professeur doit enseigner un ensemble $\mathcal{Q}$ de questions ; que doit-il savoir pour cela ? Nous connaissons aussi la réponse naguère *traditionnelle* en France, et qui n'est encore qu'à demi disqualifiée : il est *nécessaire* que ces questions relèvent d'une discipline scolaire $\check{D}$ et que le professeur – du moins au secondaire – ait suivi les études couronnées par la réussite au « CAPES de $\check{D}$ » (voire à « l'agrégation de $\check{D}$ ») ; et cela est, à des détails inessentiels près, *suffisant*. Bien entendu, ce n'est pas la réponse que nous donnons à la question posée à propos des professeurs et posée à leur *profession* : il y a, avons-nous noté plus d'une fois, tout d'abord les *praxéologies pour la profession* (dont l'ancêtre était constitué des « mathématiques pour l'enseignant »), qui permettent notamment d'identifier les *praxéologies à enseigner* (dans le paradigme de la visite des savoirs) ou les praxéologies *à étudier* dans le paradigme de questionnement du monde ; enfin il y a les praxéologies *pour l'enseignement*, qui permettent de concevoir et de conduire l'étude de l'enjeu didactique. Parmi celles-ci, il faut situer aujourd'hui les *infrastructures* utiles ou indispensables à l'étude.

b) Qu'en est-il pour le chercheur en didactique ? Sans doute peut-on envisager ici une autre tripartition : il y a les praxéologies *pour la profession* didacticienne (incluant *entre autres* des praxéologies linguistiques par exemple), ensuite les praxéologies ou plus généralement les œuvres dont la diffusion est l'objet de la recherche didactique (et que les praxéologies pour la profession doivent permettre d'identifier), enfin les praxéologies *pour la recherche* en matière de diffusion des praxéologies et des œuvres (la catégorie des œuvres incluant à la fois la catégorie des praxéologies et la catégorie des questions, que j'ai distinguées plus haut s'agissant des professeurs). Il y a là un chantier sur lequel je ferai quelques pas maintenant, après avoir une fois de plus souligné ceci : l'équipement praxéologique adéquat du didacticien étudiant la diffusion en telle ou telle institution de tel ou tel complexe praxéologique $\wp$ n'a pas à être imposé par quelque institution que ce soit, mais doit être construite – entre conflit et consensus – par l'institution didacticienne elle-même : c'est là un des grands problèmes « de la profession » – sans que cela limite pour autant la liberté de pensée et d'action du chercheur.

2. Un exemple : « les couleurs » (1)

a) Imaginons que nous étudions un système didactique $S(X\,;\ Y\,;\ \heartsuit)$, où l'enjeu didactique ♥ est désigné, naïvement, par ce titre : *les couleurs*. On suppose en outre que cette œuvre qu'est ♥ est regardée dans la classe $[X\,;\ Y]$ comme relevant de la discipline $\check{D}$ appelée au collège « Arts plastiques » et que la classe considérée est, en fait, une 6e. Les praxéologies de recherche les plus communes en didactique nous amènent à examiner, parmi la foule de contraintes pesant sur l'étude des couleurs, les indications du programme officiel d'études. Les programmes de l'enseignement des arts plastiques au collège ont paru dans le *Bulletin officiel spécial* no 6 du 28 août 2008. J'en extrais ce passage, qui fait référence au « socle commun » (http://media.eduscol.education.fr/file/special_6/28/0/programme_arts_general_33280.pdf).

> FORME, ESPACE, COULEUR, MATIERE, LUMIERE et TEMPS sont des notions continuellement travaillées dans les pratiques d'expressions plastiques et visuelles où le CORPS participe intrinsèquement du travail. C'est en s'appuyant sur ces champs notionnels que l'enseignement des arts plastiques permet l'acquisition de connaissances, de savoirs et de savoir-faire. En favorisant une réflexion qui donne sens à l'exploration des moyens de mise en œuvre, cet enseignement, à la croisée du sensible et de l'intelligible, participe à la construction de l'individu.

En voici un autre passage, où la question de *la* couleur introduit *in fine* à des considérations sur *les* couleurs :

> **La peinture**
> La peinture est couleur et matière. Elle intervient directement comme moyen d'expression ou en articulation avec un tracé graphique. La couleur est substance et lumière, matérielle et immatérielle. Elle est perçue immédiatement par le spectateur. Comme étendue et substance, la couleur introduit à des notions d'épaisseur, d'opacité et de translucidité, de peint et de non-peint. Elle constitue un matériau physique par lequel on peut représenter un monde, mais c'est aussi un milieu dans lequel des gestes et traces du peintre sont inscrites. Par une pratique diversifiée de la peinture, en exploitant des formats différents, y compris très grands, l'élève développera sa capacité à déterminer les caractéristiques physiques de ses matériaux, supports, outils et médiums. Il découvrira le spectre coloré et quelques systèmes d'organisation des couleurs élaborés par les peintres. En apprenant à choisir et fabriquer ses propres couleurs, il expérimentera leurs potentiels sensoriel, représentatif, symbolique et expressif.

Notons tout particulièrement cette dernière injonction, dont nous verrons plus loin la pertinence : l'élève « découvrira le spectre coloré et quelques systèmes d'organisation des couleurs élaborés par les peintres. En apprenant à choisir et fabriquer ses propres couleurs, il expérimentera leurs potentiels sensoriel, représentatif, symbolique et expressif ».

b) Comme je l'ai expliqué déjà, j'essaie de donner aux étudiants de la licence et du master de sciences de l'éducation de l'université de Provence les moyens de conduire une analyse didactique d'une situation sociale dont on dispose d'une description, si sommaire soit-elle. Je reviens ici sur un exemple que nous avons rencontré lors de la séance 2 de ce séminaire, celui dit des « couleurs en 6e », tel que je l'ai proposé lors de l'examen conçu pour les étudiants de première année de master. Ce texte, je le rappelle, est extrait du livre de Luc Cédelle, *Un plaisir de collège* (Seuil, Paris, 2008, pp. 118-119).

« Nous allons travailler le mélange. Comment, à partir de seulement deux couleurs, obtenir le plus de couleurs possible ? On va commencer par s'installer. » Remue-ménage général mais, comme pour un équipage de navire, dans un ordre fixé à l'avance. Des responsables pour tout : pour les pinceaux, les pots, la peinture, le papier, l'eau... Du papier bon marché est disposé sur les tables pour les protéger et de petites feuilles de papier à dessin sont distribuées. Les gros tubes d'acrylique passent de main en main, parfois pressés un peu généreusement – « Hé, je vous rappelle que ça coûte cher… » – pour déposer à chaque place, à même la table, deux noix de couleur.

Le groupe est divisé en trois parties, chacune disposant d'un jeu de couleurs différent : jaune et bleu d'un côté, jaune et rouge au milieu, bleu et rouge de l'autre côté. La consigne est donnée : « Avec ces deux couleurs, vous allez chercher à obtenir douze couleurs différentes, ou douze nuances si vous préférez. Bien entendu, sans compter les deux couleurs d'origine. » Scepticisme général chez les petits 6e : objections, questions... Mais, rapidement, on n'entend plus que les pinceaux tinter dans les pots. Et différentes méthodes se révèlent. Certains partent d'une couleur pure, du jaune par exemple, pour y ajouter précautionneusement une infime touche de bleu et démarrer ainsi, tache après tache, leur transition du jaune-vert au vert-jaune, etc. D'autres mélangent plus hardiment. Au bout d'un moment, les aventureux et les prudents en sont au même point : à partir de cinq ou six nuances obtenues, l'affaire se complique. Il devient difficile d'en obtenir une nouvelle, et la régularité des progressions est mise à mal, malgré les tentatives de rattrapage en jouant sur la dose d'eau. Sur les feuilles, différents styles de nuanciers apparaissent : progressifs ou contrastés, pointillistes ou « tartinés », resserrés ou étalés, disposés en carré, en cercle, en spirale ou au hasard.

Chacun est mentalement et physiquement confronté à la couleur, et même absorbé. « Posez vos pinceaux. » Petite discussion à nouveau, comparaison des résultats et des méthodes. Nadine fait alors circuler de vrais nuanciers : catalogues de peintures ou de rouges à lèvres. Mélissa ne peut s'empêcher de lire à voix haute une liste de couleurs : « Jaune cadmium, bleu de céruléum… »

« Justement, maintenant que vous avez tous votre nuancier, je vais vous demander de trouver des noms, que vous allez écrire à côté de chacune de vos couleurs. Vous pouvez inventer les noms que vous voulez. » Du côté jaune-bleu de la salle surgissent ainsi des « vert de peur » et des « bleu marée basse ». Cléa annonce un « bleu voltigeant » et un « vert coin-coin ». Dans le camp jaune-rouge, Coralie propose « coquelicot », « bouton d'or », « orangeade »… Lou, du côté rouge-bleu, a opté pour « cerise », « salsa », « framboise »… Ces variations lexicales et la graphie des noms accentuent les différences entre les nuanciers, qui deviennent des objets dont personne n'a envie de se séparer. « Qu'est-ce que les couleurs primaires ? » demande alors Nadine qui, une fois encore, laisse du champ aux tentatives de réponse, avant de reprendre la main : « Ce sont les couleurs premières de base. On ne peut pas les fabriquer avec les autres couleurs. Mais à partir de ces couleurs de base, on peut fabriquer toutes les autres. » Une élève questionne : « Madame, on ne dit pas indigo, des choses comme ça ? –Oui, tu as raison, il faut être précis. Si tu regardes les tubes, tu peux voir que les couleurs que nous avons utilisées s'appellent citron, cyan et magenta. »

---

c) Bien entendu, il doit être entendu que l'analyse proposée ne suppose pas de connaissances particulières sur l'enseignement des arts plastiques en 6e aujourd'hui en France : l'étudiant n'est par exemple pas censé savoir que le programme de 6e enjoint aux professeurs concernés d'amener l'élève à « fabriquer ses propres couleurs » ; il n'a donc pas de raison spécifique de penser (et de dire, à titre d'hypothèse), que « l'activité » dont le texte à analyser nous parle d'abord pourrait n'être qu'une mise en œuvre un peu mécanique de cette injonction tutélaire… Cela dit, voici les notes d'un corrigé que j'ai été amené à rédiger.

➨ Voici alors quelques éléments qui peuvent nourrir l'analyse didactique demandée.

• Le texte décrit l'activité d'une classe de 6e en cours d'arts plastiques. La classe se constitue d'abord en système didactique $S(X\,;\,y\,;\,Q_0)$, où Q_0 est la question suivante : « Comment, à partir de seulement deux couleurs, obtenir le plus de couleurs possible ? »

• Le sujet de l'étude ainsi annoncé, le premier épisode du travail de la classe consiste à *organiser la gestion* du milieu d'étude de Q_0, en désignant des responsables pour les pinceaux, les pots, la peinture, le papier, l'eau... Ce milieu *M* est alors constitué avec des éléments communs (papier mis sur les tables pour les protéger, feuilles de papier à dessin distribuées, noix de peintures acryliques pour chaque élève, etc.) et des éléments différenciateurs (certains élèves reçoivent du jaune et du bleu, d'autres du jaune et du rouge, d'autres enfin du bleu et du rouge).

• À cette petite société interne au collège, comparée à un « équipage de navire » par l'auteur du texte, la professeure *y* rappelle qu'elle est soumise à une *contrainte* de société : son activité ne se fait pas à coût nul (« Hé, je vous rappelle que ça coûte cher… », lance-t-elle).

• La constitution du milieu *M* prépare la *technique d'étude* de Q_0 que *y* impose à *X* : pour étudier Q_0, la classe va s'employer à accomplir la tâche t_1 suivante : avec les deux couleurs attribuées, obtenir par mélange (le mot a été prononcé d'emblée par *y*) douze couleurs différentes en plus des deux couleurs d'origine.

• La tâche paraît problématique aux élèves. Mais leur docilité pédagogique (qui est une condition créée par l'école) l'emporte bientôt : ils se lancent à la recherche d'une technique relative à la tâche t_1 (« … rapidement, on n'entend plus que les pinceaux tinter dans les pots »). Plusieurs techniques émergent qui répondent apparemment à des technologies différentes : « Certains partent d'une couleur pure… D'autres mélangent plus hardiment. »

• Le *milieu adidactique* auquel les élèves confrontent leur technique naissante – est-elle une bonne réponse à la question Q_1 « Comment obtenir douze couleurs nouvelles à partir des deux couleurs de départ ? » – n'est pas ici la professeure, mais *leur propre vision des couleurs* ; et ce milieu leur renvoie que cette technique, même complexifiée (en jouant sur « la dose d'eau » ajoutée aux peintures), ne semble pas « marcher ».

• La professeure appelle alors la classe à faire le point (« Posez vos pinceaux », dit-elle). D'après le texte examiné, il ne semble pas que, par delà un inventaire rapide des réponses $R_x^{\diamondsuit}$ dus aux élèves $x \in X$, une réponse $R^{\heartsuit}$ commune ait été dégagée et institutionnalisée : apparemment, l'étude de Q_1 *s'arrête sans être achevée*.

• D'après le texte, *y* apporte alors dans le milieu *M* un nouveau type d'œuvres : des *nuanciers* (de peintures, de rouges à lèvres). Rien n'est dit sur la familiarité des élèves avec ce type d'œuvres : il est vrai que *y* avait d'emblée parlé de *nuances*, en feignant d'y voir un mot familier aux élèves (« … vous allez chercher à obtenir douze couleurs différentes, ou douze nuances si vous préférez ») ; mais cela est peut-être trompeur. Il semble seulement que certains élèves remarquent alors l'association de *noms* spécifiques (« Jaune cadmium, bleu de céruléum… ») aux *couleurs* qui figurent dans les nuanciers.

• Peut-on lire dans ce geste de *y* l'intention d'exhiber une grande variété de couleurs, en particulier pour montrer que la tâche *t* n'était nullement impossible ? Le lien avec les questions Q_0 et Q_1 est pourtant nullement évident : rien ne prouve en effet que le grand nombre des couleurs composant un nuancier soit obtenu par le mélange d'un petit nombre de couleurs.

• Un peu plus tard, *y* reviendra sur cet aspect des choses par cette interrogation adressée aux élèves : « Qu'est-ce que les couleurs primaires ? » À nouveau, l'irruption dans la classe d'une œuvre, en l'espèce la « théorie » des couleurs primaires, se fait par le truchement de *y*, qui, d'après le texte examiné, expose abruptement, pour ne pas dire dogmatiquement, cette théorie : les « couleurs primaires » sont des couleurs qu'on ne pourrait pas « fabriquer avec les autres couleurs » mais qui permettraient de « fabriquer toutes les autres ». On peut supposer – mais cela n'est pas dit par le texte – qu'a été précisé dans la classe, en cette étape, le fait que les trois couleurs utilisées par les élèves pour l'étude de *Q* (soit le jaune, le bleu et le rouge) sont censées être *les* couleurs primaires.

• Sans doute l'introduction de nuanciers dans la classe a-t-elle pour effet – et avait sans doute pour but – d'amener les élèves à regarder leur propre production comme un petit nuancier ; c'est en tout cas ce que *y* institutionnalise *de facto* en disant : « … maintenant que vous avez tous votre nuancier, je vais vous demander… » Un nouvelle tâche, t_2, est donc proposée aux élèves : assigner un *nom*, librement, à chacune des *couleurs* obtenues. La floraison d'appellations plus ou moins inventives et débridées induite par cette consigne semble concourir à renforcer l'impression qu'existerait une immense variété de couleurs supposées obtenues par mélange d'un petit nombre de couleurs.

• L'auteur du texte examiné interprète l'activité de nomination menée à bien par les élèves comme aboutissant à attacher un peu plus chacun d'eux à *son* nuancier. S'il en était ainsi, on devrait conclure plus encore que, dans cet épisode de classe, aucune réponse *commune* n'est véritablement construite.

---

d) Je profite de l'occasion de cette analyse didactique pour donner un second extrait du glossaire dans son état actuel.

Didactic analysis. A didactic analysis is an analysis of the didactic (q.v.) present in a given social situation—generally known through a (necessarily incomplete) written description. On the basis of the information thus provided, such analysis should include an account of every didactic system (q.v.) *S*(*X*; *Y*; ♥) mentioned in the available description. This account must consist minimally in more or less comprehensive answers to the following questions: What is *X*? What is *Y*? What are the praxeologies [*T* / τ / θ / Θ] that the

didactic stake ♥ is made of? What are the didactic praxeologies put to use by *X* and *Y* and what didactic means have proved necessary to do so? What praxeological equipment (q.v.) can be engendered in *X* as a short-term and as a long-term result of the functioning of *S*(*X*; *Y*; ♥)? And lastly, what does *Y* as well as some institutional environments of *S*(*X*; *Y*; ♥) may have learnt in the process? In order to answer these questions properly, it seems crucial to identify the main conditions and constraints (q.v.) composing the ecology (q.v.) of the situation and their potential effects on it. To do so, one should then scan the scale of didactic codetermination levels (q.v.) to make explicit conditions or constraints too often described—or even simply alluded to—as "natural" and ("therefore") inconsequential.

3. Un exemple : « les couleurs » (2)

a) Que faudrait-il savoir sur « les couleurs », par exemple sur l'équipement praxéologique d'élèves de 6e et sur celui de leurs professeurs à cet égard (y compris, bien sûr, du point de vue didactique), afin de mieux contrôler ou encore d'approfondir l'analyse précédente ? Je ne ferai là-dessus que deux observations.

b) Pour le didacticien qui n'a pas été nourri dans le sérail où évoluent les professeurs d'arts plastiques français, donc qui « ne connaît pas les couleurs » comme on les connaît en cette honorable institution, nombre d'éléments praxéologiques qu'évoque le texte à analyser méritent en deuxième intention une étude expresse. Cela, bien sûr, peut prendre du temps. La remarque est générale : un didacticien peut étudier les conditions et contraintes de la diffusion d'une praxéologie $\wp$ quelconque, mais il doit pour cela travailler… Sur la question des couleurs, il existe par exemple un portail Wikipédia (en français) qui, le 17 février dernier, comportait 436 articles – il est vrai que la plupart d'entre eux sont consacrées à des couleurs particulières. Mais une enquête « préliminaire » sur le sujet devrait couvrir tout un ensemble de questions – sur la « nature » des couleurs, sur la « théorie » des couleurs, sur la notion de « couleurs primaires », etc. À son interlocutrice – Dominique Simonnet – qui lui rappelle qu'une couleur « qui résultait d'un mélange n'avait pas la même valeur que les autres », l'historien Michel Pastoureau répond en ces termes (*Le petit livre des couleurs*, Éditions du Panama, 2005, pp. 69-70) :

> Les chimistes du XVIIIe siècle l'ont prétendu : ils ont avancé une théorie pseudo-scientifique définissant des couleurs « primaires » (jaune, bleu, rouge) et des couleurs « complémentaires » (vert, violet, orange). Cette thèse a influencé les artistes du XIXe et du XXe siècle, au point que de nombreuses écoles picturales ont décidé de ne plus pratiquer que les couleurs dites

> « primaires », et éventuellement le blanc et le noir. Le mouvement du design, notamment celui du Bauhaus, qui souhaitait mettre en harmonie la couleur et la fonction des objets, a cru naïvement à cette « vérité » scientifique et a parlé de couleurs pures et de couleurs impures, de chaudes et de froides, de statiques et de dynamiques… Et c'est notre vert, ravalé au second rang, qui en a le plus souffert ! Des peintres tel Mondrian l'ont presque banni de leurs productions. Sous prétexte de se conformer à la science, l'art a exclu le vert du monde des couleurs.

Notons que, sur ce point, l'extrait du livre de Luc Cédelle prête à la professeure d'arts plastiques des propos précis, lui faisant affirmer que lesdites couleurs primaires (a) ne peuvent être fabriquées « avec les autres couleurs », (b) permettent de « fabriquer toutes les autres » couleurs. Il s'agit là d'assertions *fortes*, sur lesquelles le chercheur devrait enquêter, tant du point de vue de leur production que de leur réception. À nouveau, je laisse ces questions ouvertes.

c) Un autre point devrait faire l'objet d'une enquête de routine : la notion de *nuancier*. Le portail des couleurs déjà mentionné comporte un article de ce nom ; on y lit la définition que voici : « Un *nuancier* est un catalogue définissant visuellement un ensemble plus ou moins limité de couleurs dont chacune est reproduite sur un support (papier, métal) accompagnée d'un identifiant (code) unique. » « Nuancier » se dit en anglais *colour chart* (ou *color chart*, en anglais américain) ; l'encyclopédie Wikipedia comporte un article "Color chart" ; on y lit ceci :

> In color-related fields, a **color chart** is a physical arrangement of standardized color samples, used for color comparisons and measurements such as in checking the color reproduction of an imaging system. Color charts are used to calibrate and to profile graphic devices, such as digital cameras and scanners.

On voit se profiler ici un univers « moderne », un univers « digital » (numérique, ainsi qu'on dit en français), à quelque distance du traditionnel « mélange de couleurs »… Chose remarquable, l'article « Nuancier » de l'édition en français de *Wikipédia* renvoie à un article de *Wikipedia* en anglais qui *n'est pas* l'article "Color chart" mais un article intitulé "Color model", qui commence ainsi :

> A **color model** is an abstract mathematical model describing the way colors can be represented as tuples of numbers, typically as three or four values or color components. When this model is associated with a precise description of how the components are to be interpreted (viewing conditions, etc.), the

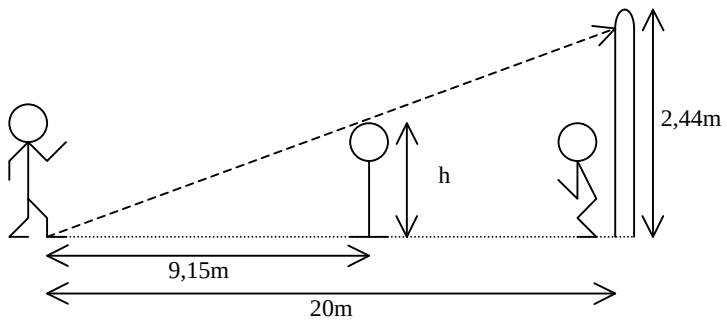
resulting set of colors is called color space. This section describes ways in which human color vision can be modeled.

Sans enquêter plus avant sur les mathématiques utiles en ce cas, on voit ici comment on peut apercevoir des mathématiques dès qu'on repousse un peu le rideau poussiéreux qui borne le monde ordinaire, où elles demeurent ignorées. Mais je n'irai pas plus loin sur cette voie aujourd'hui.

4. Questions authentiques, questions potiches

a) L'épisode précédent nous rappelle que, lorsqu'on met en œuvre le schéma herbartien en étudiant une question *Q*, il y a création de conditions *C* qui, sous des contraintes *K*, provoquent la rencontre avec des œuvres *O*, et que, parmi ces œuvres, l'on doit s'attendre à voir apparaître, là où peut-être on les attendait le moins, des œuvres *mathématiques*. Il y a là, pour la TAD, une voie essentielle à explorer aujourd'hui, que désigne le *paradigme de questionnement du monde* : nous aurons ainsi « les mathématiques de la mesure », « les mathématiques des couleurs », etc., de même que nous aurons « la physique de la mesure », « la physique des couleurs », etc.

b) Le paradigme de la visite des savoirs prend comme points de départ ce qui devrait apparaître à l'inverse comme autant de haltes au sein d'un parcours d'étude et de recherche. Le hasard du travail m'a conduit à rencontrer sur Internet le mémoire d'un élève professeur de mathématiques, Jérémie Potin, intitulé *Pour que les mathématiques ne soient plus une torture inutile*. Je ne m'arrêterai ici que sur un chapitre qui occupe les pages 14 à 19 d'un mémoire de 24 pages et s'intitule « Thalès : une approche par le détournement ». (Une note appendue à ce titre renvoie à Joël Négri et au site Mathsenligne ; mais je passe.) Il s'agit au fond de démontrer les ressources du théorème de Thalès, à l'époque en cours de visite dans la classe de ce professeur stagiaire. Pour cela, celui-ci propose un problème qu'illustre la figure suivante (reprise ici *ne varietur*).



L'énoncé associé est le suivant :

Le joueur s'apprête à tirer un coup franc à 20 m du but. L'arbitre a placé un mur de joueurs à 9,15 m du ballon.

Le tireur va botter le ballon si fort que sa trajectoire sera considérée comme rectiligne.

a) Quelle devrait être la taille maximale des joueurs composant le mur pour que le tir soit cadré ?

b) Si les joueurs mesuraient 1,80 m, combien devrait mesurer la cage pour que le tir soit cadré ?

c) À quelle distance du but devrait se trouver le tireur si le mur mesure 1,80 m et la cage 2,44 m ?

Nous sommes là, typiquement, dans ce que j'ai appelé la problématique *interventionniste*, problématique duale de la problématique dite *primordiale*, alors même qu'on aimerait se situer dans une perspective *possibiliste*, celle de la rencontre praxéologique suscitée par les conditions $\hat{C}$ créées par l'étude d'une question Q donnée. Ici, en vérité, la question Q à étudier ne devrait certainement pas être la conjonction des trois sous-questions que comporte l'énoncé mais une question plus générale, nécessairement plus large et plus ouverte, qu'on pourrait formuler ainsi : « Quelle trajectoire donner au ballon pour qu'il ne soit pas touché par le mur ? »

c) L'étude de cette question est certes de nature à provoquer la rencontre avec le théorème de Thalès, mais elle engendrera bien d'autres questions susceptibles de provoquer d'autres rencontres encore – par exemple la question suivante, toute simple : si les joueurs constituant le mur sautent au moment où le ballon va le franchir, à quelle hauteur le ballon doit-il se trouver alors pour ne pas être touché par le mur ? La question Q possède en fait une assez grande générativité et son étude « authentique » demandera qu'on la « suive » au long sans doute de plusieurs semaines de classe. Dans la forme – typique – où elle transparaît ici, elle est traitée comme une question « potiche » et non comme une question « que l'on respecte » – ce dont les élèves ne sauraient guère être dupes. Mais on voit que le passage de questions potiches à des questions *respectées* se heurte aujourd'hui à un… mur, qu'il convient de mettre à bas.

ÉDUQUER AU DÉVELOPPEMENT DURABLE ?

1. Un domaine de réalité

a) J'avais accepté de présenter, mercredi 24 février, dans le séminaire animé par Alain Legardez, un exposé pour lequel j'ai proposé le titre suivant :

L'EDD entre catéchismes et savoirs savants : quels points d'équilibre ? Je reviens ici sur cet exposé. Le participant fidèle et attentif à ce séminaire me pardonnera de reprendre ça et là des développements déjà présentés l'an dernier.

b) Il y a un an et demi environ, j'ai commencé à m'intéresser de façon quelque peu systématique, en tant que didacticien, au domaine de réalité que désigne en français l'expression de *développement durable*. Parler de domaine de réalité, c'est dire qu'il existe un complexe d'institutions – je devrais dire peut-être un *maelström* d'institutions – où l'on fait certaines choses, où l'on pense certaines choses articulées à une certaine idée ou à un certain projet de *développement durable* ; bref où existe toute une réalité praxéologique spécifique des activités humaines menées à l'enseigne du « développement durable ».

c) Si je définis la didactique comme la science des conditions et des contraintes de la diffusion sociale des praxéologies, la *didactique du développement durable* est la science de la diffusion des praxéologies du développement durable. Bien entendu, comme toujours, comme en mathématiques, cette science doit indéfiniment s'interroger sur ce que sont, et sur ce que pourraient être, les « praxéologies du développement durable ». Mais en vérité l'étude de la diffusion de ces praxéologies, des conditions et contraintes sous lesquelles elle s'opère, va de pair avec leur identification et leur analyse, puisque ces praxéologies varient, changent de forme et de substance, au cours de leur diffusion même – c'est là, vous le savez, le thème de la *transposition* institutionnelle des praxéologies.

d) Avant d'entrer dans ce que promet le titre de mon exposé – « catéchismes » et « savoirs savants » –, je m'arrête un instant sur l'*EDD*, l'*éducation au développement durable*. On sait que l'intitulé employé par le ministère de l'Éducation nationale a varié. On a parlé d'abord d'*éducation à l'environnement pour un développement durable*, à quoi répondait le sigle *EEDD*. Le texte intitulé *Stratégie de la CEE pour l'éducation en vue du développement durable*, issu d'une « réunion de haut niveau des ministères de l'environnement et de l'éducation » tenue à Vilnius les 17 et 18 mars 2005, proposait, quant à lui, on le voit, une autre formulation encore. Deux inspecteurs généraux de l'Éducation nationale, Gérard Bonhoure et Michel Hagnerelle, avaient avant cela (en avril 2003) cosigné un rapport intitulé *L'éducation relative à l'environnement et au développement durable*. Je m'en tiendrai ici à l'intitulé officiel actuel : *éducation au développement durable*. Ce que je voudrais souligner, surtout, c'est l'emploi de l'expression « éducation à… » : l'école française propose ainsi, aujourd'hui, l'éducation à *la défense*, l'éducation aux *médias*, l'éducation aux *risques majeurs*,

l'éducation à *la santé*, l'éducation à *la sécurité*, l'éducation à *la sexualité*, etc. L'école se remplit ainsi de contenus éducatifs qui se définissent hors des disciplines scolaires établies et s'introduisent dans l'espace didactique scolaire à l'enseigne des « éducations à ».

e) Je ferai deux remarques là-dessus. Tout d'abord, il semble que les domaines désignés ainsi comme « objets d'éducation » soient reconnus par cela même comme porteurs de questions *chaudes* non prises en charge adéquatement par les corpus disciplinaires enseignés, lesquels semblent façonnés par la tradition scolaire autour d'une majorité de questions *froides* parce que désormais *refroidies*. Paradoxalement, cette accrétion, si je puis dire, de questions chaudes aux corpus disciplinaires installés tient souvent au fait que les « contenus éducatifs » que j'évoquais sont regardés par la *doxa* noosphérienne comme ne faisant pas l'objet de *savoirs* en bonne et due forme, à l'instar des savoirs mathématiques, biologiques, littéraires, etc., et « donc » ne pouvant pas donner lieu à un « enseignement » comme il en va en ces matières scolaires traditionnelles. Cela n'empêche nullement que, une fois installées, ces « éducations à », dans la mesure où elles ne se changent pas en une matière scolaire pourvue de tout l'appareil qui signe une discipline de plein exercice (CAPES, professeurs, horaires, etc.), suscitent de la part des disciplines scolairement établies une compétition parfois exacerbée – même s'il est vrai que, dans le même temps, d'autres disciplines leur témoignent une totale indifférence… Je reviendrai sur cette question plus loin ; ici, je me contenterai de noter que « l'éducation à l'environnement » de jadis, que la corporation des professeurs de SVT pouvait regarder comme son apanage naturel, engendrait une compétition bien moins ouverte que l'actuelle « éducation au développement durable », par rapport à laquelle davantage de disciplines établies – la géographie par exemple – peuvent considérer avoir un droit de regard et un devoir d'intervention.

2. Le catéchisme du développement durable

a) Je commencerai par le premier segment de mon titre : *catéchismes*. Avant toute chose, arrêtons-nous sur le mot lui-même. Je reproduis pour cela une partie de la notice que lui consacre le *Dictionnaire historique de la langue française* (1993) :

> **CATÉCHISME** n. m., réfection savante (attestée 1610, mais antérieure cf. *catéchiser*) de *cathezime* (1374), *catecisme* (XIVe s.), est emprunté au latin ecclésiastique *catechismus*, attesté depuis saint Augustin au sens de « instruction religieuse » et, par métonymie, « livre d'instruction religieuse », les premières formes reproduisant la graphie *cathecismus* du latin médiéval. Le

mot calque un type grec °*katêkhismos*, substantif d'action de *katêkhizein* « instruire oralement », lequel est le dérivé factitif de *katêkhein* « résonner » et « inculquer, instruire oralement ». Ce verbe est composé de *kata-* « vers le bas, complètement » (→ catastrophe) et de *êkhein* « résonner, sonner » (→ écho) ; il est seulement attesté dans le Nouveau Testament, son dérivé étant introduit plus tard avec une acception didactique dans la langue ecclésiastique.

♦ Le mot désigne l'enseignement oral de la doctrine et de la morale chrétiennes et, par métonymie, le livre contenant cet enseignement (1636). ✧ Dans la seconde moitié du XVIII^e^ s. apparaissent une extension de nature didactique, en parlant de l'exposition abrégée d'une science (1773), avec le même développement figuré que *credo* (1778), et la valeur péjorative de « leçon destinée à endoctriner » (1762).

Je souligne deux traits que vous aurez remarqués. Le premier, bien connu, touche au contenu : c'est celui de l'*endoctrinement* – le but du catéchisme, c'est l'inculcation d'une doctrine. Le second, peut-être moins connu, concerne la manière : c'est le caractère *oral* du catéchisme – le grec *katêkhizein* signifiait « instruire oralement ».

b) Ce sont là deux aspects qui m'ont personnellement frappé lorsque j'ai commencé à me pencher un tant soit peu sur les « écrits » en matière de développement durable. Beaucoup d'écrits pour le « grand public », y compris pour le grand public cultivé, reprennent sans apporter de preuves des assertions que l'on retrouvera ailleurs, encore et encore. Très souvent, les auteurs se copient les uns les autres, sans indiquer ni leurs sources – ce qui ne saurait suffire mais peut aider ! – ni ce qu'on nomme en anglais l'*evidence* disponible. Dans un ouvrage récent, intitulé *Les chiffres d'une planète de fous… ou de l'urgence d'un développement durable*, signé de Philippe Laget (Éditions de l'Aube, 2009), on lit par exemple ceci (p. 51) :

> La **déforestation** est responsable de près de **20 %** des émissions de gaz à effet de serre en 2004.
>
> La production et la consommation de **viande** sont responsables de **18 %** des gaz à effet de serre.
>
> Le secteur de l'**informatique** représente 2 % des émissions de CO_2 dans le monde (autant que le transport aérien).

On a là des assertions typiques qui, sous des formes appropriées, vont pouvoir se colporter, participant ainsi d'un *folklore* – au sens originel de « savoir (*lore*) des gens (*folk*) » – qui les diffusera sans contrôle : « L'informatique, qu'est-ce que ça dégage comme CO_2 ! », « Il faut arrêter de manger de la viande : c'est terrible pour l'effet de serre ! », etc. On n'est pas

ici dans le registre de la *formation*, qui appelle une *étude*, mais bien dans celui de l'*information*, qui, au contraire, se fonde classiquement sur le *déni* du besoin d'étude.

c) De ce déni participe un postulat implicite qui porte à recevoir les assertions évoquées comme énonçant des « faits » : ce serait un fait – que le lecteur ne peut certes pas garantir ! – que « le secteur de l'informatique représente 2 % des émissions de CO_2 dans le monde », et un autre fait que c'est là aussi la part prise par « le transport aérien », etc. Mais qu'est-ce qu'un fait ? Il y a là une petite subtilité sémantique que je voudrais souligner au passage. Le *Trésor de la langue française informatisé* indique par exemple qu'on désigne par *fait* « ce qui est arrivé, ce qui existe », « effectivement ». En anglais, d'où vient l'insistance des grands médias sur les faits (*facts*), le mot a pris une acception beaucoup plus large. Dans l'encyclopédie *Wikipedia*, l'article "Fact" commence par ces mots : "The term fact can refer to, depending on context, a detail concerning circumstances past or present, a claim corresponding to objective reality, a provably true concept, or a synonym for reality." Cette variété d'« états du monde » supposés ouvre énormément la catégorie des faits – ou plutôt des *facts* – et donne lieu à la publication de recueils de *facts* qui alignent à l'infini des assertions sans en donner de preuve, ainsi qu'il en va dans ce qui suit (je me fournis en l'espèce auprès d'un site intitulé *FactPark*) :

- The blue whale is the largest animal in the world. The largest blue whale caught was a 110-foot female.
- Minus 40 degrees Celsius is exactly the same as minus 40 degrees Fahrenheit.
- Every drop of seawater contains approximately 1 billion gold atoms.
- The sun shrinks five feet every hour.
- Norway is 27 times smaller than the United States, but it has longer coastline than the U.S.
- A shark can detect one part of blood in 100 million parts of water.
- A shark can grow and use over 20,000 teeth in its lifetime.

d) Voici alors un très court fragment de ce que j'appelle le catéchisme du développement durable. Je l'emprunte en l'espèce – mais je n'ai que l'embarras du choix – à une plaquette intitulée *Plans Climat-Énergie territoriaux*, publiée par le Cédis (avec le concours du Réseau Action Climat-France) en 2009 aux éditions Le passager clandestin.

Un phénomène naturel et bénéfique : l'effet de serre

L'atmosphère terrestre contient des gaz dits gaz à effet de serre, tels que le dioxyde de carbone (CO_2) ou le méthane (CH_4). Ces gaz permettent de retenir une partie de la chaleur apportée par le rayonnement solaire. Sans cet « effet de serre naturel », la température à la surface de notre planète serait en moyenne de –18 °C contre +15 °C actuellement. L'effet de serre naturel est donc un phénomène indispensable à la vie sur Terre.

Le fragile équilibre du système climatique menacé par les activités humaines

À partir du milieu du XIX^e^ siècle, le recours aux énergies fossiles (gaz naturel, pétrole, charbon) dans l'industrie, les transports et le residentiel-tertiaire s'est accru. Or l'utilisation de ces combustibles fossiles entraîne l'émission de gaz à effet de serre (GES) qui s'accumulent durablement dans l'atmosphère. Entre 1970 et 2004, les émissions mondiales de GES ont augmenté de 70 % !

Finalement, les GES supplémentaires émis depuis deux siècles dans l'atmosphère par les activités humaines intensifient le phénomène naturel d'effet de serre. C'est ce qu'on appelle « l'effet de serre additionnel ». C'est ce phénomène qui menace les équilibres climatiques planétaires.

Dire qu'il s'agit d'un catéchisme ne signifie pas que ce qui y est avancé soit faux (en général, le lecteur profane n'a aucunement le moyen de le savoir), mais seulement que ces assertions y sont présentées dogmatiquement.

e) J'ouvre maintenant un petit ouvrage récemment paru (en 2009, chez Elytis) sous le titre *Le joli petit monde d'Hubert Reeves*. L'ouvrage est fait de courts, voire de très courts chapitres traitant chacun d'une question. L'un d'eux a trait à la question suivante : « Comment le dérèglement des climats sur terre se traduit-il aujourd'hui ? » Voici le début de l'exposé correspondant (p. 25) :

La présence de gaz carbonique dans l'atmosphère est une condition essentielle pour, qu'à la surface de la Terre, il y ait de l'eau liquide. Aujourd'hui, par l'industrie, les voitures ou encore le chauffage de l'habitat, nous augmentons considérablement cette quantité de gaz carbonique. Nous sommes passés de 270 parties par million à 350 et ce taux continue de monter. Nous pourrions très vite doubler, voire tripler cette quantité de gaz carbonique dans l'air.

La conséquence a été une augmentation de la température d'à peu près 1 °C durant le XX^e^ siècle ; 2 °C à 5 °C sont prévus pour le XXI^e^ siècle. La détermination exacte de ce chiffre dépendra de la réaction des humains.

L'affirmation posée d'emblée d'un lien entre présence de CO_2 dans l'atmosphère et présence d'eau liquide sur la Terre n'est sans doute pas transparente au lecteur peu instruit en ces matières : à dire vrai, cette affirmation est violente tant elle est elliptique. Le lot habituel de *facts* présentés dogmatiquement suit : croissance de la température – laquelle ? – d'environ 1 °C au cours du XX^e^ siècle, croissance prévue de 2 °C à 5 °C au XXI^e^ siècle… On dira : mais cela n'est qu'introductif ; il ne s'agit pas d'un traité, etc. Le problème est bien que le public auquel cette introduction s'adresse ne verra jamais défiler que de tels exposés liminaires – il en verra défiler encore et encore, tant que le sujet est à la mode du jour, et restera indéfiniment à la lisière d'un exposé « complet », qui reste introuvable.

f) Un chapitre ultérieur du même ouvrage s'intitule *Qu'est-ce que l'effet de serre ?* Je reproduis cette fois l'intégralité de la réponse proposée :

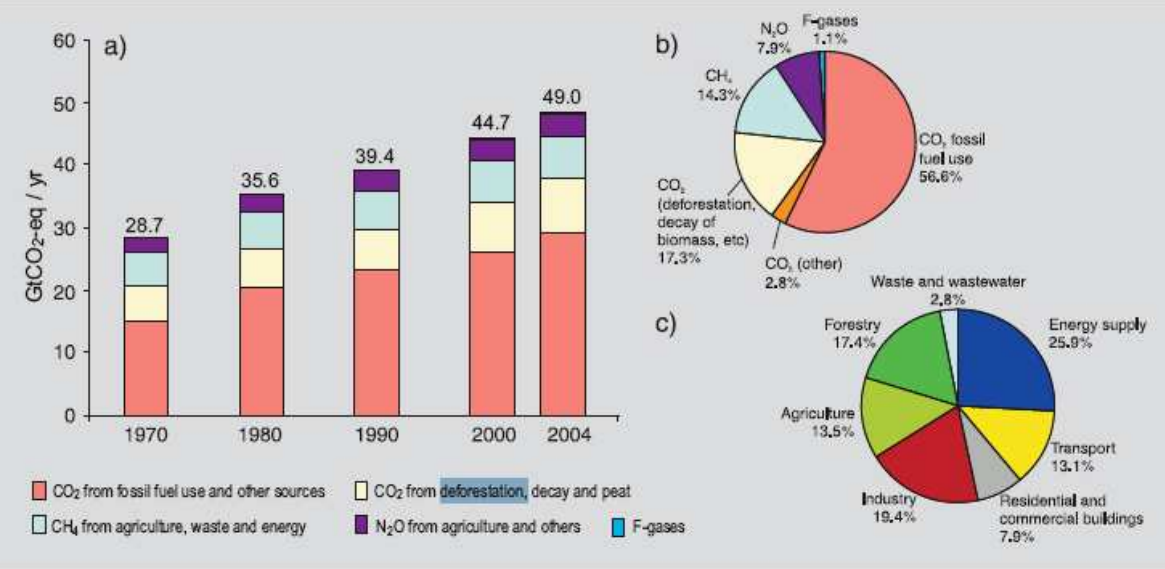
> Il faut se rappeler que lorsque le jardinier veut des primeurs au printemps, il met sur ses semis une plaque de verre. Cette plaque a pour effet de piéger la chaleur du Soleil dans la serre. La température augmente et vous avez vos tomates plus vite que vos voisins. C'est ce qu'on appelle l'effet de serre.
>
> Quel rapport avec la situation présente ? Le gaz carbonique, ce gaz que nous trouvons dans le champagne, nos boissons gazeuses, n'est pas du tout toxique. Il est inodore, incolore et a cette propriété de faire exactement ce que fait la plaque de verre, c'est-à-dire de laisser passer la lumière du Soleil et de retenir sa chaleur. Résultat : la Terre se réchauffe à mesure que le gaz carbonique augmente. Mais il n'y a pas que le gaz carbonique qui a cette propriété, le méthane, les C.F.S. et d'autres gaz produisent ce même effet.
>
> L'effet de serre est un élément important sur la Terre, un élément bénéfique avant d'être un élément néfaste. Si la Terre n'avait pas une certaine quantité de gaz carbonique dans son atmosphère, la température moyenne de la Terre serait de –15 °C. Elle est relativement éloignée du Soleil, la chaleur du Soleil ne serait pas suffisante pour réchauffer le sol au-dessus de –15 °C.
>
> Donc, une partie du gaz carbonique nous permet d'atteindre un niveau de chaleur où l'eau peut être liquide. Mais ce qui se passe aujourd'hui est que nous encourageons la réalisation de cet effet, au-delà de ce qui est nécessaire : nous augmentons la quantité de gaz carbonique et donc inévitablement la température de la Terre.

On aura remarqué que l'on trouve là affirmé le lien qui manquait dans le chapitre précédemment cité : « Donc, une partie du gaz carbonique nous permet d'atteindre un niveau de chaleur où l'eau peut être liquide. » On aura noté aussi que, là où un ouvrage précédemment visité mentionnait, en l'absence supposée d'effet de serre, une température de –18 °C, l'auteur

parle ici –15 °C, comme si les températures (qui sont les plus fréquemment citées dans les textes catéchétiques) de +15 °C pour l'état actuel (*avec* effet de serre) et de –18 °C en l'absence d'effet de serre avaient été réunies en ce seul –15 °C.

3. Quels savoirs savants ?

a) Ce que nous avons vu jusqu'ici paraît tout simplement *indigne* de ce qu'un citoyen, être doué de raison, est en droit d'exiger de connaître et de ce qu'on est en droit d'exiger qu'un citoyen puisse savoir. Il s'agit là, on l'aura compris aussi, d'un régime épistémologique qui n'est pas propre au domaine du développement durable mais qui tend à s'insinuer partout dans la société. Dans une véritable *éducation*, il n'est pas acceptable de s'arrêter à des assertions sans justification, du style « la déforestation est responsable de près de 20 % des émissions de gaz à effet de serre en 2004 ». Dans l'ouvrage d'où j'ai extrait cette affirmation, un appel de note renvoie à cette référence : « GIEC, 2007 ». Si l'on connaît un tant soit peu le petit monde du développement durable, on aura compris que cela renvoie au rapport 2007 du GIEC, le groupe intergouvernemental d'experts sur l'évolution du climat, ou, en anglais, l'IPCC (*Intergovernmental Panel on Climate Change*). Ce rapport – en anglais, *the Fourth Assessment Report* (AR4) – est intitulé *Climate Change 2007*. Il en existe un « résumé pour les décideurs » (*summary for policymakers*) qui contient, semble-t-il, la donnée utilisée par l'auteur – on l'aperçoit dans le diagramme circulaire en haut à gauche, ci-après.



Cet ensemble de diagrammes est intitulé *Global anthropogenic GHG emissions* (l'acronyme GHG se développe en *greenhouse gaz*, « gaz à effet de serre »). La légende de ce tableau est la suivante :

Figure SPM.3. (a) Global annual emissions of anthropogenic GHGs from 1970 to 2004. (b) Share of different anthropogenic GHGs in total emissions in 2004 in terms of carbon dioxide equivalents (CO2-eq). (c) Share of different sectors in total anthropogenic GHG emissions in 2004 in terms of CO2-eq. (Forestry includes deforestation.) {Figure 2.1}

On voit ainsi que les 20 % ne sont que 17,3 % et que, à la déforestation, s'ajoute la dégradation (*decay*) de la biomasse et d'autres choses encore. En fait, une légende situé ailleurs dans le tableau indique qu'il s'agit du "CO_2 from deforestation, decay and peat" (où *peat* désigne la tourbe).

b) Bien entendu, on n'a fait là que le premier pas dans une enquête qui devrait ensuite rechercher d'où vient le résultat numérique affiché : 17,3 %. Mais notons alors ceci : la partie de la légende relative au diagramme à barres ci-dessus comporte une note dont voici la version française (extraite du « résumé pour les décideurs »).

> Seuls sont inclus CO_2, CH_4, N_2O, les HFC, les PFC et les SF_6 dont les émissions sont couvertes par la CCNUCC. Ces émissions sont pondérées par leur potentiel de réchauffement global sur 100 ans, en utilisant des facteurs cohérents avec ceux des rapports faits dans le cadre de la CCNUCC.

Le sigle CCNUCC, en anglais UNFCCC – pour *United Nations Framework Convention on Climate Change* –, désigne la « Convention cadre des Nations unies sur le changement climatique ». Cette note seule suffit à suggérer que la « fabrication » du pourcentage annoncé n'est pas chose simple… Une deuxième étape de l'enquête, donc, conduirait à examiner le rapport du GIEC lui-même et ses diverses publications, ce que je ne ferai pas ici.

c) Le ressort de l'enquête ainsi amorcée tient à un principe universel : une assertion chiffrée étant faite, on recherchera *d'où viennent les chiffres qu'elle contient* et *comment ils ont été fabriqués*. J'illustrerai d'abord l'ignorance de ce principe par un épisode récent qui illustre à quel point l'absence d'enquêtes adéquates peut conduire à errer. Le 20 janvier paraît dans *Le Monde* un papier de Stéphane Foucart intitulé *Les experts du climat épinglés sur les glaciers de l'Himalaya* ; je le reproduis in extenso ici.

> Après l'échec de la conférence de Copenhague, fin décembre 2009, le Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat (GIEC) est épinglé pour une erreur commise dans son dernier rapport (2007). Le groupe de chercheurs, chargés par les Nations unies de synthétiser les connaissances sur le changement climatique, y annonçait que les glaciers himalayens,

châteaux d'eau de l'Asie, pourraient avoir presque complètement disparu en 2035. Or cette estimation, fausse, ne repose pas sur des travaux scientifiques dûment publiés.

Révélée dimanche 17 janvier par *The Sunday Times*, l'affaire alimente depuis la chronique – principalement dans la presse anglo-saxonne. Et a contraint le GIEC à déclencher une enquête sur l'origine de la bourde.

Celle-ci tient en une phrase, à la 493e des 976 pages que compte le deuxième volet (« Impacts, adaptation et vulnérabilités ») du rapport du GIEC : « Dans l'Himalaya, les glaciers se retirent plus vite que dans toute autre partie du monde et, si les taux de retrait se maintiennent, la probabilité est très élevée de les voir disparaître en 2035 et peut-être plus tôt, si la Terre continue à se réchauffer au rythme actuel. » Mais, « dans cette phrase, prévient Christian Vincent, du Laboratoire de glaciologie et géophysique de l'environnement, à Grenoble, tout est faux ».

Sa provenance est indiquée dans le texte : le GIEC renvoie à un rapport de 2005 du WWF (Fonds mondial pour la nature), la célèbre ONG de protection de la nature. Or, dit le climatologue Hervé Le Treut (Institut Pierre-Simon-Laplace), l'un des auteurs du GIEC, « si un chiffre se retrouve dans un rapport du GIEC sans avoir été publié et soumis au processus de "peer review" (expertise préalable à une publication dans une revue à comité de lecture), c'est une erreur ».

Trois siècles ou une coquille

Non seulement le chiffre cité ne provient pas d'une étude scientifique, mais le rapport de l'ONG sur lequel s'appuie le GIEC ne se fonde pas non plus sur des travaux sérieux. En lieu et place d'une étude menée dans les formes, le WWF citait ainsi un article de presse de 1999, publié dans l'hebdomadaire américain *New Scientist*. Article dans lequel un chercheur interrogé par le journaliste mentionnait la date de 2035 comme une bonne estimation de la disparition des glaciers himalayens.

La date de 2035 n'a sans doute pas été complètement inventée. Chistian Vincent mentionne ainsi l'existence d'un rapport, publié en 1996, à la demande de l'Unesco, par le glaciologue russe Vladimir Kotlyakov. Dans ce texte, l'auteur estimait qu'en 2350, la surface des glaciers aux latitudes moyennes se serait dramatiquement réduite, leur couverture passant de 500 000 km^2 aujourd'hui à quelque 100 000 km^2. Une telle réduction scellant la quasi-disparition des glaciers asiatiques. De 2035 à 2350, il y a, au choix, un peu plus de trois siècles ou une petite coquille…

« Cette erreur doit être ramenée à sa juste mesure, tempère M. Le Treut. D'abord, elle ne change rien au fond du problème. Et il s'agit d'une erreur, sur plusieurs centaines de pages ! » Pages dont la prose est, de plus, d'une extrême densité. De plus, le *Résumé à l'intention des décideurs* – document de

quelques feuillets résumant le rapport et qui est remis aux décideurs politiques – ne citait pas la date de 2035. Preuve, s'il en fallait, que l'erreur relève de la simple négligence, non de la volonté de tromper. En outre, dit Jean Jouzel, membre du GIEC, elle a été commise par les auteurs du deuxième volet du rapport (qui évalue les risques locaux), « qui sont spécialistes d'enjeux régionaux, et pas des aspects purement scientifiques » – les sciences climatiques stricto sensu relevant des auteurs du premier volet.

Quant aux glaciers himalayens, explique M. Vincent, qui travaille sur le sujet, « on dispose de très peu d'informations sur eux ». « On sait qu'ils sont en retrait continu depuis le milieu du XIXe siècle, mais nous avons très peu de longues séries de mesures suffisamment précises pour avoir une vision nette et globale de leur avenir à l'échelle de quelques décennies. »

Un second papier de Stéphane Foucart paru dans le quotidien *Le Monde* daté 6 février 2010 complète le précédent ; j'en extrais ce passage :

Ce procès en catastrophisme n'est pas nouveau. Ceux qui l'instruisent capitalisent sur la récente découverte d'une grossière erreur dans le rapport 2007 du groupe d'experts. A la 493e des 976 pages du volet consacré aux impacts du changement climatique (« Impact, adaptation, vulnérabilités »), il est en effet écrit que la quasi-totalité des glaciers de l'Himalaya auront disparu en 2035 si le réchauffement se poursuit au rythme actuel. Une estimation erronée et alarmante, le débit de plusieurs grands fleuves asiatiques dépendant partiellement de ces glaciers…

Il y a deux manières d'apprécier cette erreur – dont le GIEC a d'ailleurs admis la réalité. Elle peut être vue comme une coquille bénigne, une erreur commise sans intention de tromper : elle n'est pas reprise dans le résumé du rapport rédigé à l'intention des décideurs. Mais elle peut être vue autrement. Depuis trois ans que le rapport du GIEC a été rendu public, cette fausse estimation a été largement citée dans la presse grand public sous la caution du GIEC. Entre 2007 et 2009, une quarantaine d'articles de recherche, publiés dans des revues savantes, ont également cité l'estimation fautive…

La principale faute des experts du climat n'est donc pas tant dans l'erreur elle-même mais dans le fait qu'elle ait pu autant se propager, pendant près de trois ans, sans avoir soulevé de rectificatif ou d'interrogation de la part des scientifiques impliqués dans le processus du GIEC.

Comme si ces derniers s'étaient finalement bien accommodés des inquiétudes – excessives – qu'elle était à même de soulever. Sur ce soupçon légitime, un grand nombre de nouvelles mises en cause infondées du GIEC se sont accumulées La plupart de ces accusations sont largement outrancières, voire grotesques. Le GIEC n'en reconnaît d'ailleurs aucune comme fondée.

> Il en est ainsi de celle, formulée par un tabloïd britannique et fondée sur un entretien (présumé) avec Murari Lal, l'un des auteurs du dernier rapport du GIEC. Le chercheur indien, présenté comme glaciologue et cité par le journal, admettait avoir été au courant de l'erreur sur la disparition des glaciers himalayens et avouait, de surprenante manière, que celle-ci avait été commise à dessein afin d'attirer l'attention des responsables politiques sur la région !
>
> Les citations de M. Lal sont reprises sur des milliers de sites internet et viennent accréditer l'idée que le GIEC est surtout animé par un projet politique et non par celui de synthétiser les connaissances scientifiques sur le changement climatique. Contacté par *Le Monde*, M. Lal tombe des nues. *« Cette histoire est complètement absurde, affirme-t-il. D'abord je ne suis pas glaciologue (comme le dit le tabloïd) mais physicien de l'atmosphère et spécialiste de modélisation du climat. Ensuite, je n'ai jamais tenu ces propos, à aucun moment, et je condamne fermement celui qui me les a attribués. »*
>
> M. Lal ajoute que seuls trois journalistes ont cherché à le joindre pour valider les propos qui lui étaient prêtés… Signe que, s'agissant du climat, le fossé est immense entre la solidité d'une information et sa capacité à toucher le grand public.

Que nous le voulions ou non, c'est au contact avec ce monde-là que l'éducation doit préparer les futurs citoyens – avec ce monde-là, ou plutôt avec *ces* mondes-là : mondes savants, mondes médiatiques, mondes militants.

d) Je m'arrêterai ici brièvement sur une enquête connue : elle concerne les températures « catéchétiques » de +15 °C et de –18 °C avancées, la première comme température « moyenne » actuelle à la surface de la Terre, la seconde comme température « moyenne » correspondant à l'absence d'effet de serre. Pour la première, on peut penser qu'il s'agit du résultat d'un calcul exploitant des relevés de températures faits tout autour du globe terrestre ; c'est ce que confirme ce passage d'un ouvrage pour le grand public cultivé écrit par Hervé Le Treut et Jean-Marc Jancovici, *L'effet de serre. Allons-nous changer le climat ?* (Flammarion, 2004).

> La mesure des températures moyennes au sol est certes difficile, mais s'est affinée au fil des années. La mise en place d'un réseau de mesures météorologiques systématiques sur les continents date d'à peine plus d'un siècle. Les équipes scientifiques qui ont entrepris d'analyser ces données ont dû rapidement travailler à l'élimination de plusieurs sources d'erreurs, dues notamment à l'interaction de facteurs non strictement climatiques. Les stations situées au centre d'agglomérations en plein développement sont affectées par l'effet « îlot de chaleur » d'une concentration urbaine, qui provient à la fois du chauffage, de la circulation automobile et de l'inertie thermique

> des bâtiments. Certaines ont néanmoins pu être placées à proximité des aéroports. Pendant la même période, les mesures systématiques de la température de l'eau de mer par les bateaux se sont généralisées. Là aussi, l'analyse de ces données a réclamé un travail difficile et soigneux : les équipes scientifiques qui ont effectué ces études ont recensé les méthodes en usage dans chaque marine, civile ou militaire, pour en corriger les biais : la température varie selon qu'on utilise un seau en bois plutôt qu'un seau en fer pour recueillir l'eau ; de même, la température mesurée sur le bateau à la prise d'eau des machines est différente de celle mesurée par un thermomètre directement plongé dans l'eau. Ces scientifiques ont également recoupé les données marines et terrestres en utilisant les stations météorologiques sur les îles, afin de réduire leur marge d'erreur. Autre obstacle à une mesure précise : les points de mesure ne sont pas distribués de manière égale à la surface du globe, et des méthodes statistiques sophistiquées ont été nécessaires pour pondérer les moyennes en fonction de la représentativité de chaque mesure.
>
> Nous avons désormais une base beaucoup plus solide pour valider ces calculs : depuis deux décennies, des satellites effectuent des mesures de la température de surface, mesures régulièrement distribuées sur la planète, et permettent d'établir des moyennes en bonne continuité avec les estimations antérieures. (pp. 79-80)

On aura noté que cette température moyenne est le fruit d'une procédure complexe comportant une forte composante mathématique : en d'autres termes, l'enquête devrait sur ce point seul être poursuivie. Mais je passe maintenant au cas des −18 °C. L'article "Greenhouse effect" de *Wikipedia* offre un lien vers l'article "Idealized greenhouse model", qui propose lui-même un lien vers un texte qui est le chapitre 2, intitulé "The global energy balance" (le bilan énergétique de la Terre) d'un traité universitaire américain classique : l'ouvrage *Global Physical Climatology* de Dennis Hartmann publié en 1994 (dont le chapitre 1 s'intitule "Introduction to the climate system"). Nous sommes ici *sur le seuil* des « savoirs savants ». Je renvoie en ce point au compte rendu d'enquête déjà présenté dans le séminaire 2008-2009, qui montre comment on arrive à la formule suivante :

$$T_e = \left[\frac{S_0(1-\alpha)}{4\sigma}\right]^{1/4}.$$

où S_0 est *la constante solaire*, soit le flux d'énergie reçu du Soleil par seconde et par mètre carré (exprimé en *joules par seconde et par mètre carré*), qu'on prendra égal à 1367 $W{\cdot}m^{-2}$; où α est l'*albédo planétaire*, que l'on prend égal à 0,3 (= 30 %) ; et où σ est la constante de Stefan, qui vaut à peu près 5.67×10^{-8} $W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}$. En utilisant les données numériques adoptées par Hartmann, il vient :

$$T_e = \left[\frac{1367 \times 0{,}7}{4 \times 5.67 \times 10^{-8}}\ \mathrm{K}^4\right]^{1/4} \approx 254{,}86\ \mathrm{K} \approx -18\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Dans l'article « Effet de serre » de l'encyclopédie *Wikipédia*, on lit ceci :

> Sans ce phénomène, la température moyenne sur Terre chuterait d'abord à – 18 °C. Puis, la glace s'étendant sur le globe, l'albédo terrestre augmenterait et la température se stabiliserait vraisemblablement à –100 °C.

Si, dans la formule

$$T_e = \left[\frac{S_0(1-\alpha)}{4\sigma}\right]^{1/4} = \left[\frac{1367 \times (1-\alpha)}{4 \times 5.67 \times 10^{-8}}\ \mathrm{K}^4\right]^{1/4}$$

on prend $\alpha = 0{,}85$, on obtient cette fois

$$T_e = \left[\frac{1367 \times 0{,}15}{4 \times 5.67 \times 10^{-8}}\ \mathrm{K}^4\right]^{1/4} \approx 173{,}40\ \mathrm{K} = -99{,}75\ ^\circ\mathrm{C}.$$

On peut imaginer qu'on tient là l'origine de la température de – 100 °C, qui circule elle aussi.

4. Des points d'équilibre ?

a) L'exemple précédemment développé illustre un double phénomène typique de la *pédagogie de l'enquête* :

– tout d'abord, les savoirs à utiliser *émergent dans le parcours d'étude et de recherche* en lequel l'enquête se concrétise : dans le cas précédent, on peut citer ainsi, parmi d'autres, la notion de *corps noir* et la *loi de Stefan-Boltzmann*, qui toutes deux relèvent de la physique du XIX^e^ siècle ;

– ensuite, lorsqu'un savoir émerge comme utile à une enquête (voire *à tout un type d'enquêtes*), ce savoir doit être étudié *de façon finalisée* par l'enquête dans laquelle il doit intervenir.

b) Je voudrais illustrer ces considérations à l'aide d'un exemple que fournit un livre récent signé de David Blake et Robert Robson et intitulé *Physical Principles of Meteorology and Environmental Physics. Global, Synoptic and Micro Scales* (World Scientific, 2008). Voici d'abord le début du chapitre 1, intitulé "The Big Picture".

> This book is about the application of the concepts and principles of physics, firstly in meteorology, the study of the behaviour [of] the lowest part of the Earth's atmosphere (the troposphere), and secondly in environmental physics, the study of the interaction of living things with their surroundings. The aim is

to provide a fundamental understanding of a selected range of topics relating to naturally occurring processes, through both theory and experiment, and the means to solve the problems which emerge. This is by no means an exhaustive study of the field of meteorology – the Bibliography lists further reading for that purpose. Rather, we stress the significance of the selected combination of topics, and hope that the whole will prove to be greater than the sum of its separate parts.

The concepts and laws of physics relevant to this study range from Newtonian mechanics, describing motion of the atmosphere, the first and second laws of thermodynamics governing energy conservation and transformations, empirical laws of non-equilibrium thermodynamics governing irreversible phenomena, Einstein's famous mass-energy relation $E = mc^2$ and, when dealing with radiation transfer, the concepts of quantum mechanics. Of course, since these laws of physics are universal, we could, if desired, also apply many of the results to other planets in the Solar System and the Universe, with appropriate changes to the values of numerical constants, e.g., the rate of planetary rotation, the solar constant and so on. In what follows, we focus on the Earth itself, but it is important to see beyond the strict confines of the material and applications discussed here. (p. 3)

On voit bien, ici, à la fois la diversité « non académique » des savoirs utiles (provenant d'une seule discipline, la physique) et la dialectique entre leur emploi finalisé et d'autres emplois de même type, à d'autres propos. Voici maintenant un extrait de la préface du même ouvrage.

Meteorology is generally regarded as a discipline in its own right and is normally taught at universities (if at all) separately from mainstream physics. In general the research literature is divided along similar lines, with some outstanding exceptions to this rule, e.g., Lorenz's 1963 paper in the Journal of the Atmospheric Sciences, which has provided a springboard for the burgeoning field of chaos and nonlinear dynamics. One of the goals of our book is to bring the two fields a little closer, for there has never been a better time to do so.

At the time of writing, the public debate over the global climate has reached a frenzied pitch with the release of the 4th Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change (http://www.ipcc.ch/). Moreover, a widespread perception is that water, rather than oil or even terrorism, will be the other main global political issue of the century. Never has it been more important for the scientific community to provide the decision makers with objective and accurate information. Unfortunately the global climate models upon which the IPCC, economists, politicians and others rely to make their decisions, are by their very nature complex and opaque to all but the specialist few. This provides fertile ground for the global warming skeptics, and there is by no

> means general acceptance of anthropogenic warming, even among meteorologists and climatologists.
>
> This book provides both theoretical and practical grounding in meteorology, with an emphasis on phenomena in the boundary layer, and aims at furnishing either a stand alone course or a firm platform for the reader to proceed with further study in one of the specialist areas, including global climate modeling.

On retrouve là une des raisons *fortes* de développer et de promouvoir une *pédagogie de l'enquête* : permettre aux citoyens une meilleure compréhension des débats clés qui agitent sociétés et civilisations.

c) Le style des *facts* n'est pas acceptable, on l'a dit, si l'on veut faire œuvre d'éducation : il faut tout à la fois chercher à justifier et à rendre intelligible ce que l'assertion rencontrée prétend énoncer. Il n'est guère acceptable non plus de tenter de faire accréditer des explications qui n'en sont pas. Ainsi, contrairement au rapprochement que nous avons vu Hubert Reeves opérer, les mécanismes complexes de « l'effet de serre » ne sont-ils pas identifiables à ceux d'une serre de jardinier (on se reportera là-dessus à l'article "Greenhouse Effect" de *Wikipedia* déjà cité).

d) La pédagogie de l'enquête que j'ai évoquée en pointillé jusqu'ici rencontre plusieurs obstacles dans l'école telle qu'elle existe aujourd'hui. Pour le voir mieux, je recourrai aux schémas herbartiens réduit, semi-développé classiques en TAD, que je rappelle simplement ici :

– Schéma réduit : $S(X\,;\,Y\,;\,Q) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$.

– Schéma semi-développé : $[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrowtail M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$.

– Schéma développé: $[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrowtail \{\, R_1^{\diamondsuit},\, R_2^{\diamondsuit},\, \ldots,\, R_n^{\diamondsuit},\, O_{n+1},\, \ldots,\, O_m \,\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$.

Une classe $[X\,;\,Y]$ étudie une question Q : elle forme dès lors un système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$. L'objet de ce système didactique est d'étudier la question Q (ou d'enquêter sur Q) pour lui apporter une réponse $R^{\heartsuit}$ qui satisfasse certaines conditions à préciser. Ce qui importe ici, ce sont les entités notées respectivement $R_1^{\diamondsuit}$, $R_2^{\diamondsuit}$, etc., et O_{n+1}, O_{n+2}, etc. Les premières sont des réponses à la question Q existant dans quelque institution de la société – ou, comme on dit dans le jargon des chercheurs, « dans la littérature ». Je prends un exemple (qui n'a pas trait au développement durable). Soit la question Q que voici, rencontrée sur le site *FactPark* : "Why does chopping an onion make you cry?" Voici maintenant la réponse $R^{\diamondsuit}$ apportée sur ce même site par un certain Brian Kelly (http://www.factpark.com/Why-does-chopping-an-onion-make-you-cry.htm).

Onions produce the chemical irritant known as syn-propanethial-S-oxide. It stimulates the eyes' lachrymal glands so they release tears. Scientists used to blame the enzyme allinase for the instability of substances in a cut onion. Recent studies from Japan, however, proved that lachrymatory-factor synthase, (a previously undiscovered enzyme) is the culprit (Imani et al, 2002).

The process goes as follows:

1. Lachrymatory-factor synthase is released into the air when we cut an onion.

2. The synthase enzyme converts the sulfoxides (amino acids) of the onion into sulfenic acid.

3. The unstable sulfenic acid rearranges itself into syn-ropanethial-S-oxide.

4. Syn-propanethial-S-oxide gets into the air and comes in contact with our eyes. The lachrymal glands become irritated and produces the tears!

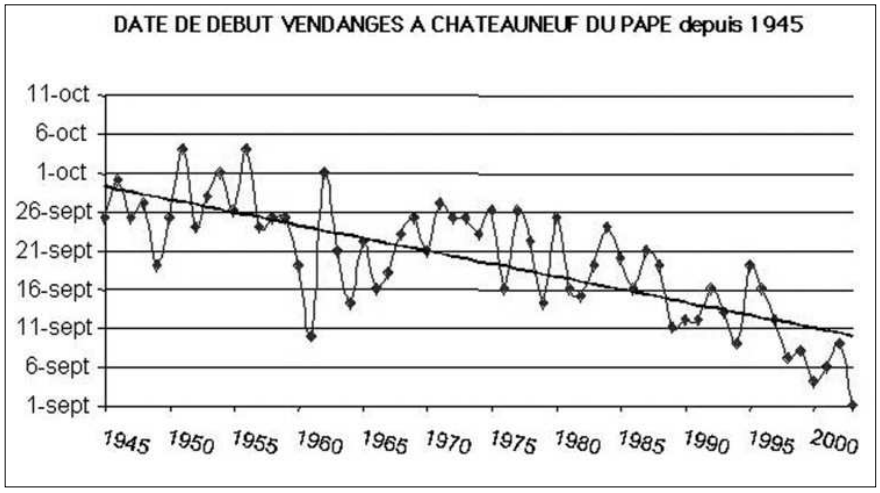
Il s'agit là d'une réponse à analyser, pour décider si l'on pourra en tirer parti pour construire une réponse $R^{\heartsuit}$. Bien entendu, pour ce faire, il convient de s'aider d'outils *O* qui ne sont pas des réponses en eux-mêmes mais aident à analyser et à évaluer les réponses $R^{\diamondsuit}$ rencontrées et à élaborer la réponse $R^{\heartsuit}$ recherchée. Dans le cas évoqué plus haut (D'où provient donc la température de –18 °C alléguée dans les « rudiments » du développement durable ?), on a vu par exemple que les outils à mobiliser appartenaient à la physique, *telle que la sollicite la climatologie*. La question des oignons qui font pleurer, ou plutôt la réponse recueillie ci-dessus, rappelle surtout que l'enquête sur une question *Q* suppose la mise en œuvre de savoirs didactiques marginalisés dans la culture scolaire courante : ici, il s'agira notamment de se prévaloir de la *dialectique des boîtes noires et des boîtes claires*, qui permet de recevoir cette réponse sans être (encore) fort avancé en matière de chimie de l'oignon, si je puis dire. On nous y indique que, lorsqu'on coupe un oignon, une enzyme A récemment découverte par une équipe japonaise (2002), est libérée et transforme certaines substances B contenues dans l'oignon en un acide C ; instable, celui-ci se transforme en un produit D qui, se diffusant dans l'air, va entrer en contact avec nos yeux, qu'il irrite, provoquant ainsi des larmes. Il s'agit là d'*une* réponse $R^{\diamondsuit}$; avant de formuler $R^{\heartsuit}$, beaucoup de travail sera encore nécessaire, dont nous ne savons pas a priori s'il conduira en particulier à étudier la structure de ce qu'on nomme en anglais "Syn-propanethial-S-oxide"…

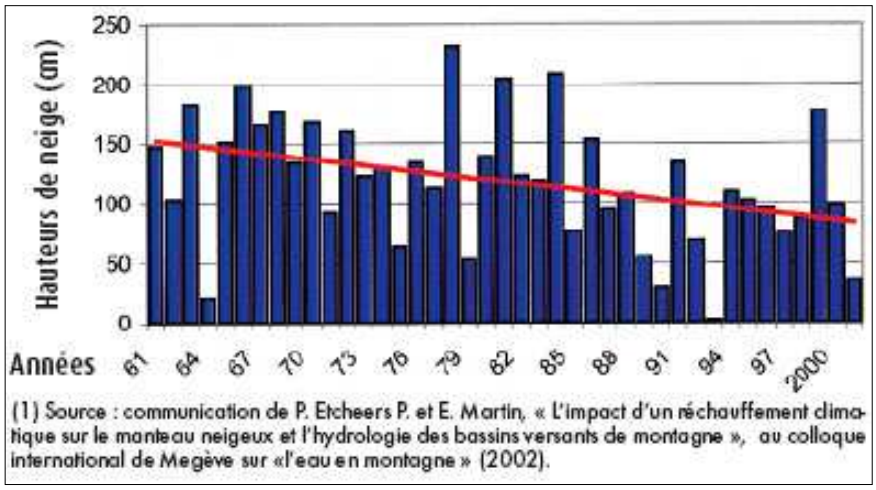
e) Notons que c'est dans la quête de réponses $R^{\diamondsuit}$ et d'outils *O* et, bien sûr, dans la fabrication de $R^{\heartsuit}$ que l'on enrichit ses connaissances, que l'on devient « savants ». C'est ainsi que l'étude de l'effet de serre fera découvrir en

passant comment fonctionne (ou plutôt, en l'espèce et d'abord, comme *ne fonctionne pas*) une serre de jardinier, même si cela n'était nullement le but visé, lequel reste de *répondre à la question étudiée*. Le *choix des questions* est à cet égard une *variable de commande* essentielle dans la formation des élèves, même si une question donnée ne détermine pas absolument les rencontres qui auront lieu et seront approfondies, celles qui ne seront que de furtives confrontations, celles qui seront évitées, celles qui n'auront qu'une chance négligeable de se produire. Considérons ainsi ces extraits d'un papier paru récemment dans l'hebdomadaire *Marianne* (n° 670, du 20 au 26 février 2010, p. 8.) sous la plume de Jean-Claude Jaillette, auteur de *Sauvez les OGM*, ouvrage paru en 2009 avec une préface d'Axel Kahn :

> **Le climat se réchauffe ? Ah bon ?**
>
> L'hiver n'en finit pas. L'Europe grelotte, l'Amérique du Nord essuie des tempêtes de neige en rafales. En France, pour la deuxième année consécutive, les températures sont inférieures aux normales saisonnières. Depuis 1987, jamais un mois de janvier n'avait été aussi froid.
>
> .....
>
> Et si, à l'inverse de la catastrophe annoncée, le climat se refroidissait ? Les spécialistes de Météo France se récrient et avancent l'augmentation des températures moyennes du globe depuis dix ans. Ils admettent néanmoins qu'une moyenne ne veut pas dire grand-chose et que la tendance n'est pas la même selon les régions. L'Atlantique Nord, notamment, connaît un ralentissement du réchauffement. Et dire qu'on est allé inventer jusqu'à un impôt nouveau, la taxe carbone, pour lutter contre le réchauffement climatique !

La prolifération de commentaires de cette espèce peut ainsi conduire par exemple à s'arrêter sur la question suivante : « S'il est vrai que la température moyenne de la Terre augmente, est-il possible qu'on observe pourtant des épisodes de grand froid là où l'on s'attendrait à des températures plus clémentes ? » Notons ici qu'une question vraie est toujours une question *naïve*, puisqu'on ne l'a pas encore étudiée – elle n'est pas naïve par rapport à ce que l'on sait déjà, mais elle apparaîtra naïve par rapport à ce qu'on saura demain, grâce à son étude même. Cela dit, l'enquête sur la question que je viens de formuler fera sans doute rencontrer des *séries chronologiques* telles celles représentées ci-après, où l'on voit clairement le phénomène des fluctuations à court terme, qui n'empêche pas, comme disent les économistes, un *trend*, une tendance marquée.





(1) Source : communication de P. Etcheers P. et E. Martin, « L'impact d'un réchauffement climatique sur le manteau neigeux et l'hydrologie des bassins versants de montagne », au colloque international de Megève sur «l'eau en montagne» (2002).

e) J'ai parlé jusqu'ici de « savoirs savants ». Je n'ai pas parlé des disciplines enseignées, qui sont autre chose. Dans le schéma herbartien, il faut mobiliser des « œuvres » scientifiques et culturelles diverses : on pense alors en termes de *flux* praxéologiques répondant aux besoins estimés. On ne s'y préoccupe pas de ce que les disciplines scolaires *ont en stock*, si l'on peut dire. On a là sans doute une difficulté réelle, qui exprime l'hétérogénéité des deux paradigmes de l'étude scolaire : le paradigme ancien et encore dominant *de la visite des savoirs*, le paradigme encore dans les limbes *du questionnement du monde* dont relève le schéma herbartien. Ce dernier heurte ainsi frontalement l'habitus des professeurs « disciplinaires » qui se vivent comme ayant un monopole sur certains domaines de connaissance. En lieu et place d'un corporatisme disciplinaire jaloux et méfiant tout à la fois des autres corporations disciplinaires et des forains non corporés, le schéma herbartien pousse à construire un monde de *codisciplinarité* ouverte et confiante, répondant aux besoins des enquêtes menées. Sans cela, les questions proposées à l'étude deviennent des questions potiches, dont le seul mérite est de fournir une occasion d'exhiber ce que l'on a en stock – par

exemple, ici, sur les séries temporelles. Les « professeurs de… » ont donc à apprendre de nouveaux « rôles épistémologiques ». Bien entendu, ils doivent renoncer à *imposer* des réponses toutes faites, comme il en va dans le schéma herbartien *dégénéré*, qui s'écrit $[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrow \{\,R^{\Diamond}_{y}\,\}] \hookrightarrow R^{\Diamond}_{y}$, où $R^{\Diamond}_{y}$ est la réponse apportée et imposée par le professeur y. En vérité, si l'on désigne par $\check{D}$ une certaine discipline, il est possible que, dans une enquête sur une question Q, *on ne puisse se passer de* $\check{D}$ – de biologie, de chimie, d'histoire, etc. –, mais qu'on doive se passer *de professeur de* $\check{D}$, soit qu'un tel professeur ne soit pas disponible, soit qu'il se révèle inhibiteur, voire interdicteur, faisant payer bien trop cher ce qu'il pourrait « fournir » en matière de $\check{D}$ et l'aide qu'il pourrait apporter dans le bon usage de $\check{D}$. Comment définir alors le rôle que peut un jouer un « professeur de $\check{D}$ » dans une enquête qu'il ne dirige pas ? Je ne connais actuellement de mot plus juste que celui de « médiateur de $\check{D}$ » : on pourrait parler aussi bien d'« intercesseur » ou d'« entremetteur », mais le premier terme a une connotation religieuse et le second une connotation galante. Quoiqu'il en soit, la fonction de médiation disciplinaire désigne ici une fonction de guidage spécifique : dans l'ensemble Y des aides à l'étude d'un système didactique du type $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$, celui ou celle qui assume cette fonction n'est pas le *directeur d'étude* y (qui doit se garder d'entrer dans ce rôle), mais un personnage *sui generis*, $\ddot{y}$, qui se décline en différents intervenants $\ddot{y}_{\check{D}}$. Notons que, dans un cadre scolaire adéquat, on peut imaginer un « pool » de médiateurs de $\check{D}$, chaque professeur (au sens actuel) pouvant assumer la fonction de directeur d'étude (ou d'enquête) en certains systèmes didactiques et des fonctions de médiateur disciplinaire pour *d'autres*.

f) On sait que l'année 2010 a été déclarée par l'ONU « année mondiale de la biodiversité ». Dans les collèges et lycées tels qu'ils sont aujourd'hui structurés au plan épistémologique, le risque est fort de voir les professeurs de SVT faire valoir ce qu'ils croient être leur droit de propriété sur un thème qui doit tout au contraire devenir le souci *de tous et de chacun*. À eux donc les beaux premiers de se faire les médiateurs de la connaissance du vivant, en s'affranchissant d'un habitus monopolistique qui, pour être une tradition, n'est pas pour autant un destin obligé.

That's all, folks!

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

➔ Séance 5 – Vendredi 19 mars 2010

CONSIDÉRATIONS NON INACTUELLES 1

1. Les mathématiciens non didacticiens et la noosphère

a) J'ai défini autrefois la *noosphère* de l'enseignement des mathématiques comme la sphère où l'on « pense » sur l'enseignement des mathématiques. Cette sphère est métissée, hétérogène ; et c'est bien en ce point que surgit la difficulté dont je voudrais vous entretenir. La noosphère a été longtemps peuplée presque uniquement de personnes qui se reconnaissaient quelque titre à y intervenir du fait d'une position première jugée par elles *en surplomb* par rapport à quelque aspect de l'enseignement des mathématiques – de personnes qui, sur tel ou tel de ces aspects, pensaient en savoir plus,

pensaient savoir mieux, d'une science infuse n'appartenant qu'à elles. Le cas fondamental et pérenne est bien évidemment celui de mathématiciens « savants », petits ou grands, qui, lorsqu'ils entrent dans la noosphère, se situent spontanément en *surplomb mathématique* par rapport aux « simples » professeurs de l'enseignement secondaire, à qui ils se proposent d'apporter leur parrainage, les éclairant, les instruisant, les guidant, les aidant de leur mieux quant à la « chose mathématique ». Même si, à un moment donné, les mathématiciens qui proposent ainsi leurs services ne constituent qu'une minuscule minorité dans leur communauté d'origine, ils constituent aussi, dans la noosphère elle-même, une minorité bruyante, qui prétend dans le même temps ne pas être interrogée sur ses titres à intervenir ainsi, tout en venant occuper ostensiblement des positions de pouvoir au sein de la noosphère, comme si cela était, au fond, naturel. On sait que des reclassements – profitables au plan symbolique au moins – accompagnent généralement cette occupation : tel qui, *en mathématiques*, est en vérité un simple chevau-léger, ici se voudra roi – au vrai, roitelet – *en enseignement* des mathématiques, du seul fait de ses titres « mathématiques » ; et ainsi de suite.

b) Ce jeu traditionnel est plus ou moins vigoureux selon les époques. Il dépend ainsi du nombre des « vocations » mathématiciennes à accourir auprès du pauvre monde de l'enseignement secondaire, ce nombre dépendant lui-même de bien des facteurs. Pourquoi un honnête travailleur de la chose mathématique se mue-t-il tout à coup en bienfaiteur présomptif de la chose enseignante – au secondaire s'entend ; car, au supérieur, il n'en a guère le loisir (on ne surplombe pas ses pairs présumés) ? Pourquoi voit-on tel mathématicien de bonne facture faire brusquement don de sa personne et de ses lumières à l'enseignement secondaire des mathématiques ? C'est là une question à étudier, car elle touche à la dynamique des conditions et des contraintes gouvernant la diffusion des connaissances mathématiques. On voit ici, au passage, que, pour la didactique des mathématiques, l'étude de la trajectoire de monsieur Machin ou de madame Truc au sein de la noosphère est un objet d'étude parfaitement légitime et même, en certains cas, indispensable. Mais je n'irai pas plus loin là-dessus aujourd'hui.

2. Une bien étrange noosphère

a) Dans le schéma précédent, l'enseignement des mathématiques apparaît comme répondant – de façon plus ou moins déformée, certes – à l'action éclairée de ces évergètes que seraient les mathématiciens noosphériens. (Le grec εὐεργετέω signifie « je fais du bien » ; sur l'évergétisme, voir l'article de ce nom dans *Wikipédia*.) Qu'il en soit ainsi suppose pourtant des conditions tout à fait remarquables, que je voudrais souligner.

b) Le schéma noosphérien « moderne » régissant les principaux systèmes présents dans la vie de nos sociétés est en effet tout différent. Si l'on considère le système de *santé*, par exemple, sa noosphère, qui organise son développement, comporte certes quelques « bienfaisants » et autres évergètes, personnes et associations ; mais elle comporte surtout, elle comporte *d'abord* cette composante essentielle de la vie des sociétés contemporaines qu'est la *recherche* (ici, en matière de santé) ; et l'évergétisme populaire – dont le Téléthon est emblématique – est lui-même centré sur l'aide financière *à la recherche*. Au cœur du système de santé, il y a donc la recherche médicale, qui est la clé des progrès de la *science* médicale et du *système de santé* lui-même. Quoi qu'en dise une certaine idéologie humaniste-populiste, lorsqu'un médecin soigne un patient, c'est *la médecine* plutôt que *le médecin* qui opère. Vous connaissez ce petit apologue que j'ai évoqué bien des fois. Deux médecins sont au chevet d'un patient souffrant d'une appendicite ; l'un est un excellent praticien ; le second est un praticien très ordinaire. Pourtant ces deux médecins, devant ce patient, ne se distinguent guère ! Si la scène se passe, disons, vers 1880, le patient a de fortes chances de mourir (de péritonite et septicémie), car la médecine du temps n'a pas encore les moyens de soigner efficacement cette pathologie. Si la scène se passe en 1980, le patient a les meilleures chances de se rétablir, car la médecine a entre temps conquis les moyens d'une action thérapeutique victorieuse. On peut recommencer : en 1980, devant un patient atteint de sida, nos deux médecins ne se distinguent toujours pas, et le patient mourra, car la médecine d'alors est impuissante devant cette pathologie. Aujourd'hui, ils ne se distinguent pas davantage : la recherche médicale a depuis lors identifié le VIH et mis au point les trithérapies, ce qui change la donne radicalement. La médecine l'emporte sur le médecin.

c) Ce qui est frappant, par contraste, c'est que, en matière d'enseignement des mathématiques, nombreux sont ceux qui croient – je pense notamment à nos évergètes – que, lorsqu'un enseignant fait la classe, ce qui advient est imputable *d'abord à l'enseignant lui-même*, à son talent (ou à son manque de talent), à sa singularité personnelle même, plutôt qu'à la « science didactique » qui devrait opérer par son truchement avisé. Sauf exception, l'enseignant en personne ne pense pas autrement : il se vit seul face au problème didactique qu'il affronte, sans attendre de secours d'une science didactique dont le message ne lui parvient guère, étouffé qu'il est par les émanations idéologiques de la noosphère. Un corrélat de cette « théorie » préscientifique de l'enseignant est le suivant : toute analyse didactique incluant l'enseignant (ou, *a fortiori*, tel membre de la noosphère) est vue comme une « critique » (au sens ordinaire du mot) et, s'agissant de l'enseignant, puisque celui-ci est tout, se trouve regardée de façon acritique

comme une critique *de l'enseignant*, ce que les évergètes compassionnels ne supportent pas. (Je note en passant qu'il est aussi, mais en bien moins grand nombre, des évergètes imprécateurs dont les fulminations à l'endroit des enseignants confirment autrement que l'enseignant serait, en dernière instance, cause de tout.)

d) Bien entendu, ce contraste est ubiquitaire. En dépit de la montée en puissance de la science didactique, la noosphère est encore largement occupée par un *establishment* de non-chercheurs qui prétendent y tenir le haut du pavé, pensent majoritairement que la recherche en matière d'enseignement des mathématiques est au mieux un adjuvant improbable de leur magistère, dont il est très généralement possible de se passer entièrement, une minorité ultra disant même sans détour son *hostilité* à la recherche en cette matière, et donc aux didacticiens des mathématiques, et à quelques-uns d'entre eux tout particulièrement.

e) Or depuis les années 1970 environ, la recherche sur l'enseignement des mathématiques a décollé, grâce à quelques pionniers dont Guy Brousseau est la figure superlative. La petite troupe des didacticiens que ces pionniers ont levée a longtemps fait sien cet habitat que furent pour elle les IREM. Bien entendu, la niche (au sens de l'écologie) à y occuper fut plus difficile à trouver. Dès le début, les conflits avec les évergètes, grands ou petits, ont fleuri : dans un IREM, il pouvait y avoir un groupe « Géométrie », un groupe « Analyse » et… un groupe « Didactique » où l'on travaillait sur l'enseignement de la géométrie et/ou de l'analyse ! Un monde d'amateurs tendres ou endurcis mais sûrs de leur légitimité côtoyaient sans aménité un champ encore étroit, mais en voie de professionnalisation, celui de « la didactique ». Or, à travers des hauts et des bas, le renouvellement des cadres de l'évergétisme irémique semble devoir reconduire indéfiniment cette situation, à ceci près que l'essentiel des forces de la recherche a maintenant trouvé d'autres habitats, loin des IREM. En fait, nous sommes saturés d'indices de ce que, pour les bienfaisants, la recherche *n'existe pas*, n'a pas à exister, même si les plus libéraux d'entre eux lui reconnaissent un *droit restreint* à une existence étroitement contenue.

3. Une épistémologie rétrograde

a) Comment l'évidence de la nécessité de la recherche en matière d'enseignement des mathématiques peut-elle être ainsi étouffée ? C'est là en vérité une grande question. Il y a quelque temps – c'était avant le congrès de Sant Hilari Sacalm –, Marianna Bosch m'a demandé comment j'expliquerais ce fait qu'elle avait cru pouvoir constater au contact de chercheurs anglo-saxons (ou d'inspiration anglo-saxonne) en *mathematics education* : pour

ceux-là, disait-elle, la notion de *phénomène* didactique semble n'avoir pas de sens. Dans le cadre de mon exposé de clôture du congrès, j'ai esquissé une réponse à la question soulevée par Marianna ; je la reprends ici, en lui laissant la structure qu'elle avait alors (celle de ce que j'appelle un « PseudoPowerPoint »).

Inachèvements : le cas de la théorie

L'un des principes *théoriques* (au sens de la TAD) qui se trouvent au cœur de la vision commune du didactique est que l'étude des faits didactiques ne relèverait pas d'une *théorie* au sens des sciences, qui vise à décrire, expliquer, comprendre le réel.

Le cas de la théorie (1)

La théorie dominante du didactique énonce en effet que le réel à étudier est *l'effet de nos actions*.

Selon cette théorie, il n'y a pas de *phénomènes* didactiques, ayant leurs *lois propres*, mais de simples *effets* de nos *interventions*, etc.

Le cas de la théorie (2)

À l'instar de ce qui se passe en médecine [*evidence-based medecine*], cette épistémologie des effets s'affirme ainsi dans l'essor actuel de l'*evidence-based education* (EBE), qui a pour principe "that educational policy and practice should be guided by the best evidence about what works".

Le cas de la théorie (3)

Dans les sciences humaines et sociales, plus largement, cette évolution a pour emblème la structure IMRAD imposée aux articles scientifiques – *Introduction*, *Materials and methods*, *Results And Discussion* – d'où le *cadre théorique* du travail exposé est absent.

Le cas de la théorie (4)

La TAD prend position, non bien sûr contre les *empirical studies* de l'EBE, mais contre *l'oubli des phénomènes et des lois didactiques*, qui tend à *réduire* la didactique à l'étude de l'empirie *sans médiation théorique*.

b) Selon l'épistémologie des évergètes, ce qui advient est le fruit de l'action humaine. Par exemple, il n'y a pas de lois propres du fonctionnement des systèmes didactiques, il n'y a pas de lois propres non plus de ses environnements. Il n'y a que les effets des comportements des acteurs humains, professeurs, élèves, parents, etc. C'est, toute proportion gardée, comme si les fourmis expliquaient ce qui se passe dans leur monde de fourmis par l'action des fourmis et uniquement par cela ! Selon une telle épistémologie, on n'a pas à connaître ce qui n'a pas d'existence ou ce dont l'existence compte pour du beurre : disons, *les lois de l'écologie du didactique*. Ce que les évergètes s'emploient à faire, c'est prodiguer des conseils, voire des injonctions aux acteurs sur les « bons » comportements à adopter ; c'est, dès lors qu'ils en ont le pouvoir – de droit ou de fait –,

prendre des décisions visant à définir une orthopraxie dont ils n'étudient pas les conditions de viabilité – absence qui conduit inévitablement à un fiasco. À la place de la recherche, c'est une administration, un management qui s'imposent : les non-chercheurs se font managers. *I shall now continue in English for a very short while.*

c) *The world seems straightforward to benefactors: they assume to know what it is best to do; they voice it, and then wait for those concerned to act accordingly. Admittedly, this requires some work, just as all management does. And it does stir up some trouble, because actors often disregard advice and heedlessly ignore the benefactor's demand. Such is indeed the benefactor's plight.*

d) *Let us now switch back to French.* Nous avons donc deux épistémologies qui s'entrechoquent : une épistémologie qu'on peut dire *préscientifique* (même si ses « porteurs » sont d'éminents scientifiques, mais cela à propos *d'un autre domaine de réalité*), ce qu'on peut appeler une épistémologie *managériale* ; et une épistémologie *scientifique*, où la science et la recherche qu'elle suppose sont les conditions cardinales de l'évolution des systèmes considérés. Le grand problème est évidemment de faire que ces deux épistémologies dialoguent sans s'ostraciser, ce qui suppose d'abord qu'elles *se reconnaissent* l'une l'autre. La chose ne va pas de soi. D'un côté, j'ai toujours critiqué la « tentation académique » de la didactique, celle exactement à laquelle ont succombé, pour leur malheur, il y a longtemps déjà, les sciences de l'éducation : avoir des laboratoires, des postes, des formations doctorales, des maîtres de conférences, des professeurs, bref, tout l'appareil universitaire utile en effet pour simplement exister, mais qui ne saurait par lui-même *faire exister et se développer* un champ scientifique, et conduit souvent à y faire venir à profusion les fleurs mauvaises du formalisme rhétorique, méthodologique, théorique, etc. ; bref, tout ce qui signe l'épuisement d'un champ universitaire. D'un autre côté, les évergètes mathématiciens, je l'ai suggéré, semblent prisonniers de l'idée indurée, non pas seulement de leur supériorité native, mais de l'unicité de la voie à suivre – celle qu'ils ambitionnent indéfiniment d'ouvrir. Le problème est posé et, sans doute, restera sans solution encore quelque temps. *But enough with it!*

LES MATHÉMATIQUES ET NOUS

1. Quelles mathématiques ?

a) Je voudrais rappeler ici ce que j'ai appelé les problématiques *primordiale* et *interventionniste*, qui, on s'en souvient, sont duales l'une de l'autre. La

première se définit ainsi (je reproduis la formulation que adoptée dans le séminaire de l'an dernier) :

> Étant donné un projet d'activité dans lequel telle institution ou telle personne envisage de s'engager, quel est, pour cette institution ou cette personne, l'équipement praxéologique qui peut être jugé indispensable ou simplement utile dans la conception et l'accomplissement de ce projet ?

Alors que la problématique *primordiale* conduit à explorer l'ensemble

$$\{ \wp \ / \ \Im(\wp, \Pi, U) \},$$

la problématique *interventionniste*, elle, appelle l'étude de l'ensemble

$$\{ \Pi \ / \ \Im(\wp, \Pi, U) \}.$$

Dans le premier cas, pour une instance U – personne ou institution – qui souhaite s'engager dans la conception et la réalisation d'un projet Π, on se demande quelles sont les praxéologies $\wp$ utiles ou indispensables ($\Im$). Dans le second, on se demande à quels projets Π formé par une instance U, la praxéologie $\wp$ apparaît utile, voire indispensable.

b) La question plus particulière que je voudrais soulever ici est celle-ci : pour qui projette de faire de la recherche en didactique *des mathématiques*, quelles sont les praxéologies *mathématiques* utiles ou indispensables ? La question relève de la problématique *primordiale* en didactique. Il s'agit donc d'une *question de didactique*, et, puisque apparemment celle-ci est aujourd'hui ouverte, il s'agit d'une question de *recherche* en didactique : elle ne saurait être réglée sur un coin de table par des non-chercheurs à la science infuse. Cette question s'est en vérité posée de façon on ne peut plus concrète récemment, au cours des travaux de conception d'un parcours « Didactique des mathématiques » dans un master de mathématiques. Plus exactement, cette question vient en réaction à une interpellation par des mathématiciens soucieux que le parcours en cause soit mathématiquement appareillé d'une façon qui leur paraisse convenable – mais chacun sait que ce qui apparaît convenable souvent ne convient pas. Bien entendu, il s'agit là d'une attitude qui procède typiquement d'une position de surplomb supposé par rapport à la didactique : nul n'aurait songé à demander aux artisans d'un parcours « Probabilités et statistique » de donner des gages quant au contenu mathématique de ce parcours – une autonomie leur étant à cet égard depuis assez longtemps reconnue. Que, dans un master de mathématiques, un « contrôle de mathématicité » s'exerce sur les différentes spécialités du master et leurs parcours respectifs n'est pas chose anormale, certes, même s'il est vrai que, ici, la rusticité de l'interpellation choque – mais je ne m'étendrai pas davantage là-dessus.

c) Ce qui est vrai, d'abord, c'est qu'il s'agit de former ce que nous pouvons appeler des mathématiciens *didacticiens* – comme on pourrait parler de mathématiciens *statisticiens* –, qui seront titulaires d'un master de mathématiques. Comme il s'agit là d'une variété de mathématiciens aujourd'hui mal reconnue, il n'est pas anormal, je le répète, que des mathématiciens non didacticiens se questionnent et nous questionnent – il est vrai sans délicatesse. Si elle l'est, je l'ai dit, dans son principe, dans quelle mesure et de quelles façons une telle interpellation est-elle recevable ? Je voudrais d'abord énoncer ce que je regarde comme une règle d'or ici comme ailleurs : dans les mathématiques étudiées par les étudiants suivant le parcours DDM, doivent figurer ces mathématiques jugées indispensables par les chercheurs en didactique des mathématiques pour « faire de la didactique des mathématiques » – à ce niveau du cursus des études mathématiques, bien entendu. Il s'agit là d'une règle d'or *universelle* : on pourrait dire de même, je suppose, que, dans les mathématiques étudiées par les étudiants suivant le parcours « Probabilités et statistique », doivent figurer ces mathématiques jugées – à ce niveau du cursus des études mathématiques – indispensables par les chercheurs en probabilités et statistique pour « faire des probabilités ou de la statistique ». En d'autres termes, il faut s'opposer vigoureusement à l'imposition franche ou subreptice de contenus mathématiques *non motivés* qui évinceraient de fait des contenus jugés indispensables par les chercheurs du domaine pour que le parcours porte valablement son titre, celui de « Didactique des mathématiques ».

d) Pour avancer, je voudrais introduire une notion très simple. Dans un domaine de recherche donné, on utilise des connaissances diverses ; en particulier, on peut y utiliser des connaissances mathématiques : je parlerai à leur égard de connaissances mathématiques *manipulées* dans ce domaine. Cela précisé, notons que, dans un domaine mathématique « classique », on manipule des mathématiques pour *produire* des mathématiques ; en didactique des mathématiques, on manipule des mathématiques aussi, mais pour produire des connaissances sur la *diffusion* – scolaire ou non – de connaissances mathématiques : c'est pour cette raison d'abord que la didactique des mathématiques participe à nos yeux du continent des mathématiques. Il semble en vérité que le critère de mathématicité que des mathématiciens souhaitent faire jouer ne s'applique pas tant aux connaissances *produites* qu'aux connaissances *manipulées* pour les produire (et, en second lieu, aux *types de manipulation* mis en jeu). C'est donc sur ces « mathématiques manipulées » par les didacticiens des mathématiques que nous devons nous arrêter : si celles-ci sont pour l'essentiel rudimentaires, ou si leur manipulation est excessivement sommaire, la didactique des mathématiques ne peut, *à ce titre,* réclamer de place dans le monde à accès

très contrôlé des mathématiques appliquées – même si elle conserve son ticket d'entrée du fait des connaissances qu'on y *produit*, qui concernent des connaissances mathématiques, même si ces connaissances produites ne sont pas regardées elles-mêmes comme des connaissances mathématiques.

e) Les connaissances mathématiques utiles ou indispensables dans la recherche en didactique des mathématiques sont ces connaissances que l'on y manipule *et que l'on y manipulera* : il s'agit, *là comme ailleurs*, d'un ensemble praxéologique à la fois *flou* et *évolutif*, dont certains éléments pourront être frappés d'obsolescence demain, tandis que d'autres y apparaîtront nouvellement. J'ai indiqué, lors de la séance 4 de ce séminaire, quelques lignes directrices que je reprends ici.

> Qu'en est-il pour le chercheur en didactique ? Sans doute peut-on envisager ici une autre tripartition : il y a les praxéologies *pour la profession* didacticienne (incluant *entre autres* des praxéologies linguistiques par exemple), ensuite les praxéologies ou plus généralement les œuvres dont la diffusion est l'objet de la recherche didactique (et que les praxéologies pour la profession doivent permettre d'identifier), enfin les praxéologies *pour la recherche* en matière de diffusion des praxéologies et des œuvres (la catégorie des œuvres incluant à la fois la catégorie des praxéologies et la catégorie des questions, que j'ai distinguées plus haut s'agissant des professeurs). Il y a là un chantier sur lequel je ferai quelques pas maintenant, après avoir une fois de plus souligné ceci : l'équipement praxéologique adéquat du didacticien étudiant la diffusion en telle ou telle institution de tel ou tel complexe praxéologique $\wp$ n'a pas à être imposé par quelque institution que ce soit, mais doit être construite – entre conflit et consensus – par l'institution didacticienne elle-même : c'est là un des grands problèmes « de la profession » – sans que cela limite pour autant la liberté de pensée et d'action du chercheur.

Il y aurait donc les praxéologies mathématiques dont la diffusion est l'objet de la recherche didactique considérée, les praxéologies mathématiques utiles à la recherche sur la diffusion de ces praxéologies mathématiques, enfin les praxéologies mathématiques « pour le didacticien » : c'est sur celles-là que je m'arrêterai d'abord dans ce qui suit.

2. Les mathématiques pour le didacticien des mathématiques

a) L'idée des « mathématiques pour le didacticien des mathématiques » n'est sans doute pas éloignée de l'idée d'une *culture commune en mathématiques* de la communauté des didacticiens des mathématiques. Vous voyez que cette notion peut être doublement généralisée : étant donné un complexe

praxéologique $\wp$, relevant de telle discipline $\check{D}$, on parlera des connaissances de $\check{D}$ « pour le didacticien de $\wp$ » ; et on parlera de même des connaissances en telle autre discipline $\check{D}_1$ ($\neq \check{D}$) pour le didacticien de $\wp$. (Un exemple considéré la dernière fois était le cas où $\check{D}$ est la discipline mathématique et où $\check{D}_1$ est l'*anglais*.)

b) Une telle idée est classique, presque banale, bien que nous l'ayons jusqu'ici fort peu travaillée. Je l'illustrerai d'abord sur un exemple au contraire depuis longtemps labouré, au moins depuis Gaspard Riche de Prony (1755-1839), celui des mathématiques *pour l'ingénieur*. Voici pour illustrer cela la table des matières d'un ouvrage de quelque trois cents pages signé de Daniel Fredon et Michel Bridier et intitulé *Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur. Aide-mémoire* (Dunod, 2003).

Partie 1
Analyse
1. Intégration 2
2. Fonctions spéciales 11
3. Approximation de la forme d'une fonction 25
4. Champs scalaires ; champs de vecteurs 29
5. Intégrales multiples 38
6. Intégrales curvilignes 47
7. Intégrales de surface 52
8. Équations aux différences finies 56
9. Suites et séries de fonctions 62
10. Séries entières 68
11. Fonctions d'une variable complexe 76
12. Espaces fonctionnels 89
13. Polynômes orthogonaux 98
14. Séries de Fourier 104
15. Équations aux dérivées partielles 114
16. Distributions 127
17. Convolution 138
18. Transformation de Laplace 144
19. Transformation de Fourier 153
20. transformations discrètes 163
21. Ondelettes 171
22. Calcul des variations 175
Partie 2
Géométrie
23. Courbes 184
24. Surfaces 193
25. Volumes 202

26. Géométrie fractale 209
Partie 3
Probabilités et statistiques
27. Calcul des probabilités 218
28. Variables aléatoires 227
29. Lois usuelles 239
30. Convergences 254
31. Processus aléatoires 261
32. Estimation 268
33. Tests statistiques 276

Je crois pouvoir dire que nous ne sommes pas aujourd'hui en état de brosser un semblable tableau des mathématiques « pour le didacticien ». Je complète d'abord les données précédentes par le sommaire de l'un des chapitres, le troisième, intitulé *Approximation de la forme d'une fonction* :

Courbes de Bézier
    Polynômes de Bernstein
    Courbes de Bézier
Courbes B-splines
    Vecteur nœud
    Fonctions B-splines
    Courbes B-splines

Voici encore le sommaire du chapitre 21, *Ondelettes*.

Analyse temps-fréquence
    Transformation de Gabor
    Transformation de Wigner-Ville
Transformation en ondelettes
    Transformation continue
    Transformation dyadique
    Ondelette de Haar
    Ondelette de Morlet
    Application

Voici enfin le sommaire du chapitre 25, *Volumes*.

Polyèdres réguliers
    Généralités
    Tétraèdre régulier
    Cube
    Octaèdre

Dodécaèdre
Icosaèdre
Autres volumes
Prisme
Pyramide
Tronc de pyramide
Cône circulaire
Tronc de cône circulaire
Sphère
Calotte sphérique
Tore
Barrique

On aura noté que, dans l'ouvrage précédemment examiné, des mathématiques de type « collège » – sur les volumes par exemple – côtoient des mathématiques « postmodernes » – sur la géométrie fractale par exemple. Ce qui détermine leur présence, ce sont les *besoins* en mathématiques d'une catégorie d'utilisateurs – les ingénieurs, ici –, besoins dont la mise au jour suppose une enquête conduisant à un relevé réaliste. J'ajoute que c'est là pour moi un *critère formel d'authenticité* du fait que le choix d'œuvres mathématiques retenus répond à un critère d'utilité.

d) Voici maintenant un autre exemple, qui date davantage (l'ouvrage a été publié chez Springer-Verlag en 1988), celui du livre classique de Lars Gårding et Torbjörn Tambour, *Algebra for Computer Science* – comme vous le voyez, il ne s'agit ici que d'algèbre. La table des matières de cette « algèbre pour l'informatique » est la suivante :

Chapter 1 Number theory
1.1 Divisibility // 1.2 Congruences // 1.3 The theorems of Fermat, Euler and Wilson. // 1.4 Squares and the quadratic reciprocity theorem // 1.5 The Gaussian integers // 1.6 Algebraic numbers // 1.7 Appendix. Primitive elements and a theorem by Gauss // Literature
Chapter 2 Number theory and computing.
2.1 The cost of arithmetic operations // 2.2 Primes and factoring // 2.3 Pseudo-random numbers // Literature
Chapter 3 Abstract algebra and modules.
3.1 The four operations of arithmetic // 3.2 Modules. // 3.3 Module morphisms. Kernels and images. // 3.4 The structure of finite modules // 3.5 Appendix. Finitely generated modules. // Literature
Chapter 4 The finite Fourier transform

4.1 Characters of modules // 4.2 The finite Fourier transform // 4.3 The finite Fourier transform and the quadratic reciprocity law // 4.4 The fast Fourier transform // Literature

Chapter 5 Rings and fields

5.1 Definitions and simple examples // 5.2 Modules over a ring. Ideals and morphisms // 5.3 Abstract linear algebra // Literature

Chapter 6 Algebraic complexity theory

6.1 Polynomial rings in several variables // 6.2 Complexity with respect to multiplication. // 6.3 Appendix. The fast Fourier transform is optimal // Literature

Chapter 7 Polynomial rings, algebraic fields, finite fields.

7.1 Divisibility in a polynomial ring // 7.2 Algebraic numbers and algebraic fields. // 7.3 Finite fields. // Literature

Chapter 8 Shift registers and coding

8.1 The theory of shift registers // 8.2 Generalities about coding // 8.3 Cyclic codes // 8.4 The BCH codes and the Reed-Solomon codes. // 8.5 Restrictions for error-correcting codes. // Literature

Chapter 9 Groups

9.1 General theory / 9.1.1 Groups and subgroups / 9.1.2 Groups of bijections and normal subgroups / 9.1.3 Groups acting on sets // 9.2 Finite groups / 9.2.1 Counting elements / 9.2.2 Symmetry groups and the dihedral groups / 9.2.3 The symmetric and alternating groups / 9.2.4 Groups of low order / 9.2.5 Applications of group theory to combinatorics // Literature

Chapter 10 Boolean algebra

10.1 Boolean algebras and rings // 10.2 Finite Boolean algebras // 10.3 Equivalence classes of switching functions // Literature

Chapter 11 Monoids, automata, languages

11.1 Matrices with elements in a non-commutative algebra // 11.2 Monoids and languages // 11.3 Automata and rational languages // 11.4 Every rational language is accepted by a finite automaton // Literature

Comme c'était déjà le cas avec l'ouvrage précédent, on notera que se côtoient ici des éléments « bien connus » dans le *folklore* mathématique et des élaborations plus évidemment spécifiques, telle la *theory of shift registers*, la « théorie des registres à décalage ». On tient là un deuxième *critère formel d'authenticité* du choix des œuvres mathématiques : si l'ensemble du panorama proposé apparaît familier d'un point de vue déjà existant sur le continent mathématique, on peut douter du fait que les besoins du domaine considéré soient véritablement pris en charge.

e) Le contraste est fort entre les deux tableaux précédents et celui que propose un ouvrage « généraliste » tel l'*Atlas des mathématiques*, dans son édition française parue en 1997 (Librairie Générale Française). J'en

reproduis non pas la table des matières mais la bibliographie placée en tête d'ouvrage :

1. Généralités

Abrégé d'Histoire des Mathématiques, J. Dieudonné, HER, 1978.

Dictionnaire des mathématiques, A. Bouvier, M. George, F. Le Lionnais, PUF, 1993.

Fondement des mathématiques, M. Combes, PUF, 1971.

Les Mathématiciens de A à Z, B. Hauchecorne, D. Surrateau, ELL, 1996.

Histoire des Mathématiques, J.-P. Colette, VUI, 1979.

Vie et Œuvre des grands mathématiciens, J.-L. Audirac, MAG, 1990.

2. Logique mathématique, théorie des ensembles

Logique mathématique, R. Cori, D. Lascar, MAS, 1994.

Logique et fondement de l'informatique, R. Lassaigne, M. de Rougemont, HER, 1993.

Éléments de logique mathématique, G. Kreisel, J.-L Krivine, DUN, 1967.

Théorie axiomatique des ensembles, J.-P. Krivine, PUF, 1972.

3. Relations et structures

Cours d'algèbre, R. Godement, HER, 1969.

Arithmétique et théorie des nombres, J. Itard, PUF, 1963.

Leçons d'algèbre moderne, P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, DUN, 1961.

Structures algébriques finies, A. Warusfel, HAC, 1971.

4. Algèbre

Algèbre générale, B. Charles, D. Allouch, PUF, 1984.

Algèbre, S. Mac-Lane, C. Birkoff, GAU, 1970 (2 tomes).

Leçons d'algèbre moderne, P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, DUN, 1961.

Structures algébriques finies, A. Warusfel, HAC, 1971.

Cours d'algèbre, R. Godement, HER, 1969.

Algèbre commutative, J.-P. Lafon, HER.

Sur les groupes classiques, J. Dieudonné, HER.

Algèbre, Bourbaki, HER.

Algèbre générale, E. Artin, GAU, 1972.

Arithmétique et algèbre moderne, A Chatelet, PUF, 1966 (3 tomes).

Formes quadratiques et groupes classiques, R. Deheuvels, PUF, 1981.

Algèbre commutative, M.-P. Malliavin, MAS, 1985.

Algèbre linéaire et géométrie classique, J.-E. et M.-J. Bertin, MAS, 1981.

Théorie des groupes et de leurs représentations, A. Guichardet, ELL.

5. Les nombres

Éléments de théorie des nombres, R. Descombes, PUF, 1986.

Cours d'arithmétique, J.-P. Serre, PUF, 1970.

Théorie algébrique des nombres, P. Samuel, HER, 1967.

Théorie des nombres, Z.-I. Borevitch, I.-R. Chafarevitch, GAU,1967.

Les Nombres premiers, J. Itard, PUF, 1969.

6. Géométrie, Géométrie analytique

Méthodes modernes en géométrie, J. Fresnel, HER.
Mathématiques, cours et exercices, algèbre et géométrie, P. Sauser, ELL, 1983.
Géométrie, M. Berger, FEN, 1977 (5 tomes).
Géométrie projective, P. Samuel, PUF, 1986.
Groupes, algèbres et géométries, J.-M. Arnaudies, J. Bertin, ELL (2 tomes).
Géométrie affine, projective et euclidienne, C. Tisseron, HER.
Groupes et géométries, B. Sénéchal, HER.
Géométrie analytique, J. Françoise, PUF, 1995.
Géométrie, M. Carral, ELL, 1995.
L'Enseignement de la géométrie, G. Choquet, HER, 1964.

7. Topologie

Cours d'analyse, Topologie, G. Choquet, MAS, 1964.
Topologie générale, Bourbaki, HER.
Topologie générale, J. Dixmier, PUF, 1981.
Éléments d'analyse, J. Dieudonné, GAU (4 tomes).
La Topologie, A. Delachet, PUF, 1978.

8. Topologie algébrique

Topologie des surfaces, A. Gramain, PUF, 1971.
Géométrie et topologie des surfaces, D. Lehmann, C. Sacré, PUF.
Topologie algébrique élémentaire, M. Zisman, ACO, 1972.

9. Théorie des graphes

Théorie des graphes et ses applications, C. Berge, DUN.
Graphes et programmation linéaire, M. Sakarovitch, HER.
Des points et des flèches... la théorie des graphes, A. Kaufmann, DUN, 1968.

10. Analyse réelle

Suites et séries, J. Combes, PUF, 1982.
Cours d'analyse, G. Valiron, MAS, 1950 (2 tomes).
Analyse réelle, S. Lang, INT, 1977.
Cours d'analyse, L. Schwartz, HER (4 tomes).
Compléments d'analyse, J. Avignan, E. Azouley, MCG, 1990.
Cours de mathématiques, tomes 2 et 3, J.-M. Amaudies, H. Fraysse, DUN.
Cours de mathématiques spéciales, tome 2, B. Gostiaux, PUF,1993.

11. Calcul différentiel

Cours de calcul différentiel, H. Cartan, HER.
Calcul infinitésimal, J. Dieudonné, HER.
Fondements du calcul différentiel, P. Ver Ecke, PUF, 1983.
Applications du calcul différentiel, P. Ver Ecke, PUF, 1985.
Calcul différentiel, A. Avez, MAS, 1995.
Équations différentielles, J. Geoffroy, PUF, 1983.
Mathématiques pour l'informatique, tome 2, *équations différentielles,* N. Gastinel, ACO, 1970.

12. Géométrie différentielle

Géométrie différentielle, M. Berger, B. Gostiaux, ACO.
Calcul différentiel et géométrie, D. Leborgne, PUF, 1982.
Géométrie différentielle, J. Lelong-Ferrand, MAS, 1963.
Géométrie différentielle intrinsèque, P. Malliavin, HER, 1972.

13. Tenseurs

Les Tenseurs, L. Schwartz, HER.
Éléments de calcul tensoriel, A. Lichnérowicz, ACO.

14. Théorie des fonctions

Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, H. Cartan, HER.
Calcul différentiel complexe, D. Leborgne, PUF, 1982.
Les Fonctions analytiques, M. Hervé, PUF, 1982.

15. Calcul intégral

L'Intégrale, P. Deheuvels, PUF, 1980.
Intégration, R. Descombes, HER.
Intégration, analyse hilbertienne, A Guichardet, ELL.
Intégration, A. Gramain, HER.
Intégrale de Lebesgue, Mesure et Intégration, M. Bouyssel, CEP, Toulouse.
Leçons sur l'intégration, H. Lebesgue, GAU, 1950.

16. Analyse fonctionnelle

Analyse fonctionnelle, théorie et applications, H. Brézis, MAS, 1992.
Mathématiques pour l'informatique, tome 1, *analyse fonctionnelle,* J.-P. Bertrandias, ACO, 1970.
Analyse fonctionnelle appliquée, J.-P. Aubin, PUF, 1970.
Analyse fonctionnelle, W. Rudin, EDI, 1995.

17. Analyse combinatoire

Analyse combinatoire, L. Comte, PUF (2 tomes).
Mathématiques combinatoires, H.-J. Ryser, DUN, 1969.
Principes de combinatoire, C. Berge, DUN, 1960.

18. Calcul des probabilités et statistiques

Probabilités et statistiques, D. Dacunha-Castelle, M. Duflo, MAS, 1993.
Notions fondamentales de la théorie des probabilités, M. Métivier, DUN, 1968.
Calcul des probabilités, A. Tortrat, MAS.
Éléments de calcul des probabilités, J. Bass, MAS, 1962.
La probabilité, le hasard, la certitude, P. Deheuvels, PUF.
Principes de statistique mathématique, A. Tortrat, « Monographies » DUN, 1961.

19. Optimisation linéaire

La Programmation linéaire par l'exemple, Droesbeke, ELL.
Programmation linéaire, Teghem, ELL.
Des points et des flèches... la théorie des graphes, A. Kaufmann, DUN, 1968.

20. Suppléments

Les Objets fractals, B. Mandelbrot, FLA, 1989.
Algèbre linéaire et applications, H. Mascart, M. Stoka, PUF, 1985.

Analyse de Fourier et applications, R. Dalmasso, C. Gasquet, P. Witombski, MAS, 1990.
Mesure, intégration, convolution et analyse de Fourier, Vo Khac, ELL.
Transformation de Fourier, M. Hervé, PUF, 1986.
Théorie des distributions, L. Schwartz, HER.
Distributions et équations aux dérivées partielles, C. Zuily, HER.
Géométrie différentielle et mécanique, C. Godbillon, HER.
Formes différentielles, H. Cartan, HER.
Groupes de Lie, G. Pichon, HER.
Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, R. Mneimné, F. Testard, HER.
Non Linear Analysis on Manifolds Monge-Ampère Equation, T. Aubin, Grundlehren 252, Springer- Verlag, New York, 1982.

21. Cours de mathématiques

Classes préparatoires, A. Doneddu, VUI.
Classes préparatoires, J.-M. Arnaudies, H. Fraysse, DUN, 1988 (4 tomes).
Cours de mathématiques spéciales, E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, MAS, 1977 (5 tomes).
Cours de mathématiques spéciales, B. Gostiaux, PUF, 1993 (4 tomes).
Cours de mathématiques spéciales, J. Bass, MAS, 1971.
On consultera utilement les ouvrages de Bourbaki, aux Editions Hermann.
Notions fondamentales de mathématiques modernes, R. Saint-Guilhem, ELL, 1989 (2 tomes).
Algèbre et Géométrie, P. Sauser, ELL (2 tomes)

À la vue de ce panorama classique, une question vient, toujours la même : pourquoi inclurait-on telle ou telle élaboration mathématique dans les mathématiques pour le didacticien ? La réponse est évidemment celle inscrite dans le schéma herbartien : parce que cette élaboration est apparue comme un outil indispensable ou du moins utile à la recherche en didactique ; parce que, concrètement, elle a été, d'une manière ou d'une autre, « manipulée » par des chercheurs en didactique des mathématiques dans certains de leurs travaux. Bien entendu, si la question avait été posée il y a quarante ans, ces mathématiques-là n'auraient contenu que fort peu de chose ! De là que s'est imposée alors une disjonction originelle qui nous poursuit encore : faute d'assez de travaux dans son domaine, le didacticien *des mathématiques* se définissait à l'époque non pas tant par son *projet scientifique* que par un certain bagage mathématique, par son « paquetage mathématique », pour employer un mot du jargon militaire, qui, faute d'un corpus spécifique non encore défini, était celui, en gros, d'un professeur de mathématiques du secondaire en début de carrière.

3. Des mathématiques appropriées ?

a) Depuis dix, vingt, trente ans, pour faire de la recherche en didactique des mathématiques, nous avons manipulé assez de mathématiques. Mais je crois bien que nous n'avons pas, jusqu'ici, dressé d'inventaire précis de ces mathématiques-là. Le temps est sans doute venu de nous y essayer. Les mathématiques pour le didacticien, tout comme les mathématiques pour le professeur de mathématiques ou les mathématiques pour l'ingénieur, etc., doivent avoir une première vertu : elles sont ces mathématiques avec lesquelles une certaine familiarité est nécessaire pour rendre compréhensible « ce dont on parle ordinairement dans le métier ». Les mathématiques pour le didacticien des mathématiques doivent permettre à celui-ci d'identifier les mathématiques manipulées – d'une manière ou d'une autre – dans les recherches en didactique auxquelles il a accès par le biais notamment des publications dans ce domaine. Bien entendu, cela inclut les mathématiques à enseigner et *donc* les mathématiques pour le professeur de mathématiques – lesquelles permettent notamment à ce dernier d'identifier les mathématiques à enseigner. Mais, évidemment, cela dépasse ces mathématiques-là, parce que les mathématiques pour le didacticien peuvent en venir à intégrer, au fil du temps, ce qui était d'abord des mathématiques *pour la recherche en didactique* et plus précisément pour telle ou telle recherche déterminée.

b) Je voudrais *ébaucher* de cela un exemple. Les nombres sont un domaine important des mathématiques enseignées et des mathématiques à enseigner. Que doit savoir un didacticien des mathématiques à leur propos, hors de toute recherche particulière ? La liste des éléments de mathématiques serait longue et je ne me lancerai pas à la dresser ici. Bien entendu, il doit avoir étudié ce qu'on nomme la « construction » des systèmes de nombres – du système des nombres *réels* notamment – à propos duquel on peut regarder par exemple ce que Marc Rogalski, avec Aline Robert et Nicolas Pouyanne, proposent dans l'annexe 3 de leur ouvrage *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie* (Ellipses, 2001). On sait peut-être – je le note ici en passant – qu'on peut aujourd'hui obtenir un master de mathématiques sans avoir jamais étudié cette question, alors même que c'est là un élément emblématique du critère de mathématicité que tel mathématicien ami veut nous appliquer ! Cela noté, le futur mathématicien didacticien doit aussi apprendre bien d'autres choses. Voici un exemple apparu à l'occasion du travail qui devait aboutir à la thèse de doctorat de Marianna Bosch (1994). Dans le texte du savoir mathématique de l'enseignement primaire supérieur d'autrefois, la notion de *grandeurs proportionnelles* proposée était la suivante – j'emprunte la définition ci-après (qui vient après un exemple concernant le

prix du sucre) à l'ouvrage de Jules Gal et André Marijon, *Les problèmes résolus par la méthode naïve*, paru en 1929 chez Fernand Nathan, p. 25 :

> Deux grandeurs liées l'une à l'autre comme le sont le poids et le prix d'une même quantité de sucre sont dites proportionnelles. La proportionnalité de deux grandeurs est caractérisée par les conditions suivantes :
> Soient deux grandeurs g et G, telles que la grandeur g étant déterminée, G le sera aussi, c'est-à-dire *deux grandeurs fonction l'une de l'autre*.
> Il y aura proportionnalité entre ces deux grandeurs :
> 1° *Si g correspondant à G, g'* à *G', g=g' entraîne G=G'.* En supposant que g soit le poids d'une certaine quantité de sucre, G le prix correspondant, cela veut dire que des poids égaux de sucre ont des prix égaux, ou encore qu'il s'agit de considérer toujours du sucre de même qualité.
> 2° *Si g correspond à G, g_1 à G_1, $g+g_1$ correspond à $G+G_1$*. […]
> Des conditions 1° et 2°, il résulte que si la grandeur g est doublée, la grandeur G l'est aussi (à $g+g$ correspond G+G) si g est triplée ($2g+g$) G l'est aussi ($2G+G$) et ainsi de suite…

Traduisons : deux grandeurs x et $y = f(x)$ sont proportionnelles si et seulement si f est *additive*. Comme le notent Gal et Marijon, si f est additive, c'est-à-dire si $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ pour tous x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, on a $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a aussi $f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x)$ et, plus généralement, $f(rx) = rf(x)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$: tout cela est classique. Mais cette égalité demeure-t-elle vraie pour tout $r \in \mathbb{R}$? La définition « classique » des grandeurs proportionnelles manque-t-elle de rigueur sur un point qui est lui-même une difficulté classique – le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. Qu'en est-il ?

c) Deux points sont d'abord à noter. Tout d'abord, il suffit de prêter à f une certaine propriété de régularité pour pouvoir conclure positivement. Si, par exemple, f est additive et *continue en un point*, alors f est $\mathbb{R}$-linéaire : pour qu'elle ne le soit pas, il faudrait donc que f ne soit continue en aucun point de $\mathbb{R}$! De même, s'il existe un intervalle d'intérieur non vide – si « petit » soit-il – où f est *bornée*, alors l'additivité de f implique sa $\mathbb{R}$-linéarité : pour qu'il en aille autrement, il faudrait que f ne soit bornée sur aucun intervalle d'intérieur non vide ! Cela suffit à conclure que « l'axiomatique de l'école primaire » est *pratiquement* complète. Mais on peut aller plus loin. On démontre en effet que si f est additive et en même temps *mesurable au sens de Lebesgue*, alors f est $\mathbb{R}$-linéaire : Marianna Bosch le démontre dans les deux dernières pages de son mémoire de master intitulé *El semiòtic i l'instrumental en el tractament clàssic de les situacions de proporcionalitat* (1991). Certaines avancées relativement récentes permettent pourtant d'aller plus profond. On a donné depuis longtemps des contre-exemples de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont à la fois additive et non $\mathbb{R}$-linéaire. Ainsi,

dans le chapitre 4 intitulé « Nombres réels » de sa *Topologie générale*, Bourbaki propose-t-il un « exercice » (§ 6, n° 2) dans lequel on construit une fonction f additive mais pas $\mathbb{R}$-linéaire, qui, bien entendu, s'avère être un « monstre » : pour tout $z \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(z)$ est *partout dense* dans $\mathbb{R}$. La construction en question fait appel à une « base de Hamel », c'est-à-dire à une base de $\mathbb{R}$ regardé comme espace vectoriel sur le corps de scalaires $\mathbb{Q}$ (voir l'article « Georg Hamel » de *Wikipédia*). Mais le recours à une base Hamel suppose lui-même l'appel à l'*axiome du choix*. Or, ainsi que l'a montré Robert M. Solovay (1970), si l'on travaille dans un univers où l'on renonce à l'axiome du choix « fort » (tout en conservant un axiome du choix convenable pour le travail mathématique usuel), on peut admettre sous certaines conditions (à savoir l'existence d'un « cardinal inaccessible ») que *tout ensemble de réels est mesurable au sens de Lebesgue*. Voici à ce propos le théorème que démontre Jean-Louis Krivine dans sa *Théorie des ensembles* (Cassini, 1998, p. 224) :

> Théorème 17.8. *Si ZF + AC + CI est non contradictoire, alors ZF + AF + ACD + « toute partie de* $\mathbb{R}^n$ *est mesurable-Lebesgue » l'est aussi.*

ZF est l'axiomatique de Zermelo-Frænkel de la théorie des ensembles, *AC* est l'axiome du choix, *CI* est l'axiome « Il existe un cardinal inaccessible », *AF* est l'axiome de fondation et *ACD* est l'axiome du choix dépendant : sur tout cela le lecteur pourra se reporter au livre cité. Mais voici maintenant le commentaire que l'auteur fait du théorème précédent (pp. 224-225) :

> Ce résultat est intéressant, car il montre que l'on peut admettre l'axiome : « toute partie de $\mathbb{R}^n$ est mesurable », tout en conservant une forme de l'axiome du choix (à savoir *ACD*) qui est tout à fait suffisante pour développer la théorie de la mesure de Lebesgue et, en fait, pratiquement toute l'analyse. Bien entendu, on ne peut pas conserver l'axiome du choix lui-même, puisqu'il a pour conséquence l'existence de parties non mesurables de $\mathbb{R}$…

d) La question des fonctions additives relève, de fait et *donc* de droit, des mathématiques *pour la recherche en didactique*. Faudra-t-il la compter (avec certains au moins des outils de logique et de théorie des ensembles qui permettent d'y répondre) au nombre des questions dont se nourrissent les mathématiques *pour le didacticien* ? Cette interrogation, que je laisserai ouverte, me permettra d'illustrer un point essentiel : on ne saurait en tout cas refuser la question des fonctions additives au motif qu'elle n'aurait pas suscité un intérêt semblable *ailleurs* en mathématiques. Ce qui est « mathématiques pour le didacticien » ne saurait résulter d'une simple mise en conformité avec des besoins *qui ne sont pas ceux des didacticiens*, ce qui aurait pour premier effet de nous obliger à jeter par dessus bord des

connaissances utiles, au motif de leur particularisme mathématique (ce qui est en fait le cas de toute élaboration mathématique *en ses débuts*).

4. Une différence assumée ?

a) Pour beaucoup de communautés scientifiques, les mathématiques sont un *genre prochain*. Mais la plupart d'entre elles parviennent à définir et à assumer – voire à revendiquer quand la chose paraît incontournable – leur *différence spécifique*, où se marquent leurs besoins mathématiques et la manière qui est la leur d'y répondre. À l'opposé de ce type de rapports spécifiques aux mathématiques – celui du statisticien, de l'informaticien, du topologue, etc. – existe un autre rapport auquel sont exposés tous ceux qui pensent n'avoir pas de différence propre et donne alors, de ce fait, dans ce que j'appellerai un *frégolisme mathématique*, croyant être analystes quand ils manipulent de l'analyse, géomètres quand il s'agit de géométrie, probabiliste lorsqu'ils manient des probabilités, des informaticiens lorsqu'ils ont commerce avec des programmes, etc. Or ce que nous devons construire et assumer, c'est précisément, non pas un tel mimétisme infécond et burlesque (qui, au mieux, finira par faire ici un analyste, là un géomètre, etc.), mais un rapport didacticien aux mathématiques qui soit le moyen – non la fin – de la production de connaissances justes, pertinentes, utiles relatives à la diffusion et à la non-diffusion des connaissances mathématiques.

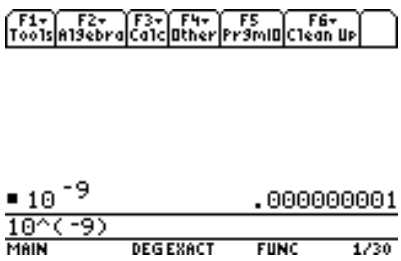
b) À titre d'exemple, je voudrais proposer le motif d'un petit chantier mathématique encore ouvert. Vous connaissez les exemples que j'ai utilisés pour mettre à mal certaines idées fausses sur l'usage des calculatrices dans la classe de mathématiques : si ma calculatrice affiche les mêmes chiffres pour les expressions $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ et si a, b et c ne sont pas trop grands, alors *c'est qu'on a l'égalité* $a\sqrt{b} = \sqrt{c}$. La raison de la chose peut être exprimée ainsi :

$$a\sqrt{b} \neq \sqrt{c} \Rightarrow |a\sqrt{b} - \sqrt{c}| = \frac{|a^2 b - c|}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} \geq \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Si a, b, $c < 10^6$ (par exemple), on a $a\sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 10^9$ et il vient donc :

$$a\sqrt{b} \neq \sqrt{c} \Rightarrow |a\sqrt{b} - \sqrt{c}| \geq 10^{-9}.$$

Or sur une calculatrice d'aujourd'hui, une différence supérieure à 10^{-9} *se voit à l'affichage* : si la différence entre $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ ne se voit pas, c'est qu'il n'y en a pas ! Ma question est alors : comment généraliser ce type de résultats ?



CONSIDÉRATIONS NON INACTUELLES 2

Comme beaucoup d'entre vous le savent sans doute, j'ai appris il y a peu que le comité compétent, présidé par Mogens Niss, de la Commission internationale de l'enseignement des mathématiques – en anglais, *the International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) –, qui est une commission de l'*International Mathematical Union* (IMU), l'Union mathématique internationale, m'a décerné le *prix Hans Freudenthal 2009* – en même temps qu'il attribuait le *prix Felix Klein* à notre collègue australienne *Gilah Leder*. À cet égard, je me permets de reproduire ici, sans commentaire, l'annonce diffusée récemment par Bill Barton, président de l'ICMI.

Dear ICMI Representatives,

The ICMI Awards Committee has reached a decision concerning the 2009 Felix Klein and Hans Freudenthal Awards.

It is my very great pleasure to announce that the Klein Award goes to Gilah Leder, Australia, and the Freudenthal Award goes to Yves Chevallard, France. My warmest congratulations to Gilah and Yves for this recognition by our community of their outstanding contributions. We are delighted to celebrate your achievements.

Bill Barton

ICMI President

Chers Représentants ICMI,

Le Comité des Prix ICMI a pris une décision au sujet des prix 2009 Felix Klein et Hans Freudenthal et c'est avec un grand plaisir que je vous annonce que le Prix Felix Klein est décerné à Gilah Leder, Australie, et le Prix Hans Freudenthal à Yves Chevallard, France. Mes félicitations les plus chaleureuses à Gilah et à Yves pour cette reconnaissance par notre communauté de leurs contributions exceptionnelles. Nous sommes enchantés de célébrer vos accomplissements.

Bill Barton

ICMI Président

The citation for Gilah reads:

It is with great pleasure that the ICMI Awards Committee hereby announces that the Felix Klein Medal for 2009 is given to IAS Distinguished Professor and Professor Emerita Gilah C. Leder, La Trobe University, Bundoora, Victoria,

Australia, in recognition of her more than thirty years of sustained, consistent, and outstanding lifetime achievements in mathematics education research and development. With a background as a highly recognised secondary teacher of mathematics, Gilah Leder moved, through a number of steps, into research in mathematics education, with a particular emphasis - from the very beginning of her research career - on gender success and equity in mathematics education, but also more broadly on students' affects, attitudes, beliefs, and self-concepts in relation to mathematics education, at educational levels ranging from school to university. To a very high degree her work has contributed to shaping these areas and made a seminal impact on all subsequent research. Moreover, Gilah Leder has done significant work with regard to assessment in mathematics education, mathematically able students, research methodology, supervision of graduate students, and teacher education. A characteristic feature of Gilah Leder's work - published in almost two hundred scholarly publications - is its application of perspectives and theories from sociology and psychology along with mathematical perspectives.

Gilah Leder's achievements include a remarkable amount of work for national, regional, and international mathematics education communities in a leadership role, as well as a committee or board member, an editorial board member for several journals and book series, as a mentor and supervisor of graduate students, as a visiting scholar in several countries, and as an invited key note speaker at numerous conferences in all continents.

The citation for Yves Chevallard reads:

It is with great pleasure that the ICMI Awards Committee hereby announces that the Hans Freudenthal Medal for 2009 is given to Professor Yves Chevallard, IUFM d'Aix-Marseille, France, in recognition of his foundation and development over the last two and a half decades of a very original, fruitful and influential research programme in mathematics education. The first part of the programme, developed in the 1980s, was focused on the notion of didactical transposition of mathematical knowledge from outside school to inside the mathematics classroom, a transposition which also transforms the very nature of mathematical knowledge. This idea has been further developed, in the 1990s and beyond, into a more general study of the varying institutional characteristics and cultures within which mathematics is being practised in terms of different praxeologies (combining praxis and logos). This gave rise to the so-called anthropological theory of the didactic (ATD) which offers a tool for modelling and analysing a diversity of human activities in relation to mathematics. On that basis Yves Chevallard has developed an entirely new approach to teacher training focusing on the needs and problems of the profession operating in what he calls "clinics for training" which are also cumulatively establishing "archives for training".

It is a characteristic feature of Yves Chevallard's work and impact that he continues to collaborate closely with colleagues in France and Spain and that his work has had a great impact internationally, and not the least so in Latin America. This is reflected in a large number of doctoral dissertations that have been written in various countries about, or within the framework of, his theory. International conferences on ATD have been held in 2005, 2007, and 2010, each of which has gathered about a hundred researchers from Europe, America, Africa, and Asia. In some countries, including Chile and Mexico, Yves Chevallard's work also has exerted a direct influence on curriculum development and in-service teacher training.

That's all, folks!

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

➔ Séance 6 – Vendredi 30 avril 2010

VERS UNE PÉDAGOGIE DE L'ENQUÊTE ?

1. Qu'est-ce qu'une question ?

a) La théorie de l'enquête codisciplinaire est fondée sur la notion de *question* : étant donné une question *Q*, on étudie *Q*, on enquête sur *Q*. Mais qu'est-ce au juste qu'une question ? Qu'appelle-t-on « question » en TAD ? Je ferai dans ce qui suit une série de remarques, sans viser bien sûr à établir une réponse « complète »

b) L'article "Question" de *Wikipedia* dresse ce panorama liminaire :

A question may be either a linguistic expression used to make a request for information, or else the request itself made by such an expression. This information is provided with an answer.
Questions are normally put or asked using interrogative sentences. However they can also be put by imperative sentences, which normally express commands: "Tell me what two plus two is"; conversely, some expressions, such as "Would you pass the salt?", have the grammatical form of questions but actually function as requests for action, not for answers, making them allofunctional. (A phrase such as this could, theoretically, also be viewed not merely as a request but as an observation of the other person's desire to comply with the request given.)

Dans ce qui suit, on s'imposera de formuler une question sous la forme d'une phrase interrogative ; et on écartera les phrases interrogatives qui sont en fait « allofonctionnelles » – qui ont, en l'espèce, une autre fonction que celle de questionner.

2. Types de questions

a) L'apparente profusion des « types » de questions semble décourager toute analyse classificatoire. En TAD, les points d'appui d'une telle analyse sont les notions d'*institution* et de *praxéologie*. Un premier type de questions peut être désigné comme celui des questions « demandant » une *technique* : les questions en « Comment ? », dont voici quelques exemples :

- Comment déterminer le minimum de $|\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}|$, où a, b, c sont des entiers tels que $1 \leq a, b, c \leq 10^4$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} \neq 0$?
- Comment lire en anglais l'expression $|\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}|$?
- Comment résoudre l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$?

Ici, la réponse attendue a pour contenu, en chaque cas, une *technique* τ relative à un certain *type de tâches T* dont relève la tâche *t* précisée dans la question. Ce qu'il est alors essentiel de « voir », c'est une réalité *manquante*, « élidée » : une réalité *institutionnelle*. On la devine déjà mieux dans les formulations que voici :

- Comment *détermine-t-on* le minimum de $|\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}|$, où a, b, c sont des entiers tels que $1 \leq a, b, c \leq 10^4$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} \neq 0$?
- Comment *lit-on* en anglais l'expression $|\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}|$?
- Comment *résout-on* l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$?

Le « on » est ici l'indice d'un monde institutionnel dont il désigne le sujet générique. De là ces nouvelles formulations, où s'introduit la référence à la relativité institutionnelle :

- Comment, *en telle institution*, détermine-t-on le minimum de $|\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}|$, où a, b, c sont des entiers tels que $1 \leq a, b, c \leq 10^4$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} \neq 0$?
- Comment, *en telle institution*, lit-on en anglais l'expression $|\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}|$?
- Comment, *en telle institution*, résout-on l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$?

L'institution, ici, n'est pas précisée ; lorsqu'elle est élidée, ainsi qu'on l'a dit, tout se passe comme si elle était *unique* et comme s'il existait ainsi une technique elle-même *unique*, et donc implicitement *universelle*, répondant à la question soulevée. C'est là un *effet de langage* qui refoule et masque la *relativité institutionnelle* des praxéologies.

b) Arrêtons-nous maintenant sur ce qui semble être un autre type de questions, les questions en « Pourquoi ? », telles celles-ci :

- Pourquoi y a-t-il des marées ?
- Pourquoi ne doit-on pas saler la viande pendant la cuisson ?
- Pourquoi « compléter le carré » pour résoudre une équation du second degré ?

Là encore, il faut restituer la référence institutionnelle devenue implicite ; je le ferai de façon plus explicite encore que précédemment :

- *Quelle institution explique* le phénomène des marées et *comment* l'explique-t-elle ?
- *Quelle institution explique* qu'on ne doit pas saler la viande pendant la cuisson et *comment* l'explique-t-elle ?
- *Quelle institution explique* qu'il faut « compléter le carré » pour résoudre une équation du second degré et *comment* l'explique-t-elle ?

Ce que l'on voit ainsi, c'est que, derrière une question en « Pourquoi ? », il y a en vérité une question en « Comment ? » : on se ramène, par le biais du *genre de tâches* auquel est associé le verbe *expliquer*, à une tâche institutionnelle déterminée, en n'oubliant pas qu'une « explication » – une *technologie* – se réfère en principe (et en fait) à tout un *type* de tâches. Cela noté, on peut « travailler » encore un peu les formulations obtenues ; on arrive alors à ceci :

- *Quelles institutions expliquent* le phénomène des marées et *comment* l'expliquent-elles ?
- *Quelles institutions expliquent* qu'on ne doit pas saler la viande pendant la cuisson et *comment* l'expliquent-elles ?
- *Quelles institutions expliquent* qu'il faut « compléter le carré » pour résoudre une équation du second degré et *comment* l'expliquent-elles?

Dans chaque cas, l'institution se manifeste à travers des personnes, sujets de cette institution : au lieu de « Quelles institutions expliquent… », on pourrait écrire « Quelles personnes expliquent… » ; ou, de façon développée, « Quelles personnes ou institutions expliquent… ».

c) Considérons maintenant les questions étudiées jusqu'ici dans l'atelier « Enquêtes sur Internet » du collège Vieux Port :

1. Un *milliard* (de dollars), c'est *mille* millions (de dollars) ; mais qu'est-ce qu'un *trillion* (de dollars) ?
2. Pourquoi les insectes de nuit se précipitent-ils sur les sources de lumière ?
3. Pourquoi l'oignon fait-il pleurer ?
4. Est-il vrai que les batailles sont devenues plus meurtrières au XIX^{e} siècle ?
5. Quelle est la 500^{e} décimale de π ?
6. Pourquoi (et de combien) le réchauffement climatique ferait-il monter le niveau des mers ?
7. Lorsqu'on copie une URL dans la [barre] d'adresse d'un navigateur et que l'on appuie sur la touche « Entrée » (par exemple), on voit (sauf accident) s'afficher plus ou moins rapidement une page Web. D'où cette page vient-elle ? Comment arrive-t-elle sur l'écran de l'ordinateur ?

De quels types sont ces questions ? La courte liste précédente n'a certes pas été constituée pour mettre à l'épreuve notre ébauche de classification. La première de ces questions – qu'est-ce qu'un trillion ? – représente toutes les questions du type « Qu'est-ce qu'un(e)… ? ». Il est clair qu'elle se reformule selon un patron devenu familier, où « définir » se substitue à « expliquer » :

1'. Quelles institutions *définissent* la notion de trillion et *comment* le font-elles ?

Les questions 2 et 3 sont d'un type déjà rencontrés ; on peut les reformuler ainsi :

2’. *Quelles institutions expliquent* que les insectes de nuit se précipitent sur les sources de lumière et *comment* l’expliquent-elles ?

3’. *Quelles institutions expliquent* que l’oignon fait pleurer et *comment* l’expliquent-elles ?

Les questions 4 et 5 proposent un cas de figure légèrement différent et, au fond, très fréquent dans la vie de tous les jours. Considérons ainsi la question convenue « Quelle heure est-il ? ». On peut la développer ainsi :

Quelles institutions disposent-elles d’une technique pour déterminer l’heure ici et maintenant, et à quelle réponse conduit la mise en œuvre de cette technique ?

On aura ainsi :

4’. Quelles institutions disposent-elles d’une technique pour déterminer s’il est vrai que les batailles sont devenues plus meurtrières au XIX^e^ siècle et à quelle réponse conduit la mise en œuvre de cette technique ?

5’. Quelles institutions disposent-elles d’une technique pour déterminer la 500^e^ décimale de π et à quelle réponse conduit la mise en œuvre de cette technique ?

On observera que, ici, la technique est en quelque sorte mise entre parenthèses. Un développement plus complet donnerait ceci :

Quelles institutions disposent-elles d’une technique pour déterminer l’heure ici et maintenant, *quelle est cette technique*, et à quelle réponse conduit sa mise en œuvre ?

4”. Quelles institutions disposent-elles d’une technique pour déterminer s’il est vrai que les batailles sont devenues plus meurtrières au XIX^e^ siècle, *quelle est cette technique*, et à quelle réponse conduit sa mise en œuvre ?

5”. Quelles institutions disposent-elles d’une technique pour déterminer la 500^e^ décimale de π, *quelle est cette technique*, et à quelle réponse conduit sa mise en œuvre ?

Les questions 6 et 7 font retrouver un patron antérieur. La question 6 condense en fait deux questions, 6_A et 6_B, correspondant respectivement à « Pourquoi ? » et à « De combien ? » ; on peut les expliciter comme suit :

6_A’. Quelles institutions expliquent-elles que le réchauffement climatique ferait monter le niveau des mers et comment l’expliquent-elles ?

6_B'. Quelles institutions disposent-elles d'une technique pour déterminer de combien le réchauffement climatique ferait monter le niveau des mers, [quelle est cette technique,] et à quelle réponse conduit sa mise en œuvre ?

Je laisserai là pour aujourd'hui cette ébauche d'analyse, en abandonnant à la sagacité du lecteur l'analyse de la question 7, que je rappelle :

7. Lorsqu'on copie une URL dans la [barre] d'adresse d'un navigateur et que l'on appuie sur la touche « Entrée » (par exemple), on voit (sauf accident) s'afficher plus ou moins rapidement une page Web. D'où cette page vient-elle ? Comment arrive-t-elle sur l'écran de l'ordinateur ?

3. Problèmes, problématiques

a) Il est entendu en TAD que le point de départ d'une recherche, ou plutôt d'un *processus d'étude et de recherche*, se trouve dans une *question Q* sur laquelle on enquête. Le mot de question est, à cet égard, premier. Longtemps, historiquement, on parle ainsi de *questions de mathématiques*, de *questions de physique*, etc. Ainsi en va-t-il encore, par exemple, avec l'édition par Condorcet et Lacroix, en 1789, de l'ouvrage de Leonhard Euler (1707-1783) qu'ils publient sous le titre *Lettres de M. Euler à une princesse d'Allemagne sur différentes* questions *de physique et de philosophie*. Ce n'est en fait qu'au XVII^{e} siècle que l'on commence à parler d'un *problème* de mathématiques ou de physique.

b) En TAD, on dira qu'une question devient un *problème* si – conformément à l'étymologie grecque de ce mot : *pro* « devant soi », *ballein* « lancer » –, cette question a été « lancée » devant une communauté, à la façon d'une énigme à résoudre. C'est ce que j'ai fait moi-même lors de la dernière séance en posant devant vous la question de la généralisation de certains résultats mathématiques autour des bons usages de la calculatrice. Le mot de *problème* est parfois employé de façon plus restrictive pour désigner une question lancée devant une *communauté disciplinaire constituée* – « problème de biologie », « problème de mathématiques », etc. En TAD, on lui laissera pourtant un sens générique *ouvert*, parce qu'un problème au sens premier du terme peut être l'occasion de la constitution d'une *nouvelle* communauté disciplinaire, qui sera vue peut-être comme une sous-communauté d'une communauté existante. Rien n'empêche, bien sûr, de parler de problème de physique, ou de sociologie, etc. ; mais la liste qu'on peut dresser à un moment donné ne saurait être close.

c) Voici maintenant un fait cardinal : il semble que, en sciences de l'éducation et, plus largement, dans les SHS, le mot de problème ait été, au

cours des dernières décennies, déplacé par celui de… *problématique*. J'ai reproduit ci-dessous un exemple typique de ce fait, rencontré sur une liste de discussion (http://fr.answers.yahoo.com/question/index?qid=20080416050738AAUMO1p). Je n'ai pas retouché le « style » d'une écriture qui semble aujourd'hui être la norme chez les étudiants, à ce détail près que la rédactrice marque à l'écrit l'effacement du schwa qu'elle doit pratiquer à l'oral. (Bien entendu, on comprendra que, dans ce qui suit, elle fait référence à la différence entre « le réel » et « le prescrit » – et non « le proscrit ».)

> BESOIN d'AIDE pour la PROBLEMATIQUE de mon MEMOIRE de SOCIOLOGIE !!!?
> bonjour,
> je suis en perdu avec la problématique de mon mémoire!!!
> j'étudie la vie solaire (cpe+surveillant) dans un lycée général. je voudrais mettre en avant la différence entre le réel et le proscrit dans la vie scolaire, particulierement chez les surveillants. c'est à dire ce que leur profession leur dit de faire, et ce qu'il font réellement. Partir sur un terrain de la sociologie des organisations et du travail. les rapport de force, les liens avec leur hierarchie.
> comme vous le voyez c'est trés vaste, et pas trés organiser, ca part un peu dans tout les sens…
> je crois que ce sujet n'était pas fait pour moi, mais maintenant il est trop tard, vu le temps qui reste, et j'ai deja poser mon terrain, une partie de mes entretiens et de mon observaation.
> pouvez vous svp, m'aider a trouver une problématisation, des hypothese de départ, des auteurs… quelques chose de plus structurer que ce que j'suis en train de produire
> J'suis vraiment desespérée
> merci d'avance!!!

L'article de *Wikipédia* intitulé « Problématique » est au reste typique du sort fait actuellement à ce mot dans l'institution étudiante. Il commence par ces lignes :

> La problématique est la présentation d'un problème sous différents aspects. Dans un mémoire de fin d'étude, la problématique est la question à laquelle l'étudiant va tâcher de répondre. Une problématique mal posée est un hors-sujet.

On le voit, cet alinéa est composite : tout d'abord, la problématique, ce serait « la présentation d'un problème sous différents aspects » ; mais la problématique, ce serait aussi, « dans un mémoire de fin d'étude », « la question à laquelle l'étudiant va tâcher de répondre ». On sourira devant la

troisième assertion, qui identifie « problématique mal posée » et « hors-sujet ».

d) Le *Dictionnaire historique de la langue française* (1993) indique ceci :

> … plus tard, sous l'influence de l'allemand *Problematik* et dans un usage didactique, ***la problématique*** n. f. (1951) désigne la technique qui consiste à bien poser un problème ou un ensemble cohérent de problèmes et, par métonymie, l'ensemble des problèmes se posant sur un sujet déterminé.

Dans son étude sur *L'épistémologie historique de Gaston Bachelard* (Vrin, Paris, 4e éd. 1974), Dominique Lecourt apporte ces précisions :

> Bachelard disait déjà en 1927 que le *sens du problème* était le nerf du progrès scientifique ; c'est une idée qu'il n'a cessé d'approfondir par la suite. Elle trouve son expression la plus achevée dans le *Rationalisme Appliqué*, lorsque Bachelard énonce le concept nouveau de *problématique*, pour rendre compte, dans le cadre de la nouvelle épistémologie, de ce qu'il avait jadis essayé de penser sous la métaphore mathématique de *corps de problèmes*…

L'ouvrage de Bachelard intitulé *Le rationalisme appliqué* est de 1949. Le *substantif* « problématique » apparaît donc *avant* 1951. Je reproduis ici un passage du *Rationalisme appliqué* où apparaît ce mot, passage qui fera écho plus loin à des considérations plus larges à propos de la notion d'enquête :

> Tout va s'éclairer si nous plaçons l'objet de connaissance dans une problématique, si nous l'indiquons dans un processus discursif d'instruction, comme un élément situé entre rationalisme enseignant et rationalisme enseigné. Il va sans dire qu'il s'agit maintenant d'un objet *intéressant*, d'un objet pour lequel on n'a pas *achevé* le processus d'objectivation, d'un objet qui ne renvoie pas purement et simplement à un passé de connaissance incrusté dans un nom. Pour le dire en passant, n'est-ce pas par une ironie d'un sort de philosophe que beaucoup d'existentialismes restent des nominalismes ? Croyant se mettre en marge des philosophies de la connaissance, les doctrines existentialistes se limitent, en bien des circonstances, aux doctrines de la *reconnaissance*. Et souvent, prétendant vivre leur expérience présente, ils laissent aux choses leur passé de choses reconnues. L'objet reconnu et nommé leur cache *l'objet-à-connaître*. Si l'on fait ainsi à un existentialiste une objection de ce passéisme de sa théorie de la connaissance, il se tourne tout d'une pièce vers un avenir de connaissances et il commence à développer, devant n'importe quel objet de la vie commune, la singularité de son attitude de sujet ouvert à toute connaissance. Il passe du toujours connu au jamais

> connu avec la plus grande aisance. Il n'envisage pas vraiment un existentialisme de la connaissance progressive. (p. 55)

À ce passage, j'en ajoute un second, plus bref :

> Tout ce qu'il nous faut, pour l'instant, c'est d'avoir suggéré au lecteur l'idée nécessaire d'une problématique antécédente à toute expérience qui se veut *instructive*, une problématique qui se fonde, avant de se préciser, sur un doute spécifique, sur un doute *spécifié par l'objet à connaître*. (p. 56)

Dans le contexte de ce qui demeure une analyse philosophique, on voit poindre ici l'idée de la problématique comme *moyen* et comme *résultat* d'une « problématisation », comme permettant et exprimant le processus consistant à « problématiser » un « objet », c'est-à-dire à porter sur lui un regard qui le fasse apparaître comme « problématique ». La problématique, ce serait donc à la fois *le questionnement d'un objet* et *la matrice du système de questions* posées à propos de cet objet.

e) Entre Bachelard et nous, il y a eu toute une période de tranquillité sémantique, où l'emploi de *problématique* ne paraissaient guère hors des productions savantes. C'est ainsi que l'édition 1995 de l'*Encyclopædia Universalis* contient 613 articles dans lesquels le mot *problématique* possède au moins une occurrence. Voici à titre d'illustration un florilège d'apparitions du mot.

> **Ontologie.** « … on examinera d'abord comment la science – principalement la science physique – déploie une problématique ontologique lorsque vient à se poser la question du statu de réalité des entités qui constituent le référent du discours scientifique. »
> **Croyance.** « Une première problématique se noue ainsi à partir de l'opposition *opinion-science*.
> **Structuralisme.** « C'est sans doute à Prague que la filiation à la problématique saussurienne s'affirme le plus explicitement. »
> **Historicité.** « Dans la tradition allemande, ce processus qui met en question le concept de vérité est appelé "problématique de l'historicisme", c'est-à-dire du relativisme historique. »
> **Liberté.** « … il s'agira alors de développer ces suggestions, implicitement contenues dans les deux premiers discours, et de les rattacher à une problématique, à un mode de questionnement, qui en révèlent la dimension proprement philosophique. »
> **Femme.** « … l'enjeu d'une pensée du féminin est très étroitement lié à une pensée du rapport des sexes qui soit capable de conceptualiser un rapport

mettant lui-même en crise une problématique essentialiste, naturaliste ou ontologique. »

Infini mathématique. « L'essor, de Fermat à Leibniz, du calcul infinitésimal va exiger la mise en œuvre d'une nouvelle problématique. »

Littérature comparée. « Le temps est donc propice aux réflexions sur la problématique, la méthodologie et la prospective du comparatisme. »

Piaget. « Quand il publie sa thèse, à vingt-cinq ans, sa problématique de l'évolution dépasse déjà largement celle de l'étude des êtres organisés, qui ne cessera pourtant de le préoccuper. »

Heuristique. « Il reste à savoir si les recommandations heuristiques qui sont issues de cette problématique ne tombent pas sous le coup de la critique cinglante que Leibniz adressait à la méthode cartésienne : "Et peu s'en faut que je ne les déclare semblables au précepte de je ne sais quel chimiste : prends ce qu'il faut, opère comme il faut et tu obtiendras ce que tu souhaites." »

Renaissance. « On entrevoit donc une problématique nouvelle de l'histoire des épidémies, même si l'étude des variations historiques des vecteurs et des facteurs pathogènes reste à faire. »

Signe et sens. « Se substituant à la problématique platonicienne de l'essence et de l'idée, celle du signe et du sens oscille néanmoins, au cours de l'histoire, entre une théorie du sens et une tradition empiriste qui tend à régler celui-ci sur le signe. »

Jeu. « L'aporie d'une telle problématique tient à ce qu'elle ne voit pas ses propres contradictions, bien que celles-ci soient – ou parce qu'elles sont – au centre même du point de vue adopté. Cette problématique du jeu ne fait aucune place à une problématique de la culture. La culture ainsi envisagée n'est à aucun moment mise en cause par le jeu ; elle est donnée comme un élément fixe, stable, préexistant, à partir duquel se mesure le jeu. »

Famille. « Une problématique nouvelle de la famille se dessine. »

Imaginaire et imagination. « Aussi bien, sur le terrain de la psychanalyse, la problématique développée par Jacques Lacan a-t-elle porté au-delà du rapport intersubjectif de communication la fonction constituante de l'altérité. »

Angoisse. « La question ontologique de l'angoisse ne saurait alors être exclue de la problématique de l'anxiété humaine. »

Écologie. « En fait, la compétition intraspécifique est dans une large mesure à l'origine de la sélection naturelle : ce sont les compétiteurs les plus efficaces qui participent le plus au renouvellement de la population et donc à la composition du pool génique : ici s'imbriquent la dynamique des populations, l'éthologie et la génétique en une problématique qui constitue l'essentiel de la *sociobiologie*. »

Modernité. « Les traits distinctifs, les ferments, la problématique et les contradictions de la modernité se révèlent avec le plus de force là où son impact historique et politique est le plus brutal… »

Objet. « Dans le prolongement de cette problématique, on conçoit qu'il faille examiner la notion d'objet en tant qu'elle se différencie selon les types de connaissances et l'on rencontre tout aussitôt le cas des objets mathématiques. Quel est leur degré d'indépendance à l'égard du symbolisme où ils sont construits, et à l'égard de l'empirie à quoi on les applique avec succès ? En quel sens ont-ils pu être assimilés à des "essences" immuables et autonomes ? »

Pédagogie. « De prévisibles déceptions ont modifié la problématique à partir des années soixante-dix, au cours desquelles sont apparus, d'une part, les "techniciens", qui se désintéressent des grandes options sur les fins, d'autre part, les "saltimbanques", délibérément subversifs ou "alternatifs". »

Pollution. « On peut espérer cependant que l'existence de menaces globales aideront à l'émergence d'une problématique environnement-développement. Dès à présent, la Banque mondiale et les banques régionales de développement subordonnent leurs décisions de financement à une appréciation de l'impact environnemental des projets. »

Homéostasie. « La problématique biologique est celle de la genèse, de la permanence et de l'évolution de structures particulières a priori improbables. »

Sensibilité. « … comment une rétine qui est chaque seconde "arrosée" par des milliards de photons parvient-elle à extraire de cet énorme bruit le signal précis qu'elle enverra au cerveau ? Quel ordinateur serait capable de traiter les centaines de millions de bits qu'une rétine peut recevoir par seconde ? Et ce questionnement fournit à la physiologie un éclairage qui vient en enrichir la problématique. »

Sociologie. « … le chercheur recueille des informations en fonction d'une problématique scientifique qui lui est propre et restitue éventuellement les données ainsi obtenues à leur milieu d'origine. »

Diachronie et synchronie. « L'influence de la psychologie est telle, à cette époque, qu'à un renversement de problématique en psychologie, avec le béhaviorisme de Watson, correspond un changement complet de problématique en linguistique avec Léonard Bloomfield. »

Outil. « La problématique de l'outil, parente de celle de la production, du moins de la production artisanale, renvoie à l'idée d'activité, de construction. Parler d'outillage mental, c'est se situer à l'intérieur d'une problématique critique de la connaissance. »

On aperçoit ici un régime en apparence stabilisé de l'usage (savant) du substantif « problématique ». Bien entendu, l'emploi qui en est fait n'est pas toujours des plus nettement définis. Le substantif, on l'a noté, vient de l'allemand ; Bachelard le popularise en français parmi les lettrés des années 1960. Mais il n'existe guère dans les autres langues européennes : l'anglais, par exemple, ne connaît guère *problematic* que comme adjectif. Lorsque paraît en Angleterre en 1969 une traduction du *Pour Marx* de Louis

Althusser publié en 1965 en France, le traducteur, Ben Brewster, confectionne un glossaire des termes « difficiles » qui contient une entrée consacrée à ce qui est alors un néologisme savant :

> PROBLEMATIC (*problématique*). A word or concept cannot be considered in isolation; it only exists in the theoretical or ideological framework in which it is used: its problematic. A related concept can clearly be seen at work in Foucault's *Madness and Civilization* (…). It should be stressed that the problematic is *not* a world-view. It is not the essence of the thought of an individual or epoch which can be deduced from a body of texts by an empirical, generalizing reading; it is centred on the *absence* of problems and concepts within the problematic as much as their presence; it can therefore only be reached by a symptomatic reading (*lecture symptomale* q.v.) on the model of the Freudian analyst's reading of his patient's utterances.

Une problématique, nous dit-on ici, n'est pas une *Weltanschauung* – une "world-view", une vision du monde. Je parlerai plus loin de *la problématique de l'étude* d'une question *Q* ; notons, en passant, que cette problématique n'est en général pas explicitable par la personne qui étudie *Q*, bien qu'elle lui soit assujettie : car, à côté d'éléments reconnus par elle, la problématique où son étude est prise comporte d'autres éléments qu'elle ignore ; surtout, cette problématique comporte des « absences » *qu'elle méconnaît*. La problématique de l'enquête sur une question est donc tout à la fois ce qui *impulse l'enquête* et ce qui *en limite l'extension*, à l'insu de l'enquêteur lui-même.

3. « Ma problématique »

a) Comment le substantif *problématique* en est-il venu à assumer l'emploi qu'il a pris dans la terminologie scolaire et universitaire aujourd'hui ? Pour tenter de comprendre ce phénomène, revenons un instant au mot *problème*. Le *Dictionnaire historique de la langue française* (1993), déjà cité, précise notamment ceci :

> **PROBLÈME** n. m. est emprunté (v. 1380) au latin *problema* « question à résoudre », lui-même emprunt au grec *problêma* qui désigne ce que l'on a devant soi, et spécialement un obstacle, une tâche, un sujet de controverse, une question à résoudre. Le mot est dérivé de *proballein,* composé de *pro* « devant » (→ pro-) et de *ballein* « jeter » (→ bal), proprement « jeter devant » et, par abstraction, « mettre en avant comme argument, proposer (une question, une tâche, etc.). »
> Le mot a été repris avec le sens du latin, dans le domaine spéculatif, philosophique et théologique. C'est la seule acception connue jusqu'au XVII^e^ s.,

époque où le mot s'emploie en mathématiques (1612) et en physique (1632, Descartes) pour désigner une question à résoudre par des méthodes rationnelles déductives ou par l'observation. Le sens métonymique de « question à résoudre par les éléments donnés dans l'énoncé » semble tardif (1900) ; il s'est spécialisé dans l'usage scolaire, à propos d'une épreuve, d'un devoir de physique ou de mathématiques (arithmétique, algèbre, géométrie) qui suppose un raisonnement.

On voit ici se produire une *réduction scolaire* que nous connaissons tous : le mot *problème*, qui permettait (et permet toujours, par ailleurs) de désigner le *problème des partis* de Pascal, le *problème des trois corps*, le *problème de Goldbach*, etc., c'est-à-dire une difficulté lancée à la face du monde, désigne maintenant – depuis un peu plus d'un siècle seulement, notons-le – une réalité scolaire quasi ritualisée dans sa forme et ses contenus, sans grand rapport avec ce que « problème » désignait pour un Descartes ou un Cauchy. Or c'est une réduction du même type qui semble se produire dans le cas de *problématique* : ce mot en est venu, nous allons le voir, à désigner simplement… *une question* – une précieuse mais une simple question.

b) L'étude de la transformation indiquée ne saurait se faire aisément : je me contenterai de présenter ici quelques éléments qui me paraissent pertinents. Commençons par un extrait de l'*Encyclopædia Universalis* signé de Roger Bastide, qui figure dans l'article *Ethnologie* et que, pour des raisons évidentes, j'ai écarté du florilège proposé plus haut ; Bastide écrit :

En un mot, on passe de l'ethnographie à l'ethnologie chaque fois que la description soulève une problématique : comment la religion exprime-t-elle l'organisation sociale ? Directement, comme le veut Marx, ou à travers une symbolique, comme le déclare Durkheim, dans ses *Formes élémentaires de la vie religieuse* ? Quelle est la signification réelle de la « royauté divine », celle que donne Frazer dans *Le Rameau d'or*, ou celle du roi-intermédiaire, prêtre mais non dieu ? Est-ce que les sociétés secrètes ont pour fonction de contrôler le comportement des fidèles ou, au contraire, de les libérer de l'autorité des chefs politiques (R. P. Trilles) ? Est-ce que le totémisme se situe, économiquement, au niveau de la production, de la répartition, ou de la consommation contrôlée des espèces animales ? Est-ce que les « rituels de rébellion » s'expliquent, chez les Swazi, par des mécanismes de compensation pour les groupes frustrés (M. Gluckman, H. Kuper), ou par la cosmologie de la tribu et la séparation du roi de l'ensemble des groupes sociaux (T. O. Beidelman) ? À ces divers problèmes, dont la liste naturellement n'est pas close, l'ethnologue doit chercher, non une réponse générale, mais la réponse qui convient au cas particulier envisagé.

On aura observé l'emploi, d'abord de *problèmatique*, ensuite de *problèmes*. Comme chez Bachelard, la problématique dont parle Bastide serait-elle donc « un corps de problèmes », un ensemble de questions ? En tout cas, ici, on *soulève* une problématique, comme il en va d'un problème ou d'une question : il semble que la « transition » vers l'usage scolaire ait ici commencé.

c) Que va-t-il se passer au-delà ? Avant même que j'aie eu l'occasion d'observer de plus près les sciences de l'éducation, c'est la création des TPE (à la rentrée 2000) qui m'a fait rencontrer l'usage scolaire du mot *problématique* (dont on sait qu'il est inusité, traditionnellement, en mathématiques). On connaît la « règle du jeu » des TPE : au départ, le ministère de l'Éducation nationale fixe des *thèmes* « nationaux » (renouvelés par tiers tous les deux ans), que le tableau ci-après présente pour l'année 2009-2010.

Thèmes de l'année scolaire 2009-2010

Série L	Série ES	Série S	
		Option sciences de la vie et de la Terre	Option sciences de l'ingénieur
. L'homme et la nature . *Contraintes et libertés	. L'homme et la nature . *Contraintes et libertés	. L'homme et la nature . *Contraintes et libertés	. L'homme et la nature . *Contraintes et libertés
. L'image . Réalités, représentations . Oeuvres et techniques .*Formes et figures du pouvoir	. Les entreprises et leurs stratégies territoriales . Pouvoirs et société . La famille . *La consommation	. Modèles, modélisation . Savants et science, hier et aujourd'hui . Environnement et progrès .* Avancées scientifiques et réalisations techniques	. Modèles, modélisation .Ingnieurs et sciences : une histoire partagée .Environnement et progrès .*Avancées scientifiques et réalisations techniques.

**Thème renouvelé*

Ensuite, après que les professeurs ont éventuellement précisé des « sous-thèmes », une équipe d'élèves (on dit, dans le jargon scolaire, un *groupe* d'élèves), encadrée et guidée comme il se doit, choisit un *sujet*. C'est là que les choses se corsent. Lorsque je me suis occupé de TPE à l'IUFM, en formation continue puis en formation initiale, j'ai interprété le *sujet* évoqué par les textes ministériels comme étant la *question Q* du schéma herbartien que l'équipe d'élèves s'engagerait, devant les professeurs « encadreurs », à

étudier. Cela m'a naturellement amené à distinguer entre un « sujet » *à rejeter*, comme « La peste » ou « Les pyramides d'Égypte », et un sujet *admissible*, c'est-à-dire une *question*, comme « Pourquoi n'attrape-t-on plus la peste aujourd'hui ? » ou « L'usage de construire des pyramides fut-il en Égypte ancienne un héritage de civilisations antérieures ? » Voici à ce propos un extrait d'un texte daté du 22 avril 2002, intitulé *Scénario de l'atelier « IDD & TPE en filières scientifiques »*, et que j'avais écrit spécialement pour cet atelier :

④ Dans le cas des TPE et, plus encore peut-être, des IDD, la tentation de céder au long fleuve tranquille du recopiage culturel est forte… De cela, qui advient notamment lorsque aucune question n'est placée au principe de l'enquête épistémologique que les IDD et TPE devraient inspirer, témoigne par exemple la liste des ***sujets*** de TPE suivants.

Quelques sujets traités en 2000-2001

Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche / Direction de l'Enseignement scolaire / 14 août 2001

…

Série S

Croissance : de la fleur au fruit : la pomme ; croissance des algues ; l'ongle et le cheveu à travers les âges ; la botanique et les philosophes du XVIII^e^ siècle.

Eau : étude d'un cours d'eau local ; solutions et équipements locaux ; comparaison de la gestion de l'eau entre deux pays.

Images : fonctionnement d'un appareil photo, d'une chambre obscure ; construction d'une lunette ; création d'un dessin animé ; trucages photographiques ; informations écrites / informations télévisuelles.

Risques naturels et technologiques : incendies ; risques et remèdes locaux ; effets de l'UV sur le corps humain ; le téléphone portable ; comment se forme une tornade ?

Sciences et aliments : les levures ; le chocolat, un antidépresseur ? un exemple de fabrication : la vanille ; origine et composition d'un parfum ; la caféine; comparaison des laits pour bébé et des laits ordinaires.

Temps, rythmes et périodes : étude d'un calendrier (gaulois, grec, égyptien…) ; la clepsydre ; le cadran solaire ; le pendule ; comment expliquer que le balancier d'une horloge batte la seconde sans jamais s'arrêter ? Les marées : pourquoi ne sont-elles pas identiques en chaque point ?

⑤ Par contraste, pour être fidèle au principe de la diffusion signifiante des œuvres, il convient au contraire que le sujet de l'étude se présente comme une question *Q* très généralement ***naïve*** (en fait, toute question « inaugurale » est naïve relativement aux connaissances et savoirs que son étude mobilisera ou poussera à élaborer), question à laquelle on n'hésitera pas à imposer la forme interrogative, et que l'on ***étudiera*** en vue d'y apporter au moins des ***éléments de réponse***.

⑥ La capacité à produire, dans des conditions raisonnables d'encadrement et d'aide, une réponse *R* relative à une question *Q* doit être regardée comme ***essentielle dans la formation du citoyen*** à l'exercice des responsabilités publiques et privées : d'où le fait qu'on la place au centre du travail sur les IDD et TPE dans le cadre de cet atelier. À titre d'illustration, voici d'abord trois questions formulées par des élèves réels de Première S :
– le premier sujet, relatif à la peste [2], était formulé à travers la question « *Comment se fait-il qu'on n'attrape plus la peste aujourd'hui ?* » (et non, par exemple, à travers un intitulé comme *La peste noire au Moyen Âge*, ou encore *La peste de 1720 à Marseille*, « sujets » qui auraient fait verser presque imparablement du côté du recopiage culturel…) ;
– sur le même modèle, le deuxième sujet s'énonçait ainsi : « *Pourquoi a-t-on fermé Tchernobyl ?* » ;
– le troisième sujet, enfin, portait sur les comètes et astéroïdes : « *Sommes-nous à l'abri d'un choc céleste ?* » .
⑦ La formulation interrogative ne saurait prévenir à elle seule le risque de dérive vers le simple recopiage. De fait, une telle dérive a pu s'abriter derrière l'image selon laquelle, au cours du travail, la question de départ « évoluerait », cette « évolution » masquant en vérité la substitution subreptice, à la ***question*** *Q* posée initialement, de ***réponses*** *R*', *R*", etc., trouvées toutes faites dans les répertoires culturels, sans même parfois que les questions correspondantes, *Q*', *Q*", etc., aient été envisagées. À cette image, il convient d'en opposer une autre : ce n'est pas la question initiale *Q* qui évolue, c'est ***l'étude de cette question*** – et non d'une autre – ***qui, en se développant, engendre d'autres questions*** Q_1, Q_2, etc., en ce sens que la production de la réponse *R* visée apparaît comme supposant l'étude préalable, à titre de moyens (et non de fins), des questions Q_1, Q_2, etc.

Pourtant, ce n'est pas ainsi que je le proposais que le dispositif des TPE a été progressivement institutionnalisé : entre le sujet et le TPE lui-même est venue se glisser… *la problématique*, comme le rappelle en passant cet extrait d'une page Web du site *Éduscol* (http://eduscol.education.fr/pid23170-cid48137/tpe-mode-d-emploi.html#8) :

Choix des sujets

Ils sont définis d'un commun accord entre les élèves et leurs professeurs en fonction d'exigences précises :

- lien avec un des thèmes nationaux ;

[2] Les trois sujets indiqués relevaient tous d'un même thème, celui des « risques naturels et technologiques ».

- l'adaptation aux connaissances et compétences incluses dans le programme des disciplines concernées doit être exigée par les enseignants ;
- tout TPE doit partir d'un questionnement et tenter de dégager une problématique, afin d'éviter diverses dérives : compilation de documents restitution sans appropriation ni questionnement personnel.

Comme on le voit, l'ambiguïté quasi congénitale de l'emploi du substantif *problématique* demeure jusqu'à aujourd'hui. Le « questionnement » du sujet retenu par l'équipe d'élèves doit conduire à une problématique. Certes. Mais qu'est-ce qu'une problématique ? Sur le site de l'académie de Lyon, une page intitulée bravement « Problématique et définition du sujet en TPE » contient, en dehors de ce titre, une unique occurrence du mot : on la trouve au début d'un paragraphe dans lequel le rédacteur ensuite brusquement de « sujet » (http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/reformes/lycees/tpe/aide_tpe/problematique.html) :

> D'une discipline à l'autre, le terme de problématique revêt des significations qui peuvent être légèrement différentes. D'autre part, les connaissances initiales (les acquis) ne sont pas toujours au même niveau selon la discipline. L'équipe de professeurs aura donc à encadrer la réflexion des élèves afin que la piste dans laquelle ils s'engagent et qui doit aboutir à un sujet précis soit réaliste. Cet encadrement aboutit à la validation du sujet des élèves.

En vérité, « problématique » devient très vite l'équivalent de « question » : tel est donc l'effet de la *réduction scolaire* d'une notion difficile. Voici par exemple un extrait à cet égard clairement illustratif de la présentation d'un TPE (http://tahiti-pollution.over-blog.com/) :

> Le TPE a été réalisé par G.LD et moi-même, tous deux élèves de 1ère ES. Le thème de ce travail « l'Homme et la nature », est axé sur les Sciences Economiques et Sociales et l'Histoire-Géographie. La famille générique choisie s'intitule : « Les interventions de l'Homme sur la nature. » Le sujet est : « La Polynésie Française : un environnement dégradé. » La problématique à laquelle ce TPE tente de répondre est : « Quels sont les facteurs de dégradation de l'environnement en Polynésie française ? Quelles en sont les conséquences ? » Toutes les phases indiquées émanent des processus suivants : présentation des TPE et des thèmes par les professeurs, « Remue-Méninges » et constitution de familles génériques, choix d'un sujet et esquisse de problématique et d'un plan, production.

Ici, apparemment, la détermination – locale – de « familles génériques » correspond à ce que j'ai nommé plus haut le choix de « sous-thèmes ». Vous voyez en outre apparaître un symptôme, « le plan », sur lequel je reviendrai plus loin. Quant à ce qui est appelé « problématique », le doute n'est pas

permis… Il en va de même dans un document de 2002, signé de Jean-Marie Boilevin, intitulé « Du thème à la problématique », formulation qui devient bientôt (à la page 2 du document) « Du thème au sujet et à la problématique ». Le tableau suivant confirme les conclusions formulées jusqu'ici (http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/form_formateur/documents/MP_Boilev1.pdf) :

Sujet - Problématique	**Activités élèves**	**Ressources**
Thème : *Risques naturels et technologiques*	Recherche documentaire	CDI - Internet
Sujet version 2 : *Dangers du nucléaire*		
	Travail sur le « nucléaire »	Enseignants de SVT – Sc. Physiques Internet Revues scientifiques
Sujet version 2 : *Le nucléaire et les risques pour l'homme*	Travail de recherche et lien avec les SVT	Enseignant de SVT Internet
Problématique version 1 : *Quels sont les effets biologiques des radiations ?*		
Problématique version définitive : *Quels sont les effets biologiques des radiations sur la santé ?*		

Ce dépouillement de la notion est souvent masqué par un commentaire disert, qui devient discours pléthorique en certaines disciplines. C'est ainsi qu'un professeur de SVT publie le 27 septembre 2006 un billet intitulé « Définir la problématique » proposant le « topo » que je reproduis ci-après (http://www.intellego.fr/soutien-scolaire-1ere-s/aide-scolaire-svt/definir-la-problematique/2031) :

La notion de problématique dans le cadre des TPE

Qu'est-ce ?

C'est l'angle d'approche d'un thème sur lequel l'élève et son groupe s'interrogent.

La problématique est toujours présentée sous forme de question(s) en rapport avec le titre du sujet choisi. (attention : un titre ne peut pas être une question)

La problématique a pour objectif de délimiter le sujet d'étude. Elle sera un guide pour la recherche documentaire, le tri des informations, le choix des actions, des expériences, …

Comment créer une problématique ?

– L'établissement de la problématique est un travail collectif

– Lister librement toutes les questions sur le sujet choisi (mobilisation des idées et des recherches documentaires) de façon individuelle, puis mettre vos questions en commun.

– Rassembler les questions qui ont des points communs entre elles et éliminer les redondances.

– Vérifier si la question (ou les questions) retenue(s) vous permettra une approche interdisciplinaire (Mathématiques et SVT).

– Identifier les enjeux que représentent pour vous le choix de cette problématique. Vérifier que tous les membres du groupe ont cerné et sont d'accord avec les limites ainsi posées.

– Effectuer une liste de tous les mots clefs du sujet, éliminer ceux qui dépassent les limites posées par la problématique.

La place de la problématique dans le TPE

La problématique devra être incluse dans l'introduction de la production finale et de la note de synthèse.

Chaque partie du développement de la production concrète devra répondre partiellement à ce problème. Bien vérifier cette condition ensemble permet d'éviter les hors sujets !

Enfin, la conclusion permet d'y répondre complètement et en quelques lignes.

On notera les risques de confusion : le *sujet* est posé d'abord, mais… « la problématique a pour objectif de *délimiter* ce sujet ! La doctrine reste nimbée d'incertitude.

d) Tout cela, pourtant, fixe un cadre imposé à l'activité des élèves et des professeurs. Ce cadre fortement dessiné va engendrer – ou renforcer – un équipement praxéologique que, lorsque nous travaillons avec des étudiants, nous trouvons devant nous tout fait, résistant, parce que depuis longtemps induré, et avec lequel « il faudra faire ». L'étudiant parlera ainsi de « son sujet », de « sa problématique », de « son plan » et dira par exemple que, ça y est, il *a* un sujet, mais, hélas ! pas encore de problématique… Je note qu'il aurait plus de mal à parler de « son problème » pour désigner ce qui est, à le regarder de façon moins égocentrique, « le problème qu'il se propose d'étudier ». Ainsi est-il porté à concevoir ce problème devenu « sa problématique » comme sa chose, au lieu de le regarder comme une énigme offerte à toute une communauté pour laquelle le problème existe, énigme à la résolution de laquelle il s'efforcerait de façon altruiste d'apporter sa

contribution, si modeste soit-elle. Rien ne détourne la petite bourgeoisie de la recherche de voluptés nombrilistes – je plaisante.

4. Mode rétroactif, mode proactif

a) Il semble qu'une grande partie de la culture scolaire et universitaire soit orientée vers la *reconnaissance* plutôt que vers la *connaissance* – pour reprendre des termes utilisés par Gaston Bachelard. Afin d'expliciter cette assertion, je vais d'abord détailler un peu les choses. Soit une épreuve en temps limitée où le candidat doit – j'emploie l'expression à dessein – *traiter un sujet* qui lui est communiqué au démarrage de l'épreuve. Le premier obstacle à la diffusion du paradigme de questionnement du monde qu'il me faut mentionner est sans doute celui porté par le mot même de *sujet*. Les *Lettres de M. Euler à une princesse d'Allemagne* mentionnées plus haut sont aussi intitulées, dans certaines éditions, *Lettres de M. Euler à une princesse d'Allemagne, sur divers* sujets *de physique et de philosophie*. Mais le fait essentiel est que, dans la culture scolaire, un « sujet » *n'est pas, en règle générale, une question* sur laquelle l'élève ou létudiant *devrait enquêter ou devrait avoir enquêté*. Je voudrais à cet égard reproduire un passage du livre d'André Chervel intitulé *La culture scolaire* (Belin, 1998) à propos du « baccalauréat de 1853 à 1857 » :

> En écartant les doublons, sujets identiques proposés dans des facultés différentes, ont pu être relevés, pour la brève période considérée, 260 sujets de composition. On n'y relève que 17 sujets de discours ou de lettres (du type : « Philippe Auguste harangue ses chevaliers et les milices des communes avant la bataille de Bouvines »), et 17 sujets de narration rappelant l'exercice de seconde « Raconter en peu de mots la mort de Saint-Louis »). De toute évidence, dès le milieu du XIX^e^ siècle, les jurys des facultés, de province ou même de la Sorbonne, ne considèrent pas l'épreuve traditionnelle d'amplification comme adaptée pour juger des aptitudes en composition française d'un élève moyen de l'enseignement classique : et c'est là la conclusion la plus surprenante de cette enquête.
> Ce sont les questions littéraires qui, d'ores et déjà, occupent le devant de la scène. Les sujets d'histoire littéraire (« Sur les services que Boileau a rendus à la littérature française par les critiques littéraires contenues dans ses satires »), et, surtout, les sujets faisant appel à la connaissance des œuvres littéraires et invitant à en présenter tel ou tel aspect (« Caractère de Philinte dans le *Misanthrope* », « À quoi reconnaît-on que Montesquieu avait étudié Tacite ? ») sont au nombre de 58, auxquels il convient d'ajouter 4 sujets d'« analyse » « Analyser *l'Art poétique* de Boileau », *Britannicus, le Cid*, *Polyeucte*). Viennent ensuite 53 sujets portant sur des questions générales de littérature, de goût, de style, de théorie littéraire (du type : « Conseils à un

> traducteur » ou « Qu'est-ce que la poésie ? »), eux-mêmes difficiles à distinguer des questions de cours de rhétorique (il y en a 11, du type « Abus du style métaphorique », ou « De l'usage et de l'abus de l'antithèse »), qui fournissaient jusqu'en 1852 la matière d'une épreuve orale de l'examen. C'est à peu près la moitié du corpus qui est consacrée à des questions touchant à la littérature ou à la création littéraire. Restent une quarantaine de sujets généraux qu'on appelle souvent à l'époque des « lieux communs », questions de morale comme « Le mensonge est odieux et funeste », portraits de caractères « Portrait de l'homme inconséquent », du paresseux, de l'indécis, de l'insouciant), une petite trentaine de questions d'histoire ou de philosophie, 25 sujets sur la langue française (y compris « Quelles sont les règles des participes dans l'orthographe française ? ») et surtout un genre fort prisé à l'époque, le « parallèle » appliqué aux « synonymes », que le candidat est invité à distinguer (17 sujets du type : « Distinguer le sens des mots : rival, antagoniste, adversaire, ennemi »). Ajoutons une dizaine de sujets inclassables « De la beauté et de l'utilité de la mer », « Utilité de l'arbre »), d'un type habituellement réservé aux vers latins. (p. 113)

On voit ici la tradition. On vous donne un « sujet », vous « traitez » le sujet, ce qui ne suppose pas de répondre à une question précise. Les sujets actuels de philosophie, objectera-t-on peut-être, se présentent sous forme interrogative, ainsi que le montre l'échantillon ci-après, constitué des sujets de l'épreuve de philosophie de septembre 1993 pour diverses séries du baccalauréat (http://www.adminet.com/graticiels/philo_sep-93.html) :

La science peut-elle se passer de métaphysique ?
Faut-il défendre le faible ?
La morale relève-t-elle de la compétence de l'État ?
Définir la logique comme l'art de penser, est-ce appauvrir la pensée ?
Peut-on convaincre quelqu'un de la beauté d'une oeuvre d'art ?
Le développement de la technique est-il un processus aveugle ?
Le passé a-t-il plus de réalité que l'avenir ?
Quelle place doit avoir la révolution philosophique dans la démarche scientifique ?
L'action ne vise-t-elle que l'efficacité ?
L'ignorance est-elle un mal ?
Toutes les opinions sont-elles tolérables ?
Le travail est-il le lien le plus étroit entre l'homme et la réalité ?
Peut-on s'opposer au progrès technique ?
L'individu se réalise-t-il grâce à l'État ou contre lui ?
Que faut-il entendre par « être conscient » ?
Faut-il toujours être raisonnable ?
Pour être raisonnable, ne faut-il pas parfois prendre des risques ?

L'homme est-il un être naturel ?
L'historien peut-il prévoir l'avenir ?
Est-il difficile de juger une œuvre d'art ?

On imagine qu'à ces questions on n'attend pas véritablement de réponse. « Traiter le sujet » consiste à écrire de façon plus ou moins convenue ou originale, plus ou moins intelligente, plus ou moins informée *à propos* du sujet, *sans étudier aucune question particulière*. Il s'agit d'un *exercice d'essayisme* où l'on peut être brillant ou profond mais que l'on peut surtout espérer « réussir » – petitement – si « l'on a des choses à dire sur le sujet », si l'on dit « les choses qu'il faut », et finalement, pense-t-on, « si cela plaît » au correcteur. Ce qui importe surtout, ici, c'est de noter que ce type de tâches, que l'on peut appeler de façon générique « dissertation à la française », qui est un rejeton de cet exercice scolaire par excellence que fut le *discours* (latin, français), est radicalement distinct, dans son principe, du type de tâches qu'est *l'enquête sur une question Q donnée*, *préalable* à la rédaction d'un *compte rendu d'enquête*, exercice qui procède du *paradigme des sciences* et qui, on va le voir, met en jeu, à une foule d'objets, *des rapports tout différents*.

b) L'épreuve de dissertation (en français, en histoire et géographie, en SES, en philosophie, etc.) repose sur ce que j'ai appelé le *mode d'étude rétroactif* : le sujet ayant été communiqué, traiter le sujet, surtout lorsqu'on ne dispose d'aucun document, suppose que celui-ci ait été antérieurement rencontré, étudié, « préparé », et qu'on ne fasse alors, durant le temps imparti, que rédiger un « traitement » dont le matériau est pour l'essentiel *connu d'avance* (il ne fera l'objet en temps réel que d'une remémoration, d'une simple *reconnaissance*) et dont l'organisation doit être *d'emblée décidée*, ce que traduit le mot d'ordre de « faire *d'abord* un plan » ! Bien entendu, si ce matériau vous est inconnu, vous ne saurez « comment aborder le sujet », et vous vous sentirez – peut-être – perdu. À moins que vous n'utilisiez, plus ou moins habilement, les remembrances qui se présenteront à vous, tout en espérant ne pas être déclaré « hors sujet ». Le même mode d'étude rétroactif sera étendu spontanément aux « travaux à la maison », à ceci près que, pour « traiter le sujet », on pourra alors réunir un matériau qui, sans répondre à aucune question précise, se rapporte en quelque manière au *sujet* proposé… Tout cela, je suppose, est connu de quiconque a été assujetti à la culture scolaire française.

c) Tout cela, aussi, est à l'opposé de l'enquête sur une question *Q*, qui appelle, par contraste, ce que j'ai nommé un *mode d'étude proactif*. Ici, on ne suppose pas que vous sachiez quoi que ce soit à propos de la question à étudier : elle est *tout entière* à étudier, et cette étude ne saurait guère

s'enfermer en une épreuve de deux ou trois heures – contrainte sur laquelle je vais revenir. On se rappellera ici l'échange, rapporté dans le séminaire de l'an dernier, entre Jean-Baptiste Dumas, le grand chimiste dont Pasteur avait été l'élève, et ce dernier à propos de la maladie du ver à soie, que Dumas demande instamment à Pasteur d'aller étudier. Pasteur ayant répondu qu'il n'y connaissait rien, Dumas rétorque : « Tant mieux, vous n'aurez d'idées que celles qui viennent de vos propres observations. » Loin qu'il s'agisse là d'un trait d'esprit, c'est la définition même de l'enquête sur une question qui nous est rappelée. Bien entendu, il est hors de propos de « faire le plan » du mémoire dans lequel on rendra compte d'une enquête *qui n'a pas encore commencé* – contrairement à ce que sont poussés à faire élèves et étudiants, par une extension indue – parce que *sans objet* – de l'exigence scolaire de dresser un plan de la « copie » que l'on s'apprête à rédiger. La distinction est pourtant classique entre *ordre de découverte* – l'ordre de l'enquête, ou plutôt du PER suivi – et *ordre d'exposition* ; mais cette distinction semble ici perdue. On imagine que, plus généralement, la prégnance du mode d'étude rétroactif va constituer un obstacle sérieux à la diffusion scolaire et universitaire de la formation *à* et *par* l'enquête.

5. Faire enquêter ?

a) La formation à et par l'enquête est mise en œuvre partiellement – en vue de la validation – dans l'UE « Éducation au développement durable » (dont le nom de code est SCEF53) de la licence de sciences de l'éducation de l'université de Provence. Les étudiants sont jugés sur deux enquêtes qu'ils ont à réaliser. La première porte sur une question que l'étudiant doit d'abord proposer à la validation de la responsable de l'UE, Caroline Ladage, avant de lancer son enquête. Le produit de ce travail est un *compte rendu d'enquête* d'au plus 2500 mots comportant quatre sections : la première présente la *question* étudiée et ce qui la rattache au thème du développement durable ; la deuxième décrit le *parcours d'étude et de recherche* suivi en indiquant de façon concise mais précise les réponses « toutes faites » éventuellement rencontrées – les réponses $R^{\Diamond}$ du schéma herbartien – et les outils mobilisés ; la troisième énonce la *réponse* à laquelle l'enquête a permis d'arriver ; la quatrième propose une brève *discussion* de cette réponse et des outils utilisés pour l'élaborer. Ces quatre sections sont notées respectivement sur 3, 6, 7 et 4 points. Le même travail est répété à propos de cinq questions rendues publiques par la responsable de l'UE trois semaines avant un examen écrit de deux heures où l'étudiant devra « traiter », selon le format déjà précisé, et tous les documents étant autorisés, une question choisie par lui ou elle parmi trois questions extraites au hasard par la responsable de l'UE de la liste des cinq.

b) Je commenterai ici un corpus fait de courriels entre la responsable de l'UE, moi-même, et un certain nombre d'étudiants, à propos du choix de la question à étudier (et, quelquefois, de son étude). Les étudiants sont désignés par des lettres (A, B, C, etc.). On suit d'abord brièvement l'étudiante A qui, dans un courriel du 23 février 2010, écrit ceci :

> On n'a pas beaucoup parlé du dossier à faire dans la discipline SCEF 53 mais je me penche sur le sujet que je pourrais traiter.
> Et j'aimerais savoir, si je pouvais construire mon futur dossier en parlant du tri selectif des déchets, du recyclage ?

On notera le vocabulaire du mode rétroactif : le sujet « que je pourrais traiter », et qui consisterait à « parler » du tri sélectif des déchets, tout cela sans qu'aucune question à étudier ne soit mentionnée. Après plusieurs autres courriels, alors qu'elle est engagée dans l'étude de la question qu'elle a finalement adoptée – « Est-ce que le nombre de déchets tend à baisser avec les dispositifs du recyclage misent en place en France ? » –, cette étudiante écrit ceci le 21 avril :

> Je suppose qu'il ne faut pas chercher à répondre totalement à chaque question d'étude. Alors j'avais pensé me baser sur les 4 ou 5 premiers sites mentionnés par Google lors d'une recherche.
> Par exemple : écrire "pollution lumineuse", étudier les 4 sites mentionnés par Google et répondre à la question par rapport à ces 4 sites.
> Peut-être que les sites parlera plus d'une partie de la question, mais il faudra mettre dans la discussion de l'étude et de la R coeur, qu'il y a eu des aspects de la question qui n'a pas été étudié = boîte noire.

On observe ici la rencontre avec le mode d'étude proactif, et les incertitudes que cela crée chez A. Les éléments de réponse suivants sont alors portés à sa connaissance.

> La réponse à construire ne saurait être en effet que *partielle* (et en outre, du point de vue de l'évolution des connaissances, *provisoire*, mais cela est une autre histoire). La procédure que vous indiquez est bien la base de ce qu'il faut faire. Mais attention ! L'arrêt de cette procédure ne saurait se faire arbitrairement, après par exemple l'examen de « 4 ou 5 » documents. Le critère d'arrêt n'est pas celui-là : on s'arrêtera à partir du moment où les documents consultés n'apportent rien de neuf, soit pour mettre en défaut tel ou tel point de la réponse élaborée jusque-là (*correctif*), soit pour compléter cette réponse (*additif*). Ce n'est que lorsque la réponse élaborée apparaîtra « insensible » aux documents consultés que vous pourrez décider d'arrêter votre enquête.

Deux étudiantes, B et C, ont décidé de travailler ensemble – une condition dont on va voir qu'elle fonctionne comme un analyseur. Voici leur premier courriel (c'est B qui écrit, le 26 mars) :

> Je suis avec ma collègue C en train de réfléchir à la fameuse question de l'enquête... nous avions envie de traiter un sujet plus "social" qu'"environnemental". En lisant le livre présenté par M. Chevallard "le DD à petits pas", on évoque le fait "de nombreux enfants ne peuvent aller à l'école", étant enseignantes toutes les deux ,le sujet nous a interpellé et nous voudrions vous soumettre une question du type:
> - Quel lien peut exister entre alphabétisation et DD ? ou
> - En quoi, l'analphabétisation et l'alphabétisation ont à voir avec le DD ?
> peut-être est-ce mal formulé?
> qu'en pensez-vous? est-ce un sujet opportun?

On voit ici à l'œuvre la disposition rétroactive : nous allons nous intéresser à ce que nous connaissons déjà, l'enseignement, disent ces « étudiantes ». Autrement dit, pas question d'enquêter sur une question à propos de laquelle nous ne saurions rien ! Les questions formulées sont d'une grande généralité, ce qui est compatible avec le patron dissertationnel de l'essayisme scolaire et universitaire. La question suivante leur est alors proposée :

> Certains auteurs lient la question traditionnelle de l'alphabétisation et de l'instruction primaire à celle du développement durable. Si l'instruction de base est un objectif évident du développement, est-elle aussi une condition du développement durable ? Comment ? En particulier, a-t-elle des incidences en matière environnementale ? Lesquelles ? Par quels mécanismes ?

La longueur de la formulation traduit un effort de « déconstruction » du questionnement spontané des étudiantes. Se référant sans doute implicitement au modèle de l'essayisme dissertationnel, elles pensent se « partager » le travail en « traitant » chacune un aspect du « sujet », selon une dichotomie que, au reste, elles hésitent à choisir. C'est alors C qui intervient (le 29 mars) :

> Nous avons essayé, ce matin, de revoir notre question et, de la cibler un peu plus...
> Nous souhaitons aussi y inclure 2 axes afin de pouvoir mieux s'organiser pour un travail à deux et, pas toujours ensemble.
> Serait-il pertinent d'envisager pour l'une les incidences environnementales et, pour l'autre les incidences sociales ? Mais, nous avons conscience qu'elles doivent souvent se rejoindre...

On peut peut être aussi distinguer l'alphabétisation concernant les mineurs et celle concernant les majeurs ??
En fait en donnant 2 axes on ne cible pas vraiment plus la question mais cela nous semble une façon de mieux nous y prendre pour répondre à la question.
Pouvez vous nous donner votre point de vue et, si vous voyez des axes plus pertinents, nous les indiquer afin que nous puissions démarrer notre enquête au plus vite .

On rencontre ici à nouveau un vocabulaire typique de l'essayisme dissertationnel : il s'agirait de « cibler » la question, et cela selon deux perspectives – l'une pour B, l'autre pour C – qui seraient déterminées *a priori* et pour le choix desquelles on cherche donc le secours et l'aval de l'enseignante responsable. Nous sommes là très loin de l'étude d'une question. Les éléments de réponse suivants seront alors adressés à B et C :

> Il n'y a pas à « démembrer » a priori cette question, qui est très précise : c'est au cours de l'enquête à son sujet qu'apparaîtront éventuellement des questions « secondaires » qui pourront faire l'objet d'une étude particulière, mais toujours finalisée par l'étude de la question rappelée ici. C'est l'étude de la question qui montrera si le lien éventuel entre instruction de base et développement durable suppose essentiellement l'alphabétisation des nouvelles générations ou appelle simultanément celle des adultes, leurs parents, même s'il est évident que, en termes de justice sociale, il n'est guère acceptable d'abandonner des adultes dans l'analphabétisme. Le point de départ peut être ici la requête en anglais "literacy and sustainable development" sur Google, qui amène en premier résultat un discours de Kofi Annan intitulé "Literacy is at the heart of sustainable development"...

Très sobrement, une étudiante D écrit le 1er avril :

Je vous fais part de ma question de recherche, qui est celle-ci:
-L'air de la ville est-il plus pollué que l'air de la campagne?

La question suivante lui est alors proposée :

> Dans quelle mesure, par quels mécanismes et dans quel sens les activités rurales ont-elles une influence sur la pollution de l'air ?

Il s'agit d'une question à la fois « vaste » (les activités rurales) et précise. Cette question est assortie de commentaires que je reprends ici :

> D'une manière générale, le travail demandé dans l'option EDD suppose de tenir à distance tout un ensemble d'habitudes mentales souvent vécues

comme des automatismes intellectuels : il s'agit bien d'enquêter sur une question, et non de « traiter » un thème, en recherchant a priori de la bibliographie (ou en croyant identifier a priori la bibliographie) jugée pertinente… La différence se verra au plan du récit de l'enquête qui doit être consigné dans la partie 2 du dossier demandé (partie notée sur 6 points). Par exemple, pour travailler sur une question touchant la pollution de l'air, l'enquêteur peut partir de l'article "Pollution de l'air" de Wikipédia, et tenter de progresser à partir de là. La réponse qui sera le fruit de l'enquête effectivement conduite sera presque nécessairement partielle et provisoire. Très vraisemblablement, plusieurs des questions engendrées par l'enquête (= rencontrées au cours de l'enquête) n'auront pas été étudiées aussi avant qu'il aurait été souhaitable ; mais on avancera l'enquête suffisamment pour que la réponse formulée apparaisse raisonnablement solide.

À la suite d'un rappel qui lui a été adressée par la responsable de l'UE, une étudiante E écrit ceci le 18 avril :

veuillez m'excuser pour le retard.
Je pensais travailler sur l'impact des hommes sur l'environnement. Est-ce seulement la faute des hommes si la planète est dans l'état que nous connaissons? Autrement dit, les agissements des hommes envers la planète est-elle la seule cause de ses maux comme le réchauffement climatique?
Egalement, travailler sur le lien entre le développement durable et le social me plairait (le développement durable et la santé par exemple). Mais je n'ai aucune question précise.

Typiquement, le « sujet » évoqué – à propos duquel aucune question n'est soulevée explicitement, E le reconnaît (« je n'ai aucune question précise ») – est on ne peut plus vaste : « l'impact des hommes sur l'environnement ». La question suivante lui est alors proposée :

De quelle manière le problème des épidémies (VIH, grippe A, etc.) s'intègre-t-il dans la problématique du développement durable ? Quel rôle joue à cet égard la notion d'éco-épidémiologie ?

Bien entendu, on peut penser que E *ignore tout de la question*. La réaction ne se fait pas attendre ; le 20 avril, elle écrit :

La question que vous m'avez proposée me semble vraiment intéressante mais le sujet à traiter me parait difficle. A première vue, je ne vois pas comment aborder cette question mis à part le fait que les générations actuelles se doivent de se maintenir en bonne santé pour préserver les générations futures des virus mutants, de plus en plus agressifs voire aussi de nouveaux virus.

Cependant, des recherches documentaires que je n'ai pas encore effectuées pourraient éclairer le sujet.

Apparaît ici le typique « je ne vois pas comment aborder cette question ». La suite montre l'effort rétrospectif (marquée notamment par l'évocation des « virus mutants »). Comme l'on voit bien que cela ne saurait suffire, on conclut que « des recherches documentaires que je n'ai pas encore effectuées pourraient éclairer le sujet ». L'idée d'enquête, d'étude proactive de la question, semble perdue. Le commentaire suivant est alors adressé à E :

> Vous n'avez pas à « voir comment aborder le sujet » mais à *enquêter sur la question proposée*. Ce n'est qu'*après* cela que vous devriez voir comment « traiter le sujet », pas avant ! Pour *lancer* votre enquête, vous pouvez par exemple commencer par interroger un moteur de recherche à l'aide de la requête "épidémies et développement durable", tout bêtement. Vous pourrez ensuite utiliser aussi pour requête "éco-épidémiologie", tout cela afin d'*explorer* le domaine auquel se réfère explicitement la question à étudier. Au-delà, ce sera à vous de faire...

L'étudiante F, elle, écrit ceci le 12 avril :

Voici le sujet que j'aimerais traiter pour le dossier :
Quels sont les avantages et les limites de la transition énergétique ?

La réponse très pragmatiquement faite à cette proposition est la suivante :

> Votre question est beaucoup trop générale pour faire l'objet d'une enquête menée dans le temps disponible et surtout d'un compte rendu d'enquête tenant en quelque 3000 mots seulement. Il faut donc retenir une question beaucoup plus précise, par exemple celle-ci : « Dans quelle mesure et comment les éoliennes pourraient-elles contribuer au développement des énergies renouvelables ? Quels obstacles le recours à cette source d'énergie rencontre-t-il aujourd'hui ? Pourquoi ? »

Mais F réagit par une contre-proposition dans un courriel du 15 avril :

Bonjour,
Voici une autre proposition de question :
Quels sont les avantages ,les limites ,et les inconvenients de l'énerige éolienne ?
Cordialement [...]

L'épisode est parlant : à une question d'enquête, F substitue un sujet de dissertation de sa façon, énoncé selon une rhétorique des plus convenues (avantages, inconvénients, limites).

L'étudiante G commence – dans un courriel du 12 avril – par choisir une question qui sera ensuite écartée : « Pourquoi la déforestation agit-elle sur le réchauffement climatique ? » Il s'agit là vraisemblablement d'une question inspirée, dans sa forme, par l'enseignement prodigué. Puis, le 19 avril, elle écrit ceci :

> Bonjour, hier soir j'ai vu un reportage à la tv sur l'importance des abeilles dans l'écosystème et au final j'aimerais bien travaillé sur ça.
> Je vous propose donc la question : En quoi la disparition des abeilles aurait-elle des conséquences sur l'écosystème?
> Pouvez-vous me dire si cette question est pertinente, pour que je puisse commencer mon enquête rapidement?

On retrouve ici le paysage rassurant de la rétrospection… Le changement demandé est cependant accepté et la question suivante proposée :

> On dit que, à cause des pesticides, les abeilles disparaissent ; mais quels mécanismes précis expliquent la chose ?

Le même jour – le 19 avril – elle réagit en ces termes :

> D'accord merci, mais qu'entendez-vous par mécanismes svp?

Une réponse vient le 20 avril :

> La nature précise des « mécanismes » d'action des pesticides sur la population des abeilles est justement ce qu'il faut élucider ! Tout d'abord, par exemple, la disparition d'une population peut être due à l'action de tel pesticide mais non de tel autre, ou de telle combinaison de pesticides et non de telle autre, sous telle forme et non sous telle autre, etc. Ensuite, la disparition d'une population animale sous l'effet d'un facteur donné peut résulter de mécanismes divers : le facteur en question peut ainsi provoquer directement la mort de chacun des membres de la population sur laquelle il s'exerce (comment ? pourquoi ?) ; il peut aussi provoquer la disparition de la nourriture de cette population (comment ? pourquoi ?), sans atteindre directement ses membres ; ou encore il ne permet plus à la population de se reproduire (comment ? pourquoi ?), etc. Bien d'autres mécanismes peuvent être envisagés : à vous de voir !

Manifestement, G se met au travail ; mais le 22 avril elle envoie ce message désespéré :

> Je vous écris car je suis un peu bloquée dans mon enquête.
> Certains sites dénoncent les pesticides comme le GAUCHO et le REGENT responsables de la mort des abeilles, d'autres disent qu'ils ne sont pas en cause.
> Donc je ne vois pas du tout ce que je peux faire pour continuer mon enquête.
> Merci de bien vouloir venir à mon aide, je suis totalement perdue! :(

À l'évitement de la question a succédé la déconcertation face à la découverte de l'existence d'une polémique ! Le 24 avril, une très longue réponse lui est alors adressée qui tente de l'engager dans une problématique d'enquête, où l'on rend compte de ce qui est, même si ce qui est n'a pas été lissé par le temps :

> Tout d'abord une remarque non spécifique de la question étudiée : se référer à des sites, comme vous le faites (« Certains sites..., d'autres... »), est inapproprié ; il faut se référer à des documents (que vous trouvez sur des sites Web, certes), en indiquant si possible l'auteur, la date de publication, etc. Par exemple, vous pouvez rencontrer dans votre enquête un article paru dans le quotidien *Les Echos* du 20 août 2007, signé de Paul Molga, et intitulé « La mort des abeilles met la planète en danger » (adresse parmi d'autres : http://archives.lesechos.fr/archives/2007/lesechos.fr/08/20/300195675.htm)
> Il se trouve que le problème de la disparition des abeilles et notamment l'explication du « syndrome d'effondrement des colonies d'abeilles » (en anglais *Colony collapse disorder*, CCD) fait depuis des années l'objet de controverses. Lorsqu'un produit est incriminé, ceux qui le mettent en cause proposent en général au moins un mécanisme d'action de ce produit « expliquant » les effets allégués (la controverse porte aussi sur le point de savoir si ces effets allégués sont bien réels). La question sur laquelle vous devez enquêter est précisément celle de ces mécanismes supposés sinon prouvés, et rien de plus. Cette question pourrait d'ailleurs être (très légèrement) retouchée comme suit pour qu'il soit bien clair que les mécanismes à préciser ne font pas nécessairement l'objet, aujourd'hui, d'un consensus scientifique : « On dit que, à cause des pesticides, les abeilles disparaissent ; mais quels mécanismes précis expliqueraient la chose ? »
> Dans l'article de Paul Molga cité plus haut on trouve par exemple ce passage, qui fournit des indications sur le mécanisme envisagé par un chercheur américain, Joe Cummins :
> Dans un communiqué publié cet été par l'institut Isis (Institute of Science in Society), une ONG basée à Londres, connue pour ses positions critiques sur la course au progrès scientifique, [Joe Cummins] affirme que « des indices

suggèrent que des champignons parasites utilisés pour la lutte biologique, et certains pesticides du groupe des néonicotinoïdes, interagissent entre eux et en synergie pour provoquer la destruction des abeilles ». Pour éviter les épandages incontrôlables, les nouvelles générations d'insecticides enrobent les semences pour pénétrer de façon systémique dans toute la plante, jusqu'au pollen que les abeilles rapportent à la ruche, qu'elles empoisonnent. Même à faible concentration, affirme le professeur, l'emploi de ce type de pesticides détruit les défenses immunitaires des abeilles. Par effet de cascade, intoxiquées par le principal principe actif utilisé – l'imidaclopride (dédouané par l'Europe, mais largement contesté outre-Atlantique et en France, il est distribué par Bayer sous différentes marques : Gaucho, Merit, Admire, Confidore, Hachikusan, Premise, Advantage...) –, les butineuses deviendraient vulnérables à l'activité insecticide d'agents pathogènes fongiques pulvérisés en complément sur les cultures.

Dans l'article de Wikipédia intitulé "Gaucho (insecticide)", on trouve ce passage qui fournit un autre exemple de mécanisme allégué : « Dans le cas de l'accusation portée sur l'imidaclopride, les conséquences n'étaient pas la mort directe des abeilles, mais des troubles du comportement – désorientation, sous-nutrition, troubles de la communication – entraînant le dépérissement des colonies. » Bien entendu, la description d'un mécanisme allégué peut être plus ou moins approfondie et votre enquête doit à cet égard tenter d'aller le plus « profond » possible ; mais vous devez renoncer à rendre compte d'une réponse scientifiquement consensuelle si celle-ci n'existe pas (encore) ! Sans aller plus loin (c'est à vous qu'il incombe d'enquêter...), je vous signale simplement l'article de Wikipédia intitulé « Syndrome d'effondrement des colonies d'abeilles » et ses annexes (notamment le film présenté sur France5 : http://www.youtube.com/watch?v=ibaf5adEbhw).

c) L'épisode commenté ici peut nourrir une double interrogation. D'un côté, il conduit à penser que, pour contrebattre l'habitus essayiste, il conviendrait d'aller *plus avant* que l'enseignement prodigué ne l'a fait dans la formation de ces étudiants *aux praxéologies de l'enquête*. Mais d'autre part, on peut aussi penser que la *réception* par les étudiants de ce qui a été fait et aussi bien de ce qui pourrait être fait *en plus* bute sur la prégnance des praxéologies de l'essayisme scolaire et universitaire. Mais augmentons le tableau brossé jusqu'ici de quelques exemples encore. Une étudiante, H, envoie le 12 avril un courriel où elle écrit ceci :

> J'ai réfléchi à ma question pour le dossier à rendre et je voulais savoir si vous étiez d'accord :
>
> **Pourquoi et comment réduire les émissions de gaz à effet de serre?**

Ce n'est pas une question très originale mais j'avoue être un peu perdue concernant ce dossier…

J'espère que ma question vous conviendra malgré tout, le cas échéant, auriez-vous quelques suggestions?

H ne critique la question proposée que sous le rapport de l'originalité (ce qui est une notion assez étrangère à la culture de l'enquête). La question qui lui est proposée en retour va cependant se révéler trop « originale » à ses yeux ; la voici :

On dit que le réchauffement climatique augmente les émissions de gaz à effet de serre (CO_2, méthane, etc.). Qu'entend-on par là ? Quels sont les mécanismes qui provoquent cette augmentation ?

H réagit en effet le même jour (le 12 avril) :

J'ai malgré tout encore une question :

Vous dites que c'est le réchauffement climatique qui augmente les émissions de gaz à effet de serre, n'est-ce pas l'inverse? Je pensais en effet que c'était l'augmentation des gaz à effet de serre (notamment à cause de l'activité humaine) qui contribuait au réchauffement climatique… Je suis définitivement perdue…

Ce message suscite lui aussi une intervention plus lourde, dont voici le contenu :

Sur un point vous avez parfaitement raison : le problème qui est généralement soulevé est celui qu'on peut écrire ainsi :

émissions de gaz à effet de serre $\Rightarrow$ réchauffement climatique.

La question sur laquelle on vous demande d'enquêter est la réciproque :

? réchauffement climatique $\Rightarrow$ émissions de gaz à effet de serre ?

Cette réciproque peut-elle être regardée comme vraie ? Bien entendu, si la réponse est positive, l'enquête doit mettre en évidence par quels mécanismes le réchauffement climatique pourrait entraîner un surcroît d'émissions de gaz à effet de serre (pas forcément à cause de l'activité humaine). Tout cela noté, il faut vous lancer dans l'enquête ! Une suggestion : comme cela vous a été conseillé dans le cours, vous pouvez partir des articles de Wikipédia, et par exemple, dans ce cas, de l'article "Réchauffement climatique".

On voit les effets de l'absence de tout une éducation intellectuelle concrète (dont certains éléments, telles les notions de proposition directe et de proposition réciproque, ont été rencontrés mais sont sans doute refoulés). Il manque ainsi, clairement, la capacité à *questionner le monde* en assumant *de n'avoir pas de réponse* préalable *aux questions soulevées*. On se tourne alors vers des questions supposées *déjà posées* parce qu'on croit leur trouver dans les médias des éléments de réponse : c'est la réponse supposée qui engendre la question. De cela témoigne ce message daté du 22 mars, de deux étudiantes, I et J :

> … en ce qui concerne notre sujet d'enquête, nous souhaiterions travailler sur "les effets néfastes des barrages "… (le titre n'est pas définitif, c'est une idée à mettre plus en forme!!!).
>
> Tout d'abord, nous avons penser à enquêter sur les différents barrages présents dans le monde avec pour appui le documentaire "Vu du ciel" de Yann Arthus Bertrand du mercredi 3 février.
>
> Par la suite, pourquoi pas enquêter sur le barrage des Trois Gorges situé en Chine, de manière plus spécifique.

Les exemples pourraient être multipliés. Un étudiant retardataire, K, écrit le 26 avril :

> … voici deux sujets sur lesquels j 'aimerai faire mon dossier.
>
> - La croissance, indicateur de la situation économique d'un pays apparait comme l'ennemi du développement durable (en terme d'incitation à la consommation, de politique de relance…). Peut on considérer alors que la décroissance serait une réponse aux problèmes environnementaux?
>
> - On considère que la prise de conscience de l'écocitoyenneté doit se faire à l'échelle de la planète. Mais la mise en place d'une politique de préservation de l'environnement est elle possible dans le contexte connu du fossé entre les pays en voie de développement et ceux développés?

Les questionnements proposés traduisent certes une sensibilité fort différente de celle de I et J. Mais, là encore, tout porte à croire que K se réfère à des « sujets » qu'il pense « traitables » parce que déjà « traités ». Voici le commentaire et la proposition qui lui seront adressés :

> Les deux questions que vous formulez sont beaucoup trop larges. Voici une question sur laquelle vous pourriez enquêter : « En quoi pourrait consister concrètement, aux yeux des avocats de la décroissance durable (*sustainable*

degrowth), une évolution du mode de vie individuel et collectif des populations pauvres de la planète qui contribue effectivement au développement durable ? »

C'est là-dessus que j'interromprai momentanément une recherche indispensable si l'on veut comprendre et expliquer ce que j'ai appelé ailleurs le « destin des questions ».

MATHÉMATIQUES POUR DIDACTICIENS

1. Un exemple

a) Lors de la séance précédente de ce séminaire, j'avais soulevé une question de mathématiques que je reprends ici en reproduisant le passage idoine.

> Vous connaissez les exemples que j'ai utilisés pour mettre à mal certaines idées fausses sur l'usage des calculatrices dans la classe de mathématiques : si ma calculatrice affiche les mêmes chiffres pour les expressions $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ et si a, b et c ne sont pas trop grands, alors *c'est qu'on a l'égalité* $a\sqrt{b} = \sqrt{c}$. La raison de la chose peut être exprimée ainsi :
>
> $$a\sqrt{b} \neq \sqrt{c} \Rightarrow |a\sqrt{b} - \sqrt{c}| = \frac{|a^2 b - c|}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} \geq \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$
>
> Si a, b, $c < 10^6$ (par exemple), on a $a\sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 10^9$ et il vient donc :
>
> $$a\sqrt{b} \neq \sqrt{c} \Rightarrow |a\sqrt{b} - \sqrt{c}| \geq 10^{-9}.$$
>
> Or sur une calculatrice d'aujourd'hui, une différence supérieure à 10^{-9} *se voit à l'affichage* : si la différence entre $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ ne se voit pas, c'est qu'il n'y en a pas ! Ma question est alors : comment généraliser ce type de résultats ?

b) J'ajoute un second exemple tout aussi classique que le précédent : si deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont *affichées égales* par une calculatrice et que les entiers strictement positifs a, b, c, d ne sont pas trop grands, alors ces fractions sont égales. On a en effet ceci

$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \Rightarrow \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| = \frac{|ad - bc|}{bd} \geq \frac{1}{bd}$$

Si b, $d \leq 10^5$ (par exemple), on a $bd \leq 10^{10}$ et $\frac{1}{bd} \geq 10^{-10}$ et il vient donc

$$b,\ d \leq 10^5 \text{ et } \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \Rightarrow \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| = \frac{|ad - bc|}{bd} \geq \frac{1}{bd} \geq 10^{-10}.$$

La conclusion est la même que dans le premier cas : si les fractions sont inégales, *cela se voit à l'affichage*.

2. Généraliser ?

a) Le principe explicatif des phénomènes ci-dessus est très simple. Soit deux expressions quelconques $f(a, b, c, \ldots)$ et $g(a, b, c, \ldots)$, où a, b, c, …, sont des variables entières positives. On suppose que les variables a, b, c, …, sont majorées par des entiers A, B, C, … Soit $I = I_A \times I_B \times I_C \times \ldots$, où la notation I_K, avec $K \in \mathbb{N}$, désigne l'ensemble d'entiers $[0, K] \cap \mathbb{N}$. Posons $\delta = |f - g|$ et soit

$$M = \{ (a, b, c, \ldots) \in I \,/\, \delta(a, b, c, \ldots) > 0 \}.$$

L'ensemble I étant *fini*, il en est de même de M, en sorte que δ admet un *minimum* sur M : il existe au moins un n-uplet $(a_0, b_0, c_0, \ldots) \in M$ tel que, pour tout $(a, b, c, \ldots) \in M$, on a

$$\delta(a, b, c, \ldots) \geq \delta(a_0, b_0, c_0, \ldots).$$

Si ce minimum est assez grand au regard de la calculatrice utilisée, par exemple si $\delta(a_0, b_0, c_0, \ldots) \geq 10^{-12}$, et si cette calculatrice donne le même affichage pour $f(a, b, c, \ldots)$ et $g(a, b, c, \ldots)$, alors on peut conclure que l'on a bien $f(a, b, c, \ldots) = g(a, b, c, \ldots)$.

b) Bien entendu, étant donné f et g, le problème est de déterminer le minimum de $\delta = |f - g|$ sur M ou, plus généralement, un « bon » minorant (strictement positif) de δ sur M. Pour cela, des techniques (et des technologies) mathématiques appropriées sont nécessaires qu'il reste à identifier (ou à inventer). Mais le temps qui nous était alloué est maintenant épuisé ; j'arrête donc là, momentanément, ces considérations.

That's all, folks!

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

➔ Séance 7 – Vendredi 11 juin 2010

L'ORGANISATION DE LA RECHERCHE

1. Une succession d'infortunes

a) J'aborderai aujourd'hui des questions dont l'étude paraîtra peut-être un peu rude. Il s'agit pourtant de questions de notre temps, et de questions *vives*, qui se posent et se poseront avec une acuité accrue dans la mesure où la réforme des masters, dont j'avais pronostiqué l'indignité possible, nous confronte et nous confrontera à des contraintes inédites, du fait notamment des usages installés ici et là en matière de recherche, dont la pression se fera sentir de façon croissante dans les temps à venir.

b) La recherche en didactique pâtit de nombreux maux dont elle n'est pas débarrassée après presque un demi-siècle d'existence. Le plus spécifique me semble être le statut *du didactique* dans notre civilisation (et donc dans nos sociétés), celui d'une dimension du réel qui se trouve refoulée, niée, dissimulée, et dont la simple évocation continue d'être ressentie autour de nous comme une souillure potentielle entachant la réputation culturelle et scientifique de qui entendrait seulement prononcer ce « gros mot » : *didactique*. Il semble d'ailleurs qu'existe aujourd'hui, dans le monde disparate des sciences de l'éducation à la française, une tendance diffuse mais réelle, sinon effective, visant à gommer, ou du moins à dégrader, tant le mot que la chose qu'il désigne.

c) Mais une autre infortune de civilisation affecte ceux-là mêmes qui sont tentés de sacrifier la didactique (et le didactique) sur l'autel du sérieux scientifique et culturel : la dimension *éducative* – et pas seulement la dimension *didactique* – de nos sociétés est, elle aussi, durement *péjorée*. On ne s'en aperçoit pas tout de suite ; car il existe depuis toujours, semble-t-il, un *prurit éducatif* qui fait que, régulièrement, nos sociétés se grattent là où ça les démange, de façon récurrente, voire compulsive : on se « préoccupe » d'éducation. Mais cette démangeaison éducative indéfiniment résurgente, qui fait de chacun un expert au petit pied en la matière, n'a guère les honneurs de la science : depuis des siècles, les meilleurs esprits ne s'y arrêtent guère qu'en dilettantes et se vouent à des sujets de plus haute tenue.

d) La médiocrité commune des acteurs de la recherche en éducation n'est pas en elle-même un problème ; encore qu'avoir avec soi un Newton, un Lavoisier, un Lagrange, un Darwin, un Einstein constitue une condition importante, aux effets durables, de développement d'une science. Ce qui fait problème, en revanche, c'est la dérive dans laquelle quelques-uns de ces médiocres peuvent, de façon itérative, entraîner une science naissante ou, plus largement, une ensemble de sciences, telles les « sciences de l'éducation ». De quoi est faite cette dérive ? À la règle fondamentale de toute science – apporter à des questions motivées des réponses validées –, on substitue un système de règles formelles censées *impliquer* la règle fondamentale, mais dont il faut bien peu de raison pour s'apercevoir qu'elles tendent à se *substituer* à cette règle *sans en provoquer l'observance réelle*. S'il est vrai que tout système de règles est coûteux à satisfaire, ce coût n'est pas pour autant une garantie de bonne production scientifique ! Mais il y a plus. Quelques-uns excellent à contrôler l'implémentation de ces règles formelles de façon à les satisfaire, habilement, au plus bas prix, en donnant ainsi l'impression qu'ils font de la science alors même qu'ils en ignorent la règle fondamentale.

e) Nous sommes ici, on l'aura compris, à la limite de l'imposture. Ce chercheur-ci a publié *n* clones du même article, lui-même fait en grande partie d'emprunts divers, par plagiat et auto-plagiat ; et cela dans des revues qui affichent leur vertu en s'affirmant « à comité de lecture » mais entre lesquelles la consanguinité est forte. Cette « équipe »-là fait de même, sans vergogne. L'équipe et les chercheurs qui la composent défendent d'autant plus vivement les règles formelles qu'ils se sont aménagées que celles-ci les protègent d'une curiosité normale, minimale – juger sur pièces leur production – derrière le mythe d'une production validée *par avance*, comme si deux *reviewers* pouvaient à eux seuls se substituer à une communauté scientifique tout entière et aux débats qu'elle devrait permettre !

2. Deux ou trois règles d'or pour la recherche

a) Comment alors faire de la science en évitant de donner dans cette « science » d'opérette, perfide et inféconde, qui, tyranniquement, rêve d'imposer ses critères intéressés ? Une réponse un tant soit peu développée est évidemment hors de portée ici. Je m'en tiendrai donc à trois ordres de remarques.

b) Le premier ordre de remarques a trait au *temps*, à la *durée*. Le temps est nécessaire déjà pour que se crée les *infrastructures* des recherches que l'on conduira – notamment un « labo », des « terrains » de recherche, qu'il faut constamment entretenir. Le temps est nécessaire aussi pour qu'émerge le nerf de la recherche, je veux dire les *questions de recherche*, qu'on ne tire pas du néant. La formation donnée dans les masters est à cet égard très trompeuse, parce que, du moins dans les formes que j'observe, elle fait croire aux étudiants concernés qu'ils pourraient formuler une question de recherche *ex abrupto*. Or le terreau sur lequel s'élèvera un jour telle ou telle question de recherche se forme lentement : il constitue une infrastructure vitale toujours en chantier. On ne s'attèle pas de but en blanc à telle thématique de recherche : celle-ci a dû être longuement fréquentée, méditée, préparée. Inversement, on pourra être surpris de voir regarder comme un thème de recherches possibles, à venir, ce qui semble n'être encore qu'un germe dans le champ de conscience d'un chercheur ou d'une équipe : ainsi en va-t-il par exemple, et pour ce qui me concerne, des recherches sur les praxéologies de *la production et l'édition de textes* dans la formation scolaire et universitaire, ce qui renvoie à la possibilité d'une *didactique du « style »* ayant pour objet les conditions de création et de diffusion de telles praxéologies.

c) Bien entendu, dans la recherche normalement organisée, qui ne cède rien au narcissisme, la question sur laquelle l'étudiant enquêtera – à l'étude de laquelle il tentera d'apporter une *contribution* – lui est proposée par l'équipe qui l'accueille (et, très concrètement, par son directeur de recherche au sein de cette équipe). La chose est d'autant plus décisive que, sauf exception, l'étudiant de master doit encore accomplir sa conversion du mode d'étude *rétroactif* (MR), propre à l'essayisme dissertationnel scolaire et universitaire, au mode d'étude *proactif* (MP) caractéristique des recherches scientifiques, en quelque domaine que ce soit (voir la séance précédente de ce séminaire). Mais le problème de la durée, de la « longue durée » nécessaire pour que les questions viennent à maturité se pose également à propos de la formation et du « mûrissement » des réponses. Le travail « clinique », au long cours, du chercheur embrasse en TAD de vastes domaines, que désignent les niveaux de co-détermination didactique : civilisations, sociétés, écoles, pédagogies, disciplines. Cela suppose une attention diversifiée, des lectures nombreuses et fréquemment arides. Je donnerai ici l'exemple d'un épisode personnel récent, à propos de la distinction MR/MP. Chacun connaît, je suppose, la polémique qui s'est élevée, en France, autour du livre de Michel Onfray, *Le crépuscule d'une idole*, sous-titré *L'affabulation freudienne* (Grasset, 2010). Ce livre est, semble-t-il, une attaque en règle contre la psychanalyse et son créateur, dans la ligne du *Livre noir de la psychanalyse* (2005). La réplique lui a été donnée dans la presse par Élisabeth Roudinesco et d'autres. Or voici que paraît un petit livre qui est un recueil de ces répliques : *Mais pourquoi tant de haines ?* (Seuil, 2010). Je le lis ; il contient notamment un texte d'un historien, Guillaume Mazeau, intitulé « Onfray ou l'affabulation ». Il se trouve qu'Onfray a écrit un ouvrage sur Charlotte Corday (*La Religion du poignard. Éloge de Charlotte Corday*, Galilée, 2009). Guillaume Mazeau est lui-même l'auteur de travaux qui ont donné lieu à un livre intitulé *Le Bain de l'histoire. Charlotte Corday et l'attentat contre Marat, 1793-2009* (Champ Vallon, 2009). Son texte s'ouvre par cette annonce : « L'historienne de la psychanalyse Élisabeth Roudinesco n'exagère-t-elle pas en peignant Onfray aux couleurs les plus sombres ? Bien au contraire. Les dérives d'Onfray ne sont pas nouvelles et méritent d'être portées à la connaissance du public. » (p. 63) De l'ouvrage d'Onfray sur Charlotte Corday, Mazeau écrit : « Plutôt bien accueillie par les médias, cette histoire est pourtant historiquement médiocre et politiquement scandaleuse. » (p. 64) Je n'entrerai pas dans le détail du propos de l'auteur et ne citerai ici que ce passage significatif :

> … le livre [d'Onfray] ne parvient jamais à se hisser au-dessus des délires dont la droite extrême nous rebat les oreilles depuis deux siècles […] Pour Marat, la Révolution française ne serait que "l'occasion d'exprimer son ressentiment comme on sort le pus d'un bubon !" (p. 24). Ces clichés anachroniques,

> dépourvus d'imagination, issus de la propagande contre-révolutionnaire, ont été depuis longtemps balayés par des centaines de travaux scientifiques. (p. 65)

En lisant cet article, une idée me vient. D'Onfray je n'ai jamais tenté de lire que son *Traité d'athéologie* (Grasset, 2005), attiré que j'étais par le sujet même de l'ouvrage. Mais le livre m'est vite tombé des mains tant sa lecture m'était rendue désagréable par une écriture dont je n'ai pas la pratique ; une écriture – comment dire ? – à la hache, minimaliste, sans élégance. Tel est du moins mon souvenir. L'idée qui me saisit est la suivante : tout s'explique – me semble-t-il ! – des critiques d'une Élisabeth Roudinesco ou d'un Guillaume Mazeau si l'on admet que les écrits d'Onfray relèvent de l'essayisme inspiré, où l'on « traite un sujet » avec véhémence, en proposant au lecteur une vision antérieurement constituée, qui n'est pas *mise à l'épreuve là*, et qu'il faut seulement habiller de quelques informations au demeurant inessentielles. À cet égard, la question de la bibliographie est sans doute fort significative. Dans le *Monde* du 22 avril 2010, Onfray répond à Élisabeth Roudinesco en ces termes :

> Madame Roudinesco affirme que mon livre est […] « sans sources bibliographiques » ! Or, si Madame Roudinesco avait eu le livre entre les mains et ne s'était pas contentée de ses fantasmes, elle aurait constaté qu'il existe une bibliographie commentée de vingt pages en interligne « un », soit, j'ai vérifié sur mon fichier, 56 521 signes… Pour une bibliographie inexistante, on a fait mieux !

Je reprends ce passage d'un autre auteur de l'ouvrage *Mais pourquoi tant de haines ?*, Franck Lelièvre, dont le texte s'intitule « Les liaisons dangereuses de Michel Onfray », et qui commente ainsi ladite bibliographie de vingt pages :

> … il saute aux yeux qu'il ne s'agit effectivement pas d'une bibliographie : notre ex-collègue ignore évidemment les règles de la méthode historiographique… Ce qu'il nous propose en lieu et place d'une vraie bibliographie est un compte rendu en forme de *digest* destiné à son public où l'auteur égrène tout ce qu'il a lu, ce qu'il faut lire, et, surtout, ce qui est inouï s'agissant d'une bibliographie : *ce qu'il convient de ne pas lire !*

Bien entendu, les références bibliographiques ont, selon le mode d'étude adopté, des sens tout à fait distincts : dans le mode d'étude rétroactif, l'auteur précise, sur le « sujet traité », les ouvrages qu'il aura « utilisés » et aussi ceux qu'ils *auraient pu* aussi bien solliciter, ouvrages qui *traitent à leur façon le même sujet* ou un sujet voisin. Dans le mode proactif, les références

renvoient aux éléments du milieu $M = \{ R^{\Diamond}_1, R^{\Diamond}_2, \ldots, R^{\Diamond}_n, O_{n+1}, \ldots, O_m \}$: elles ont pour fonction de soutenir la construction et la validation de la réponse $R^{\blacktriangledown}$, ce qui, au reste, ne suppose ni exhaustivité ni excès ostentatoire de l'inventaire bibliographique opéré. Mais j'arrête là cette ébauche d'examen ; car, vous l'aurez compris, ce qui m'importe ici est le fait suivant : dans l'épisode que je viens de relater brièvement, il devient clair qu'une certaine opposition, celle du mode rétroactif et du mode proactif d'étude, élaborée sur un matériel empirique tout autre, peut permettre d'expliquer des faits disséminés partout dans le monde intellectuel, où l'on doit pouvoir suivre la ligne de démarcation entre essayisme et enquête, entre enquête et essayisme. Si la chose se confirme, l'opposition MR/MP aura gagné en fécondité explicative.

d) Si la variable « temps » est ainsi essentielle, si la recherche ne peut se développer que sur la base d'une attention de longue durée aux institutions, aux personnes et à leurs activités, afin même que naissent des questions de recherche, il est une autre variable à prendre en compte : la *taille* des « collectifs » de recherche. Sur ce sujet, je ferai successivement deux remarques de sens opposés. Tout d'abord, une recherche déterminée suppose une équipe de taille *réduite* – *quelques* personnes –, éventuellement augmentée des personnels techniques indispensables ou utiles, souvent non membres permanents de l'équipe (mais sauf exception membres permanents du « labo »). Rappelons-nous ainsi qu'une recherche conduisant au titre de docteur d'Université repose traditionnellement sur une *paire* de chercheurs, le directeur de thèse et le thésard. Une équipe de recherche ne doit pas s'éloigner beaucoup de ce minimalisme et ne doit le faire que pour des raisons précises, comme la présence dans l'équipe d'un chercheur ayant telle compétence à la fois rare et supposée cruciale pour la réussite de la recherche projetée. Si l'on parle d'un « labo » de la taille de l'UMR ADEF, ainsi, on doit bien sûr imaginer un découpage en groupes de recherche, eux-mêmes scindés en sous-groupes, toutes entités qui forment des *environnements de vie et de travail* utiles aux équipes de recherche qui se constitueront au sein du labo à propos de question de recherche déterminées. J'avoue ne pas comprendre comment peut fonctionner une équipe de recherche d'une douzaine de personnes dont la plupart ne se distinguent guère les unes des autres, du moins par rapport à la recherche envisagée ! Une recherche « nerveuse » suppose des relations fortes entre *quelques* personnes qui se situent toutes, et toutes ensemble, au cœur de la recherche, non à sa périphérie.

e) J'ai annoncé une remarque de sens opposé. Alors que la recherche conduisant au titre de docteur se fait à deux, sa mise en débat se fait au sein d'un jury plus nombreux, et de fait souvent *trop peu nombreux*, qui doit se caractériser par la *diversité* des compétences et des points de vue réunis

autour du travail accompli et présenté. Plus généralement, de même, il faut que les groupes, sous-groupes et sur-groupes (labo, réseau, communauté scientifique) qui forment les environnements usuels d'une équipe de recherche donnée soient *assez diversifiés* pour donner à l'équipe, en certains moments de son activité, une chambre d'écho et de confrontation satisfaisante afin de (lui) permettre d'estimer la qualité de son travail en vue d'en augmenter la fécondité. À cet égard, le confinement de certaines équipes de recherche dans un cadre trop étroit est dommageable : très souvent, on ignore ainsi ce que le voisin fait, parfois au sein d'un même groupe, voire d'un même sous-groupe, en invoquant la « spécificité » du travail de l'équipe, spécificité qui, en bonne épistémologie, ne saurait être un *présupposé* mais doit résulter d'interactions avec le « genre prochain ». Concrètement, dans cette perspective de désenclavement permanent, j'ai préconisé que, au sein de l'UMR ADEF, *chaque chercheur* soit tenu de remettre à une *banque de travaux de recherche* constituée et gérée par le labo et accessibles aux seuls membres du labo, un exemplaire (électronique) de chaque papier qu'il aura publié dans le cadre de ses activités au sein du labo, afin qu'une interconnaissance puisse se développer, surtout lorsque les supports de publication pratiqués sont diversifiés (ce qui semble être le cas à l'UMR ADEF). Cela permettra de se faire une idée plus juste des synergies possibles, utiles, voire indispensables au sein du labo.

3. Thèmes de recherche d'étudiants

a) La première année du master de sciences de l'éducation comporte actuellement deux unités d'enseignement intitulées respectivement *Actualités de la recherche 1* et *Actualités de la recherche 2*, UE que j'ai mentionnées lors de la séance 3 de ce séminaire. La validation de la seconde UE suppose que l'étudiant rédige l'analyse de trois articles choisis à son gré, en relation avec son projet de mémoire. Ce travail comporte sauf exception un *titre*, lequel désigne – du moins est-on en droit de le supposer – le thème ou le secteur auquel le mémoire se rattachera. J'ai recueilli 57 de ces titres, qui forment un tableau certes divers mais où se marquent assez nettement un certain nombre de caractères. Le premier de ces caractères tient dans le fait de renvoyer fréquemment à des thèmes « populaires », dont la rencontre ne suppose pas une immersion dans un milieu de recherche ; des thèmes, si l'on peut dire, « exotériques », « commerciaux » (au sens où la littérature la plus diffusée les met en avant). Ainsi en va-t-il par exemple avec les titres suivants :

L'implication des parents dans l'école
L'évaluation formative en milieu scolaire
L'accompagnement entre nouvelle dimension et pratique de formation

Nous rencontrerons chemin faisant d'autres titres qui relèvent de cette catégorie. Mais ce qui surtout saute aux yeux, ce sont les thèmes qui renvoient à ce qui semble être regardé comme une *anomalie* plus ou moins lourde par rapport à un fonctionnement « normal » des personnes et des institutions, comme l'illustre cet exemple extrême :

La notion nosographique de l'autisme et les thérapies adaptées

La principale de ces anomalies a trait cependant à ce qui apparaît comme une difficulté spécifique d'entrée dans la *langue française* (comme objet d'étude scolaire et comme outil d'étude scolaire et universitaire notamment) du fait que, pour l'élève ou l'étudiant, le français est une langue seconde ou même une langue étrangère :

La compétence de production écrite en français langue seconde par les élèves nouvellement arrivés en France
Le bilinguisme familial
Les stratégies de compréhension en lecture en français langue étrangère chez lés étudiants universitaires hispanophones
Approches interlinguistiques et manuels scolaires en classe d'accueil
Le français langue seconde
La difficulté de la production écrite en français langue étrangères chez les étudiants chinois

Plus généralement, d'autres titres renvoient à des facteurs divers entravant l'intégration scolaire (dont le handicap) :

Intégration scolaire des enfants de migrants
La vie scolaire en Section d'enseignement général et professionnel adapté ou l'expérience de l'injustice et de l'humiliation
La différenciation pédagogique, outil face aux difficultés scolaire et au handicap
Les enfants sourds scolarisés en milieu ordinaire dans le partage d'une culture et par une redéfinition de l'intégration
Les modifications pédagogiques engendrées par l'inclusion, en milieu ordinaire, des élèves en situation de handicap
L'adaptation des pratiques des enseignants de primaire face à des élèves en situation de handicap et la diffusion de ces pratiques en direction des autres élèves de la classe
ENAF en classe ordinaire et progrès scolaires
La scolarisation des élèves à besoins éducatifs particuliers

Ajoutons encore ce titre, qui renvoie à une autre forme de souffrance éducative :

Les étudiants salariés à l'Université

Plus largement, les « élèves en difficulté » suscitent une attention qui, en quelques cas, apparaît mue par une compassion pour l'élève, voire pour l'école elle-même :

La perception de la difficulté scolaire à l'école élémentaire
Les pratiques enseignantes liées à la difficulté scolaire d'apprentissage
Évaluation formative et élèves en difficulté
Absentéisme, déscolarisation, décrochage scolaire

Dans les perspectives ainsi ouvertes, on s'intéresse également à des types de développements scolaires ou pédagogiques de nature à réduire certaines des difficultés rencontrées :

Les classes transplantées
Système scolaire et amélioration des pratiques de la Vie Scolaire
Les relations entre la famille et l'école, la communication un enjeu à la réussite scolarité
Se détendre pour mieux apprendre : la relaxation, nouvel allié des enseignants ?
La relation entre estime de soi, motivation et réussite scolaire observée en cours particuliers
Représentations et pratiques des assistants de service social scolaire

Ces problématiques de la « remédiation » côtoient des thèmes d'études « fondamentaux », moins nombreux, qui nous font retrouver en partie la première catégorie distinguée plus haut :

Interaction sociale, développement cognitif et apprentissage à l'école
Pluridisciplinarité, Interdisciplinarité, Transdisciplinarité
L'autorité de l'enseignant liée aux pratiques pédagogiques
L'autorité éducative
Les prescriptions à l'école, organisatrices des pratiques collectives
Professionnalisation des enseignants dans un contexte de mutation psychosocial
L'analyse de l'activité enseignante dans le champ de l'ergonomie
Les déterminants de l'action du maître
Nouveaux dispositifs et évaluation
Le Conseiller Principal d'Éducation et la participation citoyenne des collégiens

Les choix d'orientation des élèves ruraux
La théorisation des pratiques enseignantes :un possible ?
La notion de genre et son influence sur les comportements enseignants lors des interactions en mathématiques au CE1

Ajoutons à cela un titre qui se rapporte plutôt au monde de l'entreprise :

La compétence collective

Au-delà, on rencontre d'abord des titres relatifs à l'usage d'outils « nouveaux », qui relèvent en fait des TICE :

L'intégration des outils informatiques dans la pédagogie
Observation et description d'un blog d'une classe de CM1/CM2 : de l'outil à son instrumentalisation
Les usages du cartable électronique
L'enseignement en ligne à l'école élémentaire

Restent alors seulement 10 titres qui affichent quelque lien avec certains contenus d'enseignement. Le groupe le plus nombreux concerne les débuts de l'étude de la langue française et de ses usages :

Le principe alphabétique et l'apprentissage de la lecture
L'acquisition du langage à l'école maternelle
L'écrit au collège
Le travail de l'enseignant dans le domaine de l'écriture à travers les activités graphiques et artistiques

À cela s'ajoute un titre qui renvoie en réalité à l'apprentissage d'une langue étrangère au primaire :

Les différents facteurs favorisant la communication orale

Restent alors 5 titres qui portent sur des matières soit anciennes (mathématiques, économie, sciences), soit nouvelles (absolument – l'EDD – ou relativement au niveau où on l'envisage – la philosophie au primaire) :

La portée philosophique de la littérature de jeunesse
Didactique des Mathématiques dans l'observation d'une séance d'ingénierie didactique
L'éducation au développement durable ; le travail en partenariat appuis et obstacles
De la complexité de l'économie à l'économie complexe

b) Le tableau précédent, quoique établi à partir de données « de surface », appelle un constat qu'une étude plus approfondie (portant sur les travaux de ces étudiants) confirmerait sans doute : le souci des difficultés *normales* de l'éducation et de l'enseignement semble oublié au profit des *perturbations caractérisées* de la vie scolaire et cognitive. On retrouve ici cette très ancienne croyance que l'enseignement d'une discipline ne poserait pas en soi de problème, *n'étaient* les élèves décrocheurs, les élèves ne parlant pas français ou mal intégrés à la culture scolaire, les élèves sourds ou à mobilité réduite, etc. Apprendre à résoudre des équations du premier degré à une inconnue n'appellerait pas un instant d'attention du chercheur, à moins que les « apprenants » ne soient des déficients visuels, etc. On voit ainsi comment le vieux monde se perpétue, ce qui prépare des aspirants professeurs singulièrement prévenus contre leur « cœur de métier » (*core activity*) : la question est donc sensible…

4. L'espace des recherches

a) J'ai eu récemment à préciser l'espace des recherches dans lequel nous évoluons. Le 4 mai dernier se tenait au Caire, en marge – plutôt que dans le cadre – du Congrès franco-égyptien de mathématiques (3-5 mai 2010), une table ronde sur la didactique des mathématiques organisée par Nadia Douek et Samir El Garhi et à laquelle André Pressiat et moi avons participé à côté d'un mathématicien égyptien, Tarek Sayed Ahmed. C'est à cette occasion que j'ai été conduit à préciser trois grands problèmes de recherche en didactique des mathématiques. Je les explicite rapidement ici, en précisant que, à mes yeux, les formulations proposées valent, *mutatis mutandis*, pour tout domaine praxéologique possible. Ces trois grands problèmes sont exprimés en termes de *choix*, mot qui renvoie ici aussi bien aux choix *faits*, que l'on peut observer et que l'on doit tenter d'expliquer, qu'aux choix *à faire*, qui *pourraient* être faits, dont on doit étudier l'économie et l'écologie. Ce sont respectivement le choix *des connaissances*, le choix *des situations*, le choix *des parcours* – terminologie que je vais expliciter.

b) Le premier problème est celui du *choix des connaissances*, c'est-à-dire le choix des praxéologies. Les recherches correspondantes portent sur la nature et l'évolution de l'*équipement praxéologique* actuel de certains publics généraux ou professionnels, selon une problématique qui met en avant les *besoins*, le degré de satisfaction apporté à cet égard par l'*offre praxéologique* des institutions didactiques considérées, ainsi que les *infrastructures praxéologiques* – mathématiques et autres – utiles ou indispensables. C'est ainsi que, sauf erreur, l'équipe TAD partie prenante de l'UMR P3 ADEF a

pour perspective (ou pour actualité) de travailler sur le problème du choix des praxéologies dans les domaines et avec les publics recensés ci-après (cette liste ne vise pas à l'exhaustivité, bien sûr) :

1. les mathématiques dans la formation scolaire générale ;
2. les mathématiques dans la formation des étudiants et des chercheurs en sciences de l'éducation et en didactique ;
3. les mathématiques dans la formation des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire ;
4. les mathématiques dans la formation des ingénieurs ;

5. la méthodologie et la statistique dans la formation des étudiants et des chercheurs en sciences de l'éducation et en didactique ;
6. la méthodologie et la statistique dans la formation des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire ;

7. les praxéologies de l'Internet dans la formation scolaire ;
8. les praxéologies de l'Internet dans la formation des étudiants et des chercheurs en sciences de l'éducation et en didactique ;
9. les praxéologies de l'Internet dans la formation des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire ;

10. les praxéologies de la production et de l'édition de textes dans la formation scolaire ;
11. les praxéologies de la production et de l'édition de textes dans la formation des étudiants et des chercheurs en sciences de l'éducation et en didactique ;
12. les praxéologies de la production et de l'édition de textes dans la formation des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire ;

13. les praxéologies didactiques en mathématiques au primaire et au secondaire (dont le portfolio) ;
14. les praxéologies didactiques dans la formation des étudiants et des chercheurs en sciences de l'éducation et en didactique (dont le portfolio) ;
15. les praxéologies didactiques dans la formation des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire (dont le portfolio) ;
16. les praxéologies didactiques en ligne dans la formation scolaire ;
17. les praxéologies didactiques en ligne dans la formation des étudiants et des chercheurs en sciences de l'éducation et en didactique ;
18. les praxéologies didactiques en ligne dans la formation des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire.

Deux remarques s'imposent ici. Tout d'abord, nous le savons, le choix des équipements praxéologiques peut s'énoncer de deux façons : selon le paradigme dominant de la *visite des œuvres* (PVO), ou selon le paradigme

émergent du *questionnement du monde* (PQM) ; donc soit sous la forme d'une liste de praxéologies désignées explicitement, soit sous la forme d'une liste de questions désignant implicitement un ensemble ouvert de praxéologies. Ensuite, si la problématique des *besoins praxéologiques* – c'est-à-dire la problématique *primordiale* en didactique – nous est familière, un récent épisode vécu au sein de l'UMR ADEF me porte à penser qu'elle ne l'est pas nécessairement ailleurs, sans doute parce qu'y prévaut encore une problématique de professeur, c'est-à-dire de qui se voit institutionnellement dénié le droit d'intervenir dans le débat sur le choix des connaissances à enseigner.

c) La problématique du professeur, vous la connaissez : étant donné un enjeu didactique qui lui a été désigné, le professeur doit effectuer un *choix de situations* à faire vivre dans la classe. C'est désigner là le deuxième des trois grands problèmes annoncés, problème classique depuis les origines en didactique des mathématiques, qui renvoie pour nous, notamment, aux travaux sur les AER et les PER, et dont je ne dirai rien de plus ici.

d) Le dernier des trois grands problèmes est, si je puis dire, neuf. Sous le nom de *choix des parcours* je désigne le choix des parcours *de formation* au long d'une scolarité, le *cursus studiorum*, dans une institution didactique donnée, voire « tout au long de la vie ». Les institutions de formation secondaire ou tertiaire proposent, en un temps historique donné, un choix de parcours de formation qui, étant donné l'évolution des sociétés, ne permettent parfois que très imparfaitement de répondre aux besoins praxéologiques effectifs et, surtout, impose une orthodoxie des consécutions didactiques (ceci doit être étudié avant cela, l'étude de ceci suppose de savoir d'abord tout cela, etc.) qui mérite d'être questionnée sévèrement. C'est ainsi qu'il est sans doute des rencontres programmées de façon trop précoce, qui pour cela se révèleront vaines. De même, il est des rencontres qui doivent au contraire se réaliser *dans la longue durée*, de façon récurrente, et de loin en loin résurgente. Mais je n'en dirai pas plus aujourd'hui sur ce sujet, sur lequel il me paraît urgent de travailler.

MÉTHODES DE RECHERCHE

1. Le mot de méthodologie

a) Dans les sciences de l'éducation telles que j'en perçois le fonctionnement, un étudiant de master, soucieux peut-être plus que de raison du mémoire qu'il devra soutenir, doit rapidement « avoir » non seulement « son sujet » et « sa problématique » – nous avons vu cela lors de la séance précédente de ce

séminaire –, mais aussi « sa méthodologie » – et il doit encore avoir « sa théorie », j'aurai sans doute à y revenir. Qu'entend-on donc par « méthodologie » ? Voici d'abord un extrait du glossaire appendu par ses auteurs à l'ouvrage *Réussir son master en sciences humaines et sociales* publié chez Dunod en 2009 par Yvan Abernot et Jean Ravestein :

> Méthode de recherche : la méthode correspond à la manière précise dont un chercheur utilise ses outils de recueil et de traitement des données. À ne pas confondre avec méthodologie, qui est plus générale.
> Méthodologie : grande manière de faire de la recherche. On parle de méthodologie expérimentale, historique, clinique, différentielle, etc. À ne pas confondre avec méthode.
> Méthodologie clinique : méthodologie suivant un cas (individu ou groupe) dans le temps de manière à en comprendre le système de sens.
> Méthodologie différentielle : orientée vers la découverte d'éléments de typologie.
> Méthodologie ethnologique : méthodologie correspond à l'étude quasi clinique de populations.
> Méthodologie expérimentale : tente de valider une hypothèse.
> Méthodologie historique : s'intéresse à décrire et à comprendre la vie d'une population dans une période donnée.
> Méthodologie systémique : concerne la mise au jour d'unités et de liens dans un système. (p. 206)

La « méthodologie » dont parlent les étudiants en sciences de l'éducation qui s'inquiètent de devoir *déclarer l'identité* de cette composante de leur travail est, semble-t-il, celle-là même qu'évoque ce glossaire : c'est une « grande manière de faire de la recherche », que l'on désigne en parlant de « méthodologie expérimentale, historique, clinique, différentielle, etc. » Je note ici la distinction entre *méthodologie* et *méthode* de recherche : cette dernière est simplement *mise en jeu*, semble-t-il, dans le travail présenté par l'étudiant (et fait donc *ipso facto* l'objet d'une évaluation), mais cela sans avoir à être *déclarée à l'avance*.

b) La distinction méthodologie/méthode précédente est classique. Voici par exemple l'entrée *Methodology* proposée dans l'édition de 1985 de l'ouvrage d'Arthur S. Reber, *The Penguin dictionary of psychology* (New York, Penguin Books).

> **methodology 1.** Broadly, the formulation of systematic and logically coherent methods for the search for knowledge. It is, strictly speaking, not concerned directly with the accumulation of knowledge or understanding but rather with the methods and procedures by which such knowledge and understanding are

achieved. Most are prone to use the term as equivalent to *scientific method*, with the implication that the only acceptable methodology is the scientific. The legitimacy of this equivalence depends on just how one characterizes the
➢ *scientific *method* – in the treatment given below, which is representative of the contemporary "received view," this synonymity is defensible. **2.** Specifically, the actual procedures used in a particular investigation. (p. 439)

On retrouve ici, entre les sous-entrées 1 et 2, la distinction exprimée plus haut à travers la différence entre *méthodologie* et *méthode*. Le *Dictionnaire culturel en langue française* (2005) indique à cet égard ceci :

MÉTHODOLOGIE […] n. f. (1842 ; de *méthode* et *-logie*)
Didact. **1** Étude systématique des méthodes scientifiques (son étude fait traditionnellement partie de la logique)
→ épistémologie.
2 Étude des méthodes pédagogiques.
3 Abusif. Anglic. Méthode, moyen de procéder. Le mot tend à se répandre indûment pour *méthode* comme *technologie* pour *technique*.
MÉTHODOLOGIQUE […] adj. (1877, *Littré*, *Suppl.* ; de *méthodologie*)
Didact. Qui concerne l'étude des méthodes et (abusif) les méthodes. → **méthodique**. (p. 592)

En réalité, la mise à l'écart de « méthode » au profit de « méthodologie », qui nous vient de l'anglais, est, dans cette langue même, dénoncée par les puristes. Dans le dictionnaire en ligne *Dictionary.com*, par exemple, on lit d'abord ceci :

1. a set or system of methods, principles, and rules for regulating a given discipline, as in the arts or sciences.
2. *Philosophy.*
a. the underlying principles and rules of organization of a philosophical system or inquiry procedure.
b. the study of the principles underlying the organization of the various sciences and the conduct of scientific inquiry.
3. *Education.* a branch of pedagogics dealing with analysis and evaluation of subjects to be taught and of the methods of teaching them.

(Notons en passant la sous-entrée 3, qui relève de la « pédagogie », à l'instar de la sous-entrée 2 du *Dictionnaire culturel…*) Mais voici l'additif que ce même dictionnaire en ligne propose (en l'empruntant à la 4e édition, parue en 2009, de *The American Heritage Dictionary of the English Language*) :

Usage Note : *Methodology* can properly refer to the theoretical analysis of the methods appropriate to a field of study or to the body of methods and principles particular to a branch of knowledge. In this sense, one may speak of *objections to the methodology of a geographic survey* (that is, objections dealing with the appropriateness of the methods used) or of the *methodology of modern cognitive psychology* (that is, the principles and practices that underlie research in the field). In recent years, however, *methodology* has been increasingly used as a pretentious substitute for *method* in scientific and technical contexts, as in *The oil company has not yet decided on a methodology for restoring the beaches*. People may have taken to this practice by influence of the adjective *methodological* to mean "pertaining to methods." *Methodological* may have acquired this meaning because people had already been using the more ordinary adjective *methodical* to mean "orderly, systematic." But the misuse of *methodology* obscures an important conceptual distinction between the tools of scientific investigation (properly *methods*) and the principles that determine how such tools are deployed and interpreted.

c) En TAD, nous parlerons en règle générale de *technique* (en lieu et place de *méthode*) et de *technologie* (comme substitut de *méthodologie*) ; en fait, nous parlerons aussi, plus globalement, de *praxéologies* de recherche. J'ajoute maintenant un extrait de l'article *Méthode* (signé d'Alain Voizard) du *Dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences* dirigé par Dominique Lecourt aux PUF (1999) :

Peu d'ouvrages de référence, même spécialisés, comptent une entrée « Méthode ». Lorsqu'il y en a une, elle est souvent ridiculement courte. Cela est sans doute imputable au fait qu'il n'y a pas de méthode scientifique, du moins considérée abstraitement comme un ensemble de règles fixes et universelles régissant l'ensemble de l'activité scientifique. C'est pourquoi aussi, suivant en cela Hans Reichenbach, l'interrogation philosophique sur la méthode se limite aujourd'hui à des questions concernant soit la nature de la coupure entre le contexte de découverte et le contexte de justification, soit au contexte de justification. Il semble en effet acquis qu'on ne peut rien dire du contexte de la découverte. Comme le dit Reichenbach : « Il n'existe pas de règles logiques en termes desquelles une « machine à découvertes » pourrait être construite, qui se charge de la fonction créative du génie » (*The Rise of Scientific Discovery*, 1951, p. 231). Seul le contexte de justification peut faire l'objet de la réflexion méthodologique. En ce sens, la méthode concerne l'analyse de la relation entre une théorie donnée et l'ensemble des faits qu'elle prétend expliquer ; elle concerne la justification ou la corroboration des théories par les faits. Mais pas plus qu'il n'y a d'algorithme de la découverte, il n'y a d'algorithme de la justification. (p. 636)

On va voir que, s'il n'y a pas d'algorithmes de la recherche ou de la justification, il y a, bien évidemment, des « techniques » et des « technologies » tant de la *recherche* que de la *justification*.

2. Éléments de méthodologie

a) La question de la méthodologie est une question vive pour les étudiants – et les enseignants – de sciences de l'éducation. Il en va tout particulièrement ainsi pour les trop rares étudiants qui se réfèrent à la TAD dans leur travail. Je profite de cette occasion pour brosser une esquisse provisoire touchant les praxéologies de la recherche empirique en TAD : s'il est clair qu'on ne trouvera pas là d'innovations absolues, il n'est pas faux néanmoins qu'il existe en TAD des nuances méthodologiques spécifiques, sur lesquelles d'aucuns ont au reste pu se méprendre (de façon parfois « intéressée »). Je présente donc ci-après, en 17 points, une ébauche concernant quelques aspects critiques des praxéologies « méthodologiques » que l'on rencontre au cours de recherches en TAD (et, en vérité, en d'autres domaines des SHS).

1. Le chercheur ζ (zêta) se pose une *question Q* à propos d'une certaine *population* **P** d'objets *u*. (Rappelons qu'en TAD « tout est objet ».) Dès lors, ζ va développer une *clinique* de (**P**, *Q*).

2. Au cours d'une *même recherche*, ζ peut enquêter (successivement ou simultanément) sur *plusieurs* couples (**P**, *Q*).

3. On suppose dans ce qui suit que la question *Q* est de l'une des deux formes suivantes :

α) Si $u \in$ **P** satisfait telle condition *c*, quelles conditions satisfait-il aussi parmi tel ensemble *C* de conditions ?

Une telle question détermine une étude *globalement exploratoire*.

β) Si $u \in$ **P** satisfait tel ensemble de conditions *C*, satisfait-il aussi telle condition *c* ?

Une telle question détermine une étude *globalement confirmatoire*.

4. Quels que soient les moyens théoriques dont il dispose pour établir et justifier telle ou telle réponse à la question *Q* étudiée, ζ doit rassembler des *preuves empiriques*, ce qu'on nomme en anglais *evidence*, mot pour lequel le *Onelook dictionary* propose les "quick definitions" suivantes :

► ***noun***: your basis for belief or disbelief; knowledge on which to base belief (*"The evidence that smoking causes lung cancer is very compelling"*)
► ***noun***: an indication that makes something evident (*"His trembling was evidence of his fear"*)
► ***noun***: (law) all the means by which any alleged matter of fact whose truth is investigated at judicial trial is established or disproved
► ***verb***: give evidence
► ***verb***: provide evidence for
► ***verb***: provide evidence for; stand as proof of; show by one's behavior, attitude, or external attributes

Dans le cadre de la TAD, l'*evidence* provient d'objets que le chercheur doit s'employer à « faire parler » (de façon directe ou indirecte), en sorte que ces objets fonctionnent alors comme des *médias*, mais cela de façon adidactique *par rapport à la question posée*, de sorte qu'ils fonctionneront en même temps comme des *milieux* relativement à cette question.

5. ζ doit pour cela se procurer des informations issues des objets $u \in \mathbf{P}$, sous la forme de corpus de *données* $D_\ell(\mathbf{P}, Q)$. Deux grands cas peuvent être *a priori* distingués :

– les « données » sont… données, « toutes faites », c'est-à-dire ont été « construites » par d'autres : ζ doit seulement se les rendre disponibles, les « recueillir » (on supposera dans ce qui suit qu'il peut le faire sans les altérer) ;

– les « données » sont *à construire* par une action *directe* sur les objets u constituant **P**.

Dans tous les cas, une *même* question se pose : ces données ont-elles été construites puis recueillies sans que soit modifiée la liste de celles parmi les conditions $\Gamma = \{ c \} \cup C$ qui sont effectivement satisfaites par les objets u de **P** ?

6. Un cas particulier important est celui où les conditions de référence sont les conditions *prévalentes*, ordinaires, de la « vie sociale » des objets $u \in \mathbf{P}$. Dans un tel cas, ζ n'aura à se soucier que d'éventuelles altérations inattendues de ces conditions, ce qui peut en effet toujours se produire. J'introduis cependant ici une *méta-hypothèse heuristique* : celle de *l'inertie relative* des conditions prévalentes, avec cet additif : des conditions qui changent sont, en règle générale, des conditions *que l'on change* ; en sorte que, si personne – apparemment – ne change rien, on supposera, en première instance, que rien ne change.

7. Il est un type de données qui, en principe, est à l'abri des altérations toujours possibles par ailleurs du fait notamment de manipulations de toutes sortes : ce sont les *indices* qui signifient *à l'insu* des acteurs de la vie de l'objet et que ceux-ci ne songent donc pas à « contrôler ». (L'article « Indice » de *Wikipédia* indique à cet égard : « Un indice est comme un signe sauf qu'il produit du sens à l'insu du producteur de sens. ») Toute une méthodologie existe à ce propos, celle du *paradigme indiciaire*, développé par l'historien Carlo Ginzburg (de cet auteur, voir *Mythes, emblèmes, traces ; morphologie et histoire*, Flammarion, 1989 ; et aussi Denis Thouard [Éd.], *L'interprétation des indices. Enquête sur le paradigme indiciaire avec Carlo Ginzburg*, Presses universitaires du septentrion, 2007). Les indices jouent un rôle important *en toutes les étapes de l'étude d'une question*, y compris dans la lecture des « résultats » d'un geste expérimental.

8. Dans une étude exploratoire notamment (mais pas seulement), un geste d'étude consiste à examiner un objet u ou un très petit nombre d'objets u à propos des conditions Γ. Chaque objet u étudié ainsi est alors appelé un *cas* et l'étude de u se nomme une *étude de cas* (*case study*). Le *Cambridge Advanced Learner's Dictionary* définit *a case study* comme étant "a detailed account giving information about the development of a person, group or thing, especially in order to show general principles". Plus restrictivement, ce qu'est un *cas* – ou plutôt *a case* – est précisé en ces termes par un autre dictionnaire : "a person who is subjected to experimental or other observational procedures; someone who is an object of investigation ('The cases that we studied were drawn from two different communities')." Notons que, dans ce dictionnaire, la *même* définition exactement est proposée pour deux synonymes de *case*, à savoir *subject* (sujet) et… *guinea pig* (cobaye). Un « cas », c'est donc un « objet » reconnu comme tel – comme un individu de la population d'objets **P** étudiée. Les textes « généralistes » sont en règle générale plus ouverts en ce qui concerne la nature des « cas ». Voici par exemple les premières lignes de l'article "Case study" de *Wikipedia* :, qui en même temps précise ce qu'on peut entendre par « étude de cas » :

> A **case study** is a research methodology common in social science. It is based on an in-depth investigation of a single individual, group, or event to explore causation in order to find underlying principles. […]
> Rather than using samples and following a rigid protocol (strict set of rules) to examine limited number of variables, case study methods involve an in-depth, longitudinal (over a long period of time) examination of a single instance or event: a **case**. They provide a systematic way of looking at events, collecting data, analyzing information, and reporting the results. As a result the researcher may gain a sharpened understanding of why the instance happened as it did, and what might become important to look at more

> extensively in future research. Case studies lend themselves to both generating and testing hypotheses […].
> Another suggestion is that **case study** should be defined as a **research strategy**, an empirical inquiry that investigates a phenomenon within its real-life context. Case study research means single and multiple case studies, can include quantitative evidence, relies on multiple sources of evidence and benefits from the prior development of theoretical propositions. Case studies should not be confused with qualitative research and they can be based on any mix of quantitative and qualitative evidence. Single-subject research provides the statistical framework for making inferences from quantitative case-study data…

(On aura noté l'affirmation que "case studies lend themselves to both generating and testing hypotheses".) L'article parle d'une "investigation of a single individual, group, or event". L'emploi du mot *instance* (mot qui désigne en principe "an occurrence of something") paraît confirmer qu'il s'agit d'un « événement », d'un épisode récurrent. Mais voici maintenant la présentation donnée dans le *Publication Manual* (2009) de l'*American Psychological Association* :

> **1.05 Case Studies**
> *Case studies* are reports of case materials obtained while working with an individual, a group, a community, or an organization. Case studies illustrate a problem; indicate a means for solving a problem; and/or shed light on needed research, clinical applications, or theoretical matters. (p. 11)

Ici, il n'est pas explicitement question d'« événement » ; mais on nous parle plus libéralement de "materials" sans en préciser la nature – on peut imaginer qu'il *pourrait* s'agir d'un texte (livre, etc.) publié par "an individual, a group, a community, or an organization". Ajoutons à cela, enfin, ce qu'indique Jessica M. Utts dans son livre *Seeing Through Statistics* (Duxbury Press, 2e édition, 1999) :

> A **case study** is an in-depth examination of one or a small number of individuals. The researcher observes and interviews that individual and others who know about the topic of interest. For example, to study a purported psychic healer, a researcher might observe her at work, interview her about techniques, and interview clients who had been treated by the healer. (p. 51)

Ce qui prédomine encore en ce passage, c'est cet « individu » qu'est une personne humaine, que l'on observe et que l'on interroge. Une telle présentation, qui entre bien sûr dans la notion d'étude de cas, est pour nous inutilement restrictive. (Le lecteur intéressé pourra se référer là-dessus à

l'ouvrage de Charles C. Ragin et Howard S. Becker, *What is a case ? Exploring the foundations of social inquiry*, paru à Cambridge University Press en 1992 et partiellement disponible sur Google Livres.) J'ajoute à cette information sur la notion de *case study* un extrait d'un papier de Susan K. Soy intitulé *The case study as a research method* (1997), qu'on trouvera à l'adresse http://www.ischool.utexas.edu/~ssoy/usesusers/l391d1b.htm :

> Case study research generally answers one or more questions which begin with "how" or "why." The questions are targeted to a limited number of events or conditions and their inter-relationships. To assist in targeting and formulating the questions, researchers conduct a literature review. This review establishes what research has been previously conducted and leads to refined, insightful questions about the problem. Careful definition of the questions at the start pinpoints where to look for evidence and helps determine the methods of analysis to be used in the study. The literature review, definition of the purpose of the case study, and early determination of the potential audience for the final report guide how the study will be designed, conducted, and publicly reported.

9. Si l'échantillon $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{P}$ qu'étudie ζ se réduit à *un* objet u, il est évidemment hasardeux de généraliser à la population **P** tel ou tel « résultat » de l'étude de u. Plus généralement, le problème classique que pose l'ambition de généraliser à la population **P** une conclusion valable sur les individus de l'échantillon **E** (relativement à telle ou telle condition) est souvent « réglé » de façon imaginaire en évoquant la supposée (ou la désirée) *représentativité* de **E**. Or, on le sait, celle-ci dépend de la *variabilité* du type de conditions auquel on s'intéresse. S'il n'est pas déraisonnable de penser que, très généralement, nous sommes portés à voir les objets d'un certain type comme *moins* affectés de variations qu'ils ne le sont en vérité, il n'en est pas moins vrai que certaines conditions se révèlent de faible, voire de très faible variabilité sur la population **P** étudiée (que l'on songe au nombre de doigts de la main humaine à la naissance). Pour certains types de conditions, on pourra donc faire l'hypothèse heuristique que l'on a affaire à un *quasi-invariant* des « objets » examinés. En de tels cas, *l'hypothèse par défaut de faible variabilité* (voire de *quasi-invariance*), inspirée par l'exploration réalisée, restera bien sûr à confirmer ; mais elle est alors, en attendant mieux, ce qui émerge de l'échantillon examiné. D'une manière générale, on s'efforcera de formuler un *pari* – à vérifier ! – sur la variabilité de la condition c sur **P** : quasi-invariance, variabilité très faible, faible, etc.

10. Lors de la constitution de corpus de données $D_\ell(\mathbf{P}, Q)$, on peut procéder par l'*observation* des objets $u \in \mathbf{P}$, d'une manière dont on puisse penser

qu'elle n'altère pas la liste des conditions Γ visées par l'enquête. À cet égard, le glossaire déjà cité distingue les deux notions suivantes :

> Observation armée : dotée d'un outil préconstruit (grille d'items ou de critères) (s'oppose à l'observation libre).
> Observation libre : sans outil concret (grille) et sans phénomène précis à repérer (s'oppose à observation armée). (p. 207)

En fait, toute observation est gouvernée par une certaine *problématique*, explicitée ou non en une grille d'observation, qui conduit à « voir » certaines choses et à en ignorer d'autres ; en ce sens, une observation n'est jamais véritablement « libre ». Voici à titre d'illustration un témoignage venant du passé, extrait du *Buffon* (Fayard, 1989) de Jacques Roger :

> Décrire et classer, telle est donc la double occupation des naturalistes dans la première moitié du XVIII^e^ siècle. En réalité, les deux groupes de savants s'ignorent plus ou moins les uns les autres. Les « observateurs », qui se passionnent surtout pour les insectes, ne s'intéressent guère à la classification, et Réaumur n'hésite pas à faire entrer dans la « classe des insectes » tout ce qui n'est pas quadrupède, oiseau ou poisson. Une limace, une étoile de mer, un serpent, un lézard sont des insectes. Un crocodile est « un furieux insecte », mais un insecte tout de même. (p. 106)

On voit là combien les prétendues « données » d'une observation sont en vérité des « construits » qui, rétrospectivement, s'avèreront être parfois « n'importe quoi » ! Ajoutons à la distinction observation armée/observation libre une troisième notion, celle de l'observation *flottante au long cours*, qui porte sur tout un ensemble de couples (**P**, *Q*) : au plan exploratoire et heuristique, cette observation « ouverte » est la base de toute clinique ambitieuse.

11. Plusieurs notions classiques peuvent être rattachées aux remarques précédentes, la première étant celle de l'*observation naturaliste*, que Arthur S. Reber présente ainsi dans son dictionnaire de psychologie :

> **naturalistic observation.** The collection of data by careful observation of events in their natural setting. The oldest of the various scientific methods, it is used widely in ethology, ethnomethodology, developmental psychology and other areas. (p. 464)

Une autre notion pertinente est celle d'*observation aléatoire*, que le même ouvrage présente en ces termes :

> **random observation.** Any observation or series of observations made without any systematic pattern and without preconception about what is to be observed. Random observation is an important control procedure, particularly in naturalistic studies where periodic observations may produced biased data. Note that a random-observation schedule is not necessarily unplanned; rather it may be carefully planned but with the aid of and according to a random-number table. (p. 609)

L'entrée consacrée aux *méthodes d'observation* du même dictionnaire brosse en quelques mots un tableau tout classique encore :

> **Observational methods.** Generally, any of the procedures and techniques that are used in nonexperimental research to assist in making accurate observations of events. Included is the use of various devices such as audio and video recorders, cameras, stopwatches, check lists, etc. (p. 486)

12. Dans l'observation « pure », dans ce qu'on nomme en anglais une *observational study* en l'opposant à l'expérience – *experiment* –, les conditions prévalentes sont en principe conservées, même si la notion d'observation aléatoire suggère que, du fait des conditions d'observation, il est facile d'introduire des *biais* dans les observations réalisées. Il en est ainsi plus généralement lorsque l'observation suppose une manipulation des objets – lorsqu'on effectue sur eux un *geste expérimental*. L'article suivant rappelle que la distinction correspondante n'est pourtant pas si tranchée :

> **observation 1.** Most generally, any form of examination of events, behaviors, phenomena, etc. **2.** By extension, any individual datum, score, value, etc. that represents an event, behavior or phenomenon. Note that on occasion observation may be used in contrast with *experiment*. This distinction marks the fact that many regard scientific work based on the so-called ⇨ *observational methods* as nonexperimental. In this sense, the distinction is justified, although on the other side of the coin lies the argument that such a differentiation is really unnecessary since an experiment is merely one way of making an observation. Where the terms need to be kept conceptually separate is when one wishes to distinguish between research that is controlled by the manipulation of independent variables and research that is carried out by the use of ⇨ *naturalistic observation*. **3.** A casual or informal commentary upon or interpretation of that which has been observed. (p. 486)

Qu'il accomplisse ou non un geste expérimental sur l'objet u observé, lors des prises d'information conduisant à la constitution des corpus $D_\ell(\mathbf{P}, Q)$, le chercheur ζ peut créer à son insu des conditions Z telles que l'information recueillie par ce moyen soit altérée d'une façon dirimante *pour l'étude*

engagée (mais non peut-être pour telle autre étude qui prétendrait s'appuyer sur ces mêmes corpus de données). Un exemple caricatural du phénomène se rencontre lorsque le chercheur *interroge une personne* – supposée ici être un individu de la population **P** de l'étude – alors que la réponse « est dans la question » (comme il en va avec la question enfantine « Quelle était la couleur du cheval blanc d'Henri IV ? »). Une telle prise d'information va en effet solliciter l'équipement praxéologique de la personne dans un certain *contexte* qui, à cause d'« effets de contrats », *pourra* masquer la véritable « compétence » de l'individu en modifiant ponctuellement sa « performance » (dans quelque sens que ce soit).

13. La remarque précédente est étroitement liée aux exigences de la *dialectique des milieux et des médias* : si l'on considère que l'objet *u* « parle » à travers l'information recueillie, ou du moins qu'on peut le faire parler à travers elle, en quoi sa réponse est-elle « adidactique », dénuée d'intention, vis-à-vis de la question étudiée ? Le problème est patent à propos de données recueillies – ou plutôt *produites* – par un *entretien* ou à l'aide d'un *questionnaire* par exemple. Lorsqu'on interroge ainsi une personne, lorsqu'on lui pose une certaine question, la réponse qu'elle émet la qualifie comme *média*. Le problème est de savoir si, relativement à cette question, ce média peut être regardé comme un *milieu*. Telle est la grande faiblesse de ces techniques de prise d'information. On peut aller plus loin : il se peut que l'on étudie un objet, et en particulier une personne, *en tant que média* à propos de tel « sujet ». Il s'agit alors d'étudier ce média en tant qu'il adresse des messages *à un public déterminé*, et non pas en tant qu'il adresse des messages – sur le même sujet – *à l'interviewer*. Dans un entretien ou un questionnaire, le chercheur ζ interroge une personne *u* en tant que média s'adressant à lui, ζ, à propos même de ce que ζ désire connaître, ce qui risque fort d'altérer la fonction de milieu que ζ entend faire jouer à *u*. Un tel interrogatoire n'est certes pas inutile, mais à condition que ζ sache repérer ce qui, dans les « messages » émis par *u*, est authentiquement réponse d'un milieu à la question étudiée : tel est le problème clé. Une certaine prudence conduit ainsi à ne tirer parti que des informations qui paraissent non altérées par la manipulation opérée par ζ, notamment parce que *u* n'est pas susceptible de les façonner intentionnellement. De ce point de vue, la TAD a mis l'accent, on le sait, sur une méthode comme le *différenciateur sémantique*, qui, tout en supposant un geste expérimental sollicitant la « réponse » de sujets humains, permet mieux d'atteindre en eux le latent par delà le manifeste.

14. Le problème est tout différent lorsque, au lieu de considérer une population de personnes, on s'intéresse à une population de *productions* humaines, par exemple la population des ouvrages publiés, en français, sur

le thème des méthodes de recherche en sciences humaines et sociales. Plus généralement, il en va de même d'une population d'*exposés* (écrits ou oraux) relatifs à un thème donné : alors qu'une question posée à l'auteur d'un exposé (quand il existe) peut déterminer en partie le contenu de sa réponse, ici, la question posée à l'exposé ne saurait en modifier le contenu. On a fait référence plus haut à des exposés dans la production desquels le chercheur ζ n'a aucune part ; mais on peut aussi considérer une population de productions *suscitées* par ζ dans certaines conditions ; il faudra alors clairement distinguer la population **P** des *exposés* (à laquelle on s'intéresse) et la population $\mathbf{P}_0$ des *producteurs* des exposés, qui est autre chose – même si l'on considère *aussi* les productions suscitées comme apportant une information sur leurs producteurs.

15. Même quand on suppose que les corpus de données $D_\ell(\mathbf{P}, Q)$ que l'on s'est rendus disponibles sont sans biais sensible (par rapport à la question Q), c'est-à-dire quand on suppose que leur construction n'a pas modifiée la liste des conditions appartenant à $\Gamma = \{ c \} \cup C$ qui sont effectivement satisfaites par les objets u de **P**, un autre problème clé se pose : celui de distinguer entre ce que les données disponibles permettent de *prouver* et ce qu'elles *ne prouvent pas*. Autour de ce problème, beaucoup de travail a été accompli qu'il convient maintenant d'évoquer. Commençons par la mise en garde que propose Arthur Ruber dans cet autre article de son dictionnaire, écrit avant l'apparition, dans les années 1990, du *data mining*, de la « fouille de données » :

> **data snooping** Laboratory jargon for "scattershot" rummaging through one's data looking for statistically significant effects without an a priori rationale. The "significant" findings that emerge from such operations are likely to be spurious and due merely to random fluctuations, particularly when the data base is large or the number of factors high. To a certain extent such snooping is carried out by nearly all researchers but the responsible course is to use any adventitious findings as heuristics for future experimentation and not to report them as robust effects based on the original study. Compare and contrast with ⇨ *a posteriori tests*. (p. 175)

On notera en passant la « dialectique de l'exploration et de la confirmation » évoquée par l'auteur : l'utilisation de "any adventitious findings as heuristics for future experimentation and not to report them as robust effects based on the original study". Voici maintenant un exemple emprunté à l'ouvrage de Jessica M. Utts, *Seeing Through Statistics* (Duxbury Press, 2e édition, 1999). Soit une population humaine **P** sur laquelle on suppose que l'ensemble de conditions C suivant est réalisé : 1. tout $u \in \mathbf{P}$ est un homme ; 2. l'âge de tout $u \in \mathbf{P}$ est compris entre 40 et 84 ans. On veut vérifier si la condition c

suivante est satisfaite : *la prise fréquente d'aspirine diminue le risque d'infarctus*. Pour cela, on constitue un échantillon $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{P}$ et, pour chaque $u \in \mathbf{E}$, on s'efforce d'obtenir les deux informations suivantes : 1. u prend-il régulièrement de l'aspirine ? 2. u a-t-il eu une attaque cardiaque dans les cinq années écoulées ? On introduit ainsi deux *variables*, X et Y, définie respectivement par $X(u) = 1$ si u prend de l'aspirine fréquemment, = 0 sinon et par $Y(u) = 1$ si u a eu un infarctus au cours des cinq ans écoulées. (Les variables X et Y sont *dichotomiques*.) On est alors, de façon typique, devant une *« étude observationnelle »* (*observational study*). Pour voir le problème qui se pose quant aux conclusions que l'on pourra tirer des données ainsi recueillies, on évoquera par contraste un autre schéma : ζ constitue un échantillon **E** formés de $u \in \mathbf{P}$ qui s'engagent à prendre (par exemple tous les deux jours) un comprimé fourni par le chercheur, ce comprimé étant ici soit de l'aspirine ($X = 1$), soit un placebo ($X = 0$). La variable X est appelée quelquefois « variable *manipulée* » parce que sa valeur est le fruit d'une « manipulation » de la situation par le chercheur ; on parle aussi de variable *indépendante*, parce que sa valeur est fixée par le chercheur (la variable observée, Y, étant alors appelée variable *dépendante*). C'est là l'unique différence par rapport à l'observation d'une situation « spontanée » : la situation observée est ici « provoquée ». On peut parler à cet égard d'*expérience au sens large* (ou *au sens faible*). Mais, comme on va le voir, il manque encore une condition essentielle pour parler d'expérience *au sens strict* ou *au sens fort du terme*.

16. Voici le début du compte rendu résumé d'une recherche relative à l'effet possible de l'aspirine sur la santé cardiaque.

Does Aspirin Prevent Heart Attacks?

In 1988, the Steering Committee of the Physicians' Health Study Research Group released the results of a 5-year experiment conducted using 22,071 male physicians between the ages of 40 and 84. The physicians had been randomly assigned to two groups. One group took an ordinary aspirin tablet every other day, whereas the other group took a "placebo," a pill designed to look just like an aspirin but with no active ingredients. Neither group knew whether they were taking the active ingredient. The results, shown in Table 1.1, support the conclusion that taking aspirin does indeed help reduce the risk of having a heart attack.

The Effect of Aspirin on Heart Attacks

Condition	Heart Attack	No Heart Attack	Attacks per 1000
Aspirin	104	10,933	9.42
Placebo	189	10,842	17.13

> The rate of heart attacks in the group taking aspirin was only 55% of the rate of heart attacks in the placebo group, or just slightly more than half as big. (p. 7)

L'auteure souligne alors le fait fondamental suivant :

> Because the men were randomly assigned to the two conditions, other factors, such as amount of exercise, should have been similar for both groups. The only substantial difference in the two groups should have been whether they took the aspirin or the placebo. Therefore, we can conclude that taking aspirin caused the lower rate of heart attacks for that group. (p. 7)

Le hasard apparaît ici comme « le grand nettoyeur » : il donne un contenu concret à l'expression traditionnelle « Toutes chances égales par ailleurs… » et permet en particulier de préciser le lien entre la variable indépendante, dite alors variable *explicative* (*explanatory variable*), et la variable « dépendante », qu'on peut aussi nommer variable *résultante* (*outcome variable*) ou variable *de réponse* (*response variable*). Plus loin dans son ouvrage, l'auteure revient sur l'exemple de l'aspirine à l'occasion de la présentation de la notion d'expérience :

> **Experiments**
> An **experiment** measures the effect of manipulating the environment in some way. For example, the manipulation may include receiving a drug or medical treatment, going through a training program, agreeing to a special diet, and so on. Most experiments on humans use volunteers because you can't force someone to accept a manipulation. You then measure the result of the feature being manipulated, called the **explanatory variable**, on an outcome, called the **outcome variable**. Examples of outcome variables are cholesterol level (after taking a new drug), amount learned (after a new training program), or weight loss (after a special diet).
> As an example, recall Case Study 1.2, an experiment that investigated the relationship between aspirin and heart attacks. The explanatory variable, manipulated by the researchers, was whether a participant took aspirin or a placebo. The variable was then used to help explain the outcome variable, which was whether a participant had a heart attack or not. Notice that the explanatory and outcome variables are both categorical in this case, with two categories each (aspirin/placebo and heart attack/ no heart attack).
> Experiments are important because, unlike most other studies, they often allow us to determine cause and effect. The participants in an experiment are usually randomly assigned to either receive the manipulation or take part in a control group. The purpose of the random assignment is to make the two

> groups approximately equal in all respects except for the explanatory variable, which is purposely manipulated. Differences in the outcome variable between the groups, if large enough to rule out natural chance variability, can then be attributed to the manipulation of the explanatory variable. (p. 49)

Une expérience dans laquelle l'attribution des valeurs 1 et 0 à la variable indépendante *X* (supposée toujours dichotomique) est faite *au hasard* est une expérience au sens fort du terme : on parlera d'expérience *randomisée* (*randomized experiment*).

17. Par contraste, une « expérience » dans laquelle l'assignation de valeurs à *X* au sein de l'échantillon n'est pas faite au hasard sera appelée une *quasi*-expérience (*quasi-experiment*), notion que William M. K. Trochim précise ainsi (*Quasi-Experimental Design*, 2006, en ligne) :

> A quasi-experimental design is one that looks a bit like an experimental design but lacks the key ingredient – random assignment. My mentor, Don Campbell, often referred to them as "queasy" experiments because they give the experimental purists a queasy feeling.

(L'adjectif *queasy* signifie « qui met mal à l'aise », « qui donne la nausée ».) Cela noté, une expérience randomisée n'est pas toujours possible, comme le rappelle J. M. Utts :

> **Experiment versus Observational Study**
> Ideally, if we were trying to ascertain the connection between the explanatory and response variables, we would keep everything constant except the explanatory variable. We would then manipulate the explanatory variable and notice what happened to the response variable as a consequence. We rarely reach this ideal, but we can come closer with an experiment than with an observational study.
> In an experiment, we create differences in the explanatory variable and then examine the results. In an observational study we observe differences in the explanatory variable and then notice whether these are related to differences in the response variable.
> For example, suppose we wanted to detect the effects of the explanatory variable "smoking during pregnancy" on the response variable "child's IQ at 4 years of age." In an experiment, we would randomly assign half of the mothers to smoke during pregnancy and the other half to not smoke. In an observational study, we would merely record smoking behavior. This example demonstrates why we can't always perform an experiment. (p. 72)

Ainsi n'est-il pas possible de se passer des études observationnelles, qui, sans être des expériences randomisées, peuvent s'en rapprocher beaucoup, comme il en va avec les *études cas-témoin* (*case-control studies*), à propos desquelles l'auteure que nous avons suivie note :

> Case-control studies have become increasingly popular in medical research, and with good reason. Much more efficient than experiments, they do not suffer from the ethical considerations inherent in the random assignment of potentially harmful or beneficial treatments. The purpose of a case-control study is to find out whether one or more explanatory variables are related to a certain disease. For instance, in an example given later in this book, researchers were interested in whether owning a pet bird is related to incidence of lung cancer.
> A case-control study begins with the identification of a suitable number of cases, or people who have just been diagnosed with the disease of interest. Researchers then identify a group of controls, who are as similar as possible to the cases, except that they don't have the disease. To achieve this similarity, researchers often use patients hospitalized for other causes as the controls.

Pour conclure, on situera tout cela dans un large panorama que l'auteur du dictionnaire de psychologie déjà plusieurs fois sollicité commente en ces termes :

> **experiment** Modern scientific psychology prides itself (perhaps a bit self-consciously) on being *experimental*. The intent here is to let it be known that psychological principles are founded on well-controlled and repeatable experiments. In essence, any experiment is an arrangement of conditions or procedures for the purpose of testing some hypothesis. The design of an experiment focuses on: (a) the antecedent conditions themselves, usually referred to as the *independent variables* (or *treatments* or *experimental variables*); and (b) the outcome or results of the experiments, usually called the *dependent variables*. The critical aspect of any experiment is that there be *control* over the independent variables such that cause-and-effect relationships can be discovered without ambiguity.
> There is a tendency to use the adjectival form *experimental* in a broader and looser sense so that it covers casual observations or simple trial procedures that are not always well controlled. This usage is not wrong in any etymological sense, although it should be avoided for it detracts from the rigorous meaning. ⇨ *control* (1), *experimental *design*, *scientific *method*.

b) Là s'arrête le tableau en 17 points que je souhaitais présenter aujourd'hui. La « méthodologie » de la TAD peut être désignée comme méthodologie *clinico-expérimentale* (ou méthodologie *clinique/expérimentale*).

Cette dernière suppose en amont comme en aval une *clinique* des types d'objets – quels qu'ils soient – sur lesquels porte la recherche considérée, et qui permet seule de concevoir et de réaliser des gestes observationnels « purs » ou expérimentaux (au sens large ou au sens fort), dont elle permet de lire et d'interpréter les résultats. La méthodologie clinico-expérimentale de la TAD met en avant plusieurs principes praxéologiques que, pour conclure provisoirement, je rappelle en quelques mots :

1. les objets qu'étudie le chercheur peuvent être des personnes, des institutions ou tout type de productions de l'activité humaine, et en particulier des objets discursifs ou textuels, notamment des « exposés » à propos d'un thème déterminé ;

2. cette méthodologie repose sur la dialectique des études *exploratoires* et des études *confirmatoires* ;

3. dans le moment exploratoire, on manie les hypothèses heuristiques *par défaut* qui énoncent *l'inertie relative des conditions prévalentes* et *la faible variabilité – voire de la quasi-invariance – des conditions étudiées* ;

4. dans la prise d'information relative à des personnes ou des institutions, on s'efforce de faire fonctionner ces médias occasionnels comme des milieux relativement à la question étudiée ;

5. dans l'exploitation de données recueillies par le chercheur ou par autrui, on se restreint le plus possible à celles de ces données qui apparaissent *a priori* comme les moins susceptibles d'altérations liées aux conditions de leur recueil.

c) Tout cela noté, il ne pas oublier que, loin de s'en tenir à des *a priori* raisonnés, ζ doit surtout *analyser les données* recueillies, pour y guetter l'apparition des régularités dont on recherchera alors la confirmation empirique en même temps que l'explication théorique.

UNE RECHERCHE EN COURS

1. Une question de recherche

a) La *théorie de l'enquête* élaborée en TAD a pour objet le destin possible de toute question, où que ce soit. En particulier, cette théorie s'applique aux questions que le chercheur en didactique s'efforce d'étudier. Je prendrai ici un exemple, celui du travail en cours de Julia Marietti. Dans ce qui suit, on se réfère aux « éléments de méthodologie » vus plus haut. Voici d'abord une « grande question » de recherche :

> Étant donné des contraintes *K*, quel ensemble *C* de conditions permettrait, en telle institution ou en tel type d'institutions, le passage du paradigme de la visite des œuvres (PVO) au paradigme de questionnement du monde (PQM) ?

Ici, les « objets » *u* sont des institutions non précisées ; la condition *c* est le fait que, dans *u*, prévale le PQM. En phase exploratoire, la question posée est de type α (voir ci-dessus) : si *u* satisfait *c*, quelles conditions *u* satisfait-elle aussi parmi un ensemble *C* de conditions non précisé (et à préciser). Cette exploration devrait permettre de préciser au moins un ensemble *C* de conditions dont on puisse penser que, si *u* les satisfait, alors *u* satisfera aussi la condition *c*.

b) Pour avancer dans l'étude de la question précédent, on peut étudier la question plus restreinte que voici :

> À quels obstacles la technique didactique de l'enquête se heurte-t-elle dans sa diffusion, sa réception, son implémentation dans le système scolaire et universitaire ? À l'inverse, quels points d'appui peut-elle se trouver ou peut-on lui créer ?

La population **P** est constituée des institutions *u* du « système scolaire et universitaire ». En désignant par *c* la prévalence du PQM et par $\overline{c}$ la prévalence du PVO dans l'institution $u \in \mathbf{P}$, on retrouve la situation exploratoire précédente : si *u* satisfait *c* (respectivement, $\overline{c}$), quelles conditions *u* satisfait-elle aussi parmi un ensemble *C* de conditions à préciser. Dans le premier cas (*c*), les conditions identifiées sont les « points d'appui » de la formulation analysée ; dans le second cas ($\overline{c}$), il s'agit d'obstacles. Bien entendu, il s'agit là encore d'une question très vaste par son objet. La question peut être reformulée ainsi :

> Quelles conditions et contraintes favorisent ou entravent la diffusion, la réception, l'implémentation dans le système scolaire et universitaire de la technique didactique de l'enquête ?

Cette formulation renvoie plus expressément à une étude confirmatoire – une fois du moins que l'étude exploratoire aura dégagé un ensemble de conditions *C* susceptible d'être tel que, si l'institution $u \in \mathbf{P}$ satisfait *C*, elle satisfait aussi la condition *c*.

2. Une population de textes à étudier

a) Il n'est pas déraisonnable, pour étudier la question précédente, de soulever alors la question suivante :

Quelle place occupe le paradigme de questionnement du monde (PQM) dans les textes officiels de l'Éducation nationale ?

Ici, la population **P** est l'ensemble des textes « officiels » rendus publics par le ministère de l'Éducation nationale ; la condition *c* étudiée est le fait que ces textes fassent « une place » au PQM. Bien entendu, on ne peut guère espérer définir le corpus « complet » de ces textes. Dans le cas du PQM, on peut par exemple commencer par étudier une première sous-population $\mathbf{P}_1$ formée des textes officiels relatifs *aux TPE*. Pour constituer un échantillon **E** de $\mathbf{P}_1$, on peut aller sur la page du site Eduscol intitulée « Travaux personnels encadrés Textes de référence » et examiner les textes qui s'y trouvent mentionnés (http://eduscol.education.fr/cid46455/textes-de-reference.html) :

Modalités de l'épreuve et cadrage pédagogique

Définition des modalités de l'épreuve de TPE au baccalauréat

- Note de service n°2005-174 du 2 novembre 2005, parue au BO N°41 du 10 novembre 2005

Indications de cadrage pédagogique pour les TPE

- Note de service n°2005-166 du 20 octobre 2005, parue au BO n°39 du 27 octobre 2005

Statut des TPE en tant qu'épreuve obligatoire anticipée

- Arrêté du 29 juillet 2005, paru au BO n°31 du 1er septembre 2005

Thèmes

Thèmes de TPE pour les années scolaires 2008-2009 et 2009-2010

- Note de service n°2008-073 du 4-6-2008, publiée au BO n°25 du19 juin 2008

Thèmes de TPE pour les années scolaires 2006-2007 et 2007-2008

- Note de service N°2006-077 du 25-4-2006, publiée au BO n°18 du 4 mai 2006

Questions de responsabilité

Organisation des travaux personnels encadrés

- Circulaire N°2001-007 du 8 janvier 2000, parue au BO n°2 du 11 janvier 2001

Comme on le voit, cet ensemble ne contient jamais que *six* textes. *En synchronie*, c'est là tout ce que dit l'Éducation nationale sur les TPE : ce petit corpus est donc *institutionnellement significatif*. *En diachronie*, toutefois, il convient de l'augmenter au moins des textes auxquels ces six textes renvoient explicitement. C'est ainsi que le premier d'entre eux commence par le développement que voici :

> La présente note de service [...] annule et remplace les dispositions de la note de service n° 2002-260 du 20 novembre 2002 parue au B.O. n° 44 du 28 novembre 2002.

Si l'on se reporte à la « note de service n° 2002-260 du 20 novembre 2002 parue au B.O. n° 44 du 28 novembre 2002 », on découvrira que celle-ci commence ainsi :

> La présente note de service [...] annule la note de service n° 2002-018 du 29 janvier 2002 parue au B.O. n° 6 du 7 février 2002.

Quant à la « note de service n° 2002-018 du 29 janvier 2002 parue au B.O. n° 6 du 7 février 2002 », on découvrira qu'elle « annule et remplace la note de service n° 2001-180 du 19 septembre 2001 parue au BO n° 35 du 27 septembre 2001 »... La régression n'est évidemment pas terminée. Une certaine connaissance « clinique » du système de production et d'archivage des textes de l'Éducation nationale conduit en fait à un corpus incluant tous les textes déjà rencontrés : il suffit pour cela de se connecter au site *Mentor* (à partir de la page Web intitulée « Le bulletin officiel », dont l'adresse est la suivante : http://www.education.gouv.fr/pid285/le-bulletin-officiel.html), et de taper la requête **Travaux personnels encadrés** dans la boîte de recherche proposée. Réalisée le 10 mai 2010, cette recherche ramène une liste de 53 textes, qui constituent un échantillon $\mathbf{E}_1$ sur lequel travailler.

b) Quelles informations recueillir sur l'échantillon $\mathbf{E}_1$ des 53 textes pour répondre à la question posée – celle de la place du PQM dans ces textes ? Pour répondre, un travail spécifique est à faire sur la condition *c* retenue. Ce travail suppose une *lecture inventoriante* des textes du corpus, lecture dont certains étudiants ont tendance à se dispenser lorsqu'ils cèdent à ce mal endémique qu'est la *paresse clinique* mais qui est un « geste » indispensable pour interroger le corpus réuni. Si, par exemple, on lit la « note de service n°2005-174 du 2 novembre 2005, parue au BO N°41 du 10 novembre 2005 », on y verra apparaître le mot « problématique » et, mieux encore, l'expression « *réponse* à la problématique », soit un matériel linguistique dont on a suggéré, lors de la séance précédente de ce séminaire, qu'il était un « symptôme » (ambigu) de la poussée du PQM dans la culture scolaire. Bien entendu, on observera encore, sur ce seul texte, la présence nettement majoritaire du mot « production » pour désigner ce que les équipes d'élèves ont à réaliser (des techniques de comptage très simples permettent de s'assurer que « problématique » et « réponse » n'apparaissent qu'une fois dans le texte, tandis que « production » y a 6 occurrences). On peut alors définir sur $\mathbf{P}_1$ cinq variables entières X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 qui sont respectivement le nombre d'occurrences dans un texte $u \in \mathbf{P}_1$ des cinq mots

« production », « problématique », « réponse », « question », « problème », en ne retenant toutefois que les occurrences de ces mots dont le sens est celui évoqué lors de la séance précédente de ce séminaire. Le tableau ci-après [à vérifier et à compléter] fournit les valeurs de ces cinq variables sur les 53 textes de $\mathbf{E}_1$.

Texte	Production	Problématique	Réponse	Question	Problème
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	6	1	1	0	0
10	2	2	0	0	0
11	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0
18	2	0	0	1	1
19	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0
23	2	0	0	1	1
24	6	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	?
27	0	0	0	0	0
28	11	0	0	0	0
29	0	0	0	0	?
30	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0
33	?	?	?	?	?
34	0	0	0	0	0
35	6	0	0	0	0

36	0	0	0	0	0
37	6	0	0	0	0
38	4	1	0	0	0
39	0	0	0	2	1
40	2	0	0	0	0
41	1	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0
45	0	1	0	3	2
46	0	1	0	2	2
47	0	0	0	0	0
48	1	0	0	0	0
49	0	0	0	1	0
50	0	0	0	0	0
51	0	0	0	0	0
52	0	0	0	0	0
53	0	0	0	0	0
Total	49	3	0	8	5

b) Le premier point à noter sans doute est la *rareté* de ces mots dans le corpus : seuls 22 textes comportent au moins une occurrence de l'un au moins des cinq mots. Les décomptes indiqués dans la dernière ligne du tableau précédent se laissent résumer ainsi :

Production >> question > problème > problématique > réponse

Si simples soient-ils, ces « résultats » ne sont pas dénués de surprises, qu'il conviendrait d'analyser (on ne s'attendait pas forcément à voir *question* au-dessus de *problématique* par exemple) et cela en revenant aux 22 textes mis en évidence dans le sous-tableau suivant :

Texte	Production	Problématique	Réponse	Question	Problème
9	6	1	1	0	0
10	2	2	0	0	0
18	2	0	0	1	1
23	2	0	0	1	1
24	6	0	0	0	0
26	0	0	0	0	?
28	11	0	0	0	0
29	0	0	0	0	?
33	?	?	?	?	?
35	6	0	0	0	0

37	6	0	0	0	0
38	4	1	0	0	0
39	0	0	0	2	1
40	2	0	0	0	0
41	1	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0
45	0	1	0	3	2
46	0	1	0	2	2
48	1	0	0	0	0
49	0	0	0	1	0

c) L'extraction du type d'information précédent présente pour le chercheur ou l'apprenti chercheur, sous le rapport de la « paresse clinique », un double danger. Dans un sens, cette extraction peut être réalisée sans jamais *lire* les textes : il suffit d'utiliser la fonction de recherche du navigateur et de lire le contexte immédiat des occurrences ainsi repérées pour s'assurer que celles-ci doivent bien être comptées. En sens inverse, lire les textes *ne remplace pas* ce travail d'extraction. En fait, l'information extraite conduit en règle générale *à revenir aux textes* du corpus, par exemple pour examiner les textes signalés comme « intéressants » par le tableau précédent. D'une façon générale, l'idée d'*attention* clinique, de *souci* clinique à l'endroit des « objets » – humains ou non humains – que l'on peut avoir à interroger dans l'étude d'une question donnée, est fondamentale. On peut par exemple, en se fiant au tableau ci-dessus, se demander ce que sont les textes 45 et 46, qui ont des profils très voisins et contiennent les mots « question » et « problème » ainsi que « problématique » : on découvrira qu'il s'agit de textes gouvernant en fait les « Travaux d'initiative personnelle encadrés » en CPGE, et non à proprement parler les TPE ; et on pourra vérifier qu'il en va de même du texte 23. On laissera le lecteur tirer, s'il le souhaite, de plus amples conclusions du petit travail ébauché ici.

d) Dans l'étude de la place du PQM dans les textes officiels de l'Éducation nationale, d'autres corpus seraient à définir et à étudier – par exemple à propos des *Itinéraires de découverte* (IDD). On pourrait aussi imaginer d'avoir des entretiens avec des responsables de niveau académique en charge du dossier des TPE et des IDD par exemple. On rencontrerait alors une difficulté classique, celle consistant en une substitution d'objet plus ou moins subreptice : au lieu de messages adressés aux professeurs à propos des TPE, on recueillerait des messages adressés *à l'interviewer*, ce qui n'est pas le but de l'enquête. Lorsqu'on étudie le corpus des 53 textes du point de vue des réponses qu'il peut contenir à une certaine question (« Quelle place

occupe le paradigme de questionnement du monde dans les textes officiels de l'Éducation nationale ? »), on étudie bien l'Éducation nationale comme média s'adressant, sur le sujet des TPE, aux professeurs et responsables du système scolaire (recteurs, inspecteurs d'académie, chefs d'établissement, etc.), et non comme s'adressant, par exemple, à un chercheur ζ déterminé. Si ζ interroge un enseignant ayant à encadrer des TPE sur le vocabulaire qu'il utilise (parle-t-il de problématique ? De question ? De problème ?), il l'interpelle en tant que média s'adressant *à lui, le chercheur*, à propos même de ce que le chercheur désire connaître, ce qui risque fort d'altérer la fonction de milieu que ζ entend faire jouer à ce professeur. Un tel interrogatoire n'est pas inutile, mais à condition que ζ sache repérer ce qui, dans les « messages » émis par l'interviewé, est authentiquement réponse d'un milieu à la question étudiée. À nouveau, donc, il est à la fois davantage possible (cela demande deux ou trois clics) et plus fiable de passer par *les textes produits par ces responsables académiques à l'adresse des professeurs*. C'est ainsi que, dans le cas de l'académie d'Aix-Marseille, on découvrira, en matière de TPE, une présentation ancrée à nette distance du PQM (http://www.tpe.ac-aix-marseille.fr/academie/cadrage_aca.htm) : on y lit ainsi qu'un TPE suppose le « choix d'un *sujet* » et appelle une « *production* finale » dont il est requis seulement qu'elle soit « pertinente par rapport au sujet choisi », toutes exigences entièrement compatibles avec l'essayisme scolaire traditionnel.

3. La co-présence du PVO et du PQM

a) Au-delà des *textes*, nationaux ou « académiques », adressés aux responsables et aux professeurs, on a envisagé de se tourner vers la population **P** des chercheurs sur l'enseignement des mathématiques *ayant eu un contact avec la théorie et la pratique des PER* pour l'interroger directement. Un questionnaire a ainsi été diffusé pour recueillir les déclarations faites, en réponse à quelques questions, par un échantillon **E** en fait très réduit de chercheurs ou de « noosphériens ». On peut interroger les fragments de textes ainsi rassemblés pour y examiner la condition *c* qui est réalisée si on y aperçoit la co-présence d'expressions relevant du PQM (à côté d'expressions relevant du PVO). À titre d'illustration, voici quatre fragments de réponses à l'une des questions proposées : on laissera le lecteur réfléchir à une façon de procéder pour établir si la condition *c* y est ou non réalisée.

> **Question.** Qu'est-ce pour vous, actuellement, qu'un PER ?
> **Réponses. 1.** Pour moi, un PER est un parcours qui permet aux élèves de découvrir différentes notions mathématiques à travers la recherche de réponses à des questions. L'objectif est de se poser avec les élèves une

question, et d'explorer (dans la limite du raisonnable…) les différentes notions mathématiques qui peuvent se présenter lors des investigations.
2. Un parcours d'étude et de recherche, c'est-à-dire comme point de départ une question génératrice puis plusieurs activités mathématiques (étalées dans le temps, éventuellement sur plusieurs années) qui permettent d'avancer dans la problématique en répondant à des sous-questions.
3. C'est une organisation didactique visant à faire rencontrer aux élèves des savoirs et savoir-faire au programme d'un niveau scolaire donné, selon les principes suivants :
– une question est le fil conducteur du PER ;
– certains savoirs & savoir-faire au programme constituent des réponses à cette question ;
– le PER est balisé par des étapes, moments obligés : les AER, qui révèlent une certaine technique permettant de répondre partiellement à la question.
A priori les PER pourraient exister indépendamment des programmes scolaires, étant basés sur des notions mathématiques. Mais leur viabilité en classe est conditionnée aux contenus des programmes, qui ne sont pas du tout écrits dans cette optique…
4. C'est un scénario d'enseignement éventuel, contrôlé épistémologiquement, et se déroulant sur une assez longue durée. Par contre, le contrôle didactique des PER que j'ai pu regarder m'a paru assez faible.

b) Le travail d'analyse à conduire sur de telles déclarations rappelle celui mis en œuvre dans l'enquête dont un compte rendu a été présenté lors de la séance précédente de ce séminaire sur les courriels d'un échantillon **E** de la population **P** des étudiants inscrits à l'UE « Éducation au développement durable ». Dans ce cas, le prélèvement de l'information, inconnu des étudiants concernés (contrairement à ce qui se passe dans le cas précédent), ne paraît pas avoir été de nature à altérer l'expression « ordinaire » de ces étudiants dans leur commerce épistolaire avec la responsable de l'UE. En outre, la succession de courriels marqués par le *mode d'étude rétroactif* – un, puis deux, puis trois, etc. – peut conduire à penser que l'on tient là un quasi-invariant des « objets » examinés. Bien entendu, on doit toujours se demander si, en ce cas, **E** est représentatif de **P**, même si cela paraît ici hautement vraisemblable.

4. Le destin des questions

a) Rappelons la question de recherche posée plus haut :

> Quelles conditions et contraintes favorisent ou entravent la diffusion, la réception, l'implémentation dans le système scolaire et universitaire de la technique didactique de l'enquête ?

Il est alors une question engendrée que l'on peut décider d'examiner en lien avec la problématique du « destin des questions » évoquée lors de la séance précédente de ce séminaire :

> Quelles conditions et contraintes favorisent le fait que telle question soit formulée, puis étudiée assez longuement, au lieu soit de n'être jamais formulée, soit d'être formulée et presque immédiatement abandonnée ?

Une première enquête pourra passer par la construction d'un corpus de *comptes rendus d'enquêtes* publics ainsi que de documents auxiliaires, corpus dont chaque « individu » – c'est-à-dire *chaque compte rendu d'enquête* – sera interrogé, relativement à la condition *c* réalisée lorsque l'étude d'une question y a été menée assez loin, sur les conditions réalisées parmi un ensemble *C* de conditions à préciser. En l'espèce, il semble que le travail clinique ne puisse guère progresser qu'à travers une série d'*études de cas*. L'un de ces cas est par exemple le compte rendu d'enquête qu'un psychologue suisse, Adrian Bangerter, a publié en 2008 à propos de la diffusion et de la persistance de croyances touchant à ce qu'on a nommé « l'effet Mozart » (*La diffusion des croyances populaires, le cas de l'effet Mozart*, PUG, 2008 ; voir par exemple l'article "Mozart effect" de *Wikipedia*) : on devra donc interroger le texte de l'auteur à propos de ce qui a conduit celui-ci à se poser cette question et à l'étudier assez avant pour en faire un livre. (Sur cet auteur, voir le site http://www3.unine.ch/adrian.bangerter.) Bien entendu, on rencontrera ici la difficulté, sans doute significative de la place du PQM dans la société, à allonger la liste des études de cas possibles.

b) Une deuxième enquête à propos du destin des questions porte sur ce type d'objets que sont les comptes rendus de visites auprès de professeurs stagiaires de mathématiques. La condition *c* étudiée peut être *par exemple* celle qui est réalisée si au plus une question sur trois qui naît au cours de la séance y est laissée à l'abandon. Comme on l'a vu déjà plusieurs fois, l'étude exploratoire doit suggérer quelles conditions sont en même temps réalisées, parmi un ensemble de conditions *C* à préciser.

c) Une troisième enquête portera sur la population des séances de l'atelier « Enquêtes sur Internet » du collège Vieux Port, atelier dont j'ai déjà parlé dans ce séminaire et dont le contenu des séances nous est connu à travers plusieurs outils de prise d'information. Les conditions *c* successivement ou simultanément examinées porteront sur le destin tant des questions officiellement étudiées dans l'atelier que de celles surgissant – fût-ce de façon labile – au cours de leur étude.

5. Enquêtes *in vivo*

a) Comme on l'a dit, on peut étudier la naissance et la vie de l'enquête sur une question à partir de comptes rendus d'enquête constitués par ailleurs, *indépendamment de la question de recherche évoquée ici*, comme il en va pour l'ouvrage d'Adrian Bangarter évoqué plus haut. Mais on peut aussi étudier des enquêtes menées *à la demande du chercheur*, selon un scénario accepté par l'enquêteur et amenant celui-ci à fournir certaines informations qu'il consigne de façon régulière dans un « cahier de bord ».

b) Dans l'hypothèse où le nombre d'enquêteurs serait assez grand, on pourra envisager de… randomiser l'expérience, certains enquêteurs ayant à choisir par eux-mêmes la question à étudier, d'autres se voyant imposer par le chercheur une question déterminée.

c) Selon le même protocole, le chercheur lui-même devrait en outre conduire une enquête au moins.

UNE QUESTION, DES ENQUÊTES

1. Naissance d'une question

a) Un collègue enseignant la méthodologie aux étudiants de sciences de l'éducation me disait récemment qu'il n'arrivait pas à être clair, dans son enseignement, à propos de la notion de *degré de liberté* évoquée à propos du test du χ^2. Il ajoutait que, sans doute, cela tenait au fait que lui-même n'avait pas sur ce point de vue bien claire, ce qui est d'une rare sagesse ! Cette confidence avait été suscitée, semble-t-il, par le fait que, étant assis à côté de moi au cours d'une réunion, il m'avait vu feuilleter un petit ouvrage intitulé *L'enquête et ses méthodes : L'analyse de données quantitatives* signé d'Olivier Martin (Armand Colin, 2009).

b) Je voudrais ici lancer un appel dont j'espère qu'il pourra être entendu par au moins *quelques* personnes, qui, en conséquence, enquêteraient, dans les semaines qui viennent, par exemple d'ici l'ultime séance de ce séminaire 2009-2010, à propos de la question suivante :

> Question *Q*. Que peut-on faire, y compris au plan mathématique, pour faire entendre [à des étudiants de SHS] ce qu'est et ce que signifie la notion de degré de liberté introduite à propos du test du χ^2 ?

En fait, l'enquête demandée doit porter exclusivement sur les réponses $R^{\lozenge}$, explicites ou implicites, existant dans la « littérature » à cette question *Q*. Le « cahier des charges » que chaque enquêteur ou enquêtrice devra respecter implique essentiellement de tenir un *cahier de bord* dont lequel sera inscrit tout « geste » accompli dans la perspective de cette enquête. Au travail !

That's all, folks!

UMR ADEF

JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

Théorie Anthropologique du Didactique
& Ingénierie Didactique du Développement

There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-)

Ceux qui prennent le port en long au lieu de le prendre en travers. Marcel Pagnol (1895-1974)

Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ». Ce séminaire a, solidairement, une double ambition : d'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel ; d'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques. Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.

La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer. Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.

➔ Séance 8 – Vendredi 2 juillet 2010

ENQUÊTER

1. « Démarche d'investigation »

a) Lorsqu'on travaille en didactique de l'enquête, lorsque, en particulier, on prétend étudier le destin des questions qui parviennent à se formuler en telle ou telle institution (ce qui, par définition, « lance » une enquête et « ouvre » un parcours d'étude et de recherche), on ne peut que se demander ce qu'il en est de la « démarche d'investigation » que promeut le ministère de l'Éducation nationale français dans le cadre des programmes du collège. Celles-ci fait son apparition officielle, m'a-t-il semblé, dans le *Bulletin officiel de l'Éducation nationale* nº 5 hors série daté 25 août 2005, dans l'annexe I intitulée « Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques »

(ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2005/hs5/annexe1.pdf). Elle réapparaît, dans les mêmes termes, dans le *Bulletin officiel* spécial nº 6 du 28 août 2008, toujours dans la partie commune aux mathématiques, à la physique-chimie, aux sciences de la vie et de la terre et à la technologie, dont le sommaire est le suivant (http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf) :

I. La culture scientifique et technologique acquise au collège
II. Le socle commun de connaissances et de compétences
III. La démarche d'investigation
IV. La place des technologies de l'information et de la communication
V. Les thèmes de convergence
VI. Utilisation d'outils de travail en langue étrangère

Voici maintenant le texte intégral de la section III :

III. LA DÉMARCHE D'INVESTIGATION

Dans la continuité de l'école primaire, les programmes du collège privilégient pour les disciplines scientifiques et la technologie une démarche d'investigation. Comme l'indiquent les modalités décrites ci-dessous, cette démarche n'est pas unique. Elle n'est pas non plus exclusive et tous les objets d'étude ne se prêtent pas également à sa mise en œuvre. Une présentation par l'enseignant est parfois nécessaire, mais elle ne doit pas, en général, constituer l'essentiel d'une séance dans le cadre d'une démarche qui privilégie la construction du savoir par l'élève. Il appartient au professeur de déterminer les sujets qui feront l'objet d'un exposé et ceux pour lesquels la mise en œuvre d'une démarche d'investigation est pertinente.

La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre.

Repères pour la mise en œuvre

1. Divers aspects d'une démarche d'investigation

Cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de

problèmes (en mathématiques). Les investigations réalisées avec l'aide du professeur, l'élaboration de réponses et la recherche d'explications ou de justifications débouchent sur l'acquisition de connaissances, de compétences méthodologiques et sur la mise au point de savoir-faire techniques.
Dans le domaine des sciences expérimentales et de la technologie, chaque fois qu'elles sont possibles, matériellement et déontologiquement, l'observation, l'expérimentation ou l'action directe par les élèves sur le réel doivent être privilégiées.
Une séance d'investigation doit être conclue par des activités de synthèse et de structuration organisées par l'enseignant, à partir des travaux effectués par la classe. Celles-ci portent non seulement sur les quelques notions, définitions, résultats et outils de base mis en évidence, que les élèves doivent connaître et peuvent désormais utiliser, mais elles sont aussi l'occasion de dégager et d'expliciter les méthodes que nécessite leur mise en œuvre.

2. Canevas d'une séquence d'investigation

Ce canevas n'a pas la prétention de définir « la » méthode d'enseignement, ni celle de figer de façon exhaustive un déroulement imposé. Une séquence est constituée en général de plusieurs séances relatives à un même sujet d'étude.
Par commodité de présentation, sept moments essentiels ont été identifiés. L'ordre dans lequel ils se succèdent ne constitue pas une trame à adopter de manière linéaire. En fonction des sujets, un aller et retour entre ces moments est tout à fait souhaitable, et le temps consacré à chacun doit être adapté au projet pédagogique de l'enseignant.
Les modes de gestion des regroupements d'élèves, du binôme au groupe-classe selon les activités et les objectifs visés, favorisent l'expression sous toutes ses formes et permettent un accès progressif à l'autonomie.
La spécificité de chaque discipline conduit à penser différemment, dans une démarche d'investigation, le rôle de l'expérience et le choix du problème à résoudre. Le canevas proposé doit donc être aménagé pour chaque discipline.

Le choix d'une situation-problème :

– analyser les savoirs visés et déterminer les objectifs à atteindre ;
– repérer les acquis initiaux des élèves ;
– identifier les conceptions ou les représentations des élèves, ainsi que les difficultés persistantes (analyse d'obstacles cognitifs et d'erreurs) ;
– élaborer un scénario d'enseignement en fonction de l'analyse de ces différents éléments.

L'appropriation du problème par les élèves :

Les élèves proposent des éléments de solution qui permettent de travailler sur leurs conceptions initiales, notamment par confrontation de leurs éventuelles divergences pour favoriser l'appropriation par la classe du problème à résoudre.

L'enseignant guide le travail des élèves et, éventuellement, l'aide à reformuler les questions pour s'assurer de leur sens, à les recentrer sur le problème à résoudre qui doit être compris par tous. Ce guidage ne doit pas amener à occulter ces conceptions initiales mais au contraire à faire naître le questionnement.

La formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles :

– formulation orale ou écrite de conjectures ou d'hypothèses par les élèves (ou les groupes) ;
– élaboration éventuelle d'expériences, destinées à tester ces hypothèses ou conjectures ;
– communication à la classe des conjectures ou des hypothèses et des éventuels protocoles expérimentaux proposés.

L'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves :

– moments de débat interne au groupe d'élèves ;
– contrôle de l'isolement des paramètres et de leur variation, description et réalisation de l'expérience (schémas, description écrite) dans le cas des sciences expérimentales, réalisation en technologie ;
– description et exploitation des méthodes et des résultats ; recherche d'éléments de justification et de preuve, confrontation avec les conjectures et les hypothèses formulées précédemment.

L'échange argumenté autour des propositions élaborées :

– communication au sein de la classe des solutions élaborées, des réponses apportées, des résultats obtenus, des interrogations qui demeurent ;
– confrontation des propositions, débat autour de leur validité, recherche d'arguments ; en mathématiques, cet échange peut se terminer par le constat qu'il existe plusieurs voies pour parvenir au résultat attendu et par l'élaboration collective de preuves.

L'acquisition et la structuration des connaissances :

– mise en évidence, avec l'aide de l'enseignant, de nouveaux éléments de savoir (notion, technique, méthode) utilisés au cours de la résolution,
– confrontation avec le savoir établi (comme autre forme de recours à la recherche documentaire, recours au manuel), en respectant des niveaux de formulation accessibles aux élèves, donc inspirés des productions auxquelles les groupes sont parvenus ;
– recherche des causes d'un éventuel désaccord, analyse critique des expériences faites et proposition d'expériences complémentaires,
– reformulation écrite par les élèves, avec l'aide du professeur, des connaissances nouvelles acquises en fin de séquence.

La mobilisation des connaissances :

– exercices permettant d'automatiser certaines procédures, de maîtriser les formes d'expression liées aux connaissances travaillées : formes langagières ou symboliques, représentations graphiques… (entraînement), liens ;
– nouveaux problèmes permettant la mise en œuvre des connaissances acquises dans de nouveaux contextes (réinvestissement) ;
– évaluation des connaissances et des compétences méthodologiques.

b) La question cardinale que ce texte soulève me semble être celle-ci : dans quelles conditions y suppose-t-on qu'une question est formulée, dans une classe, comme *question d'étude et de recherche* ; et quel destin donne-t-on alors à une telle question ? Je ne ferai ici que quelques remarques rapides. Ce qui est frappant d'abord, c'est que la « démarche d'investigation » se situe *à l'intérieur du paradigme de la visite des œuvres*, tout en pointant vers le paradigme de questionnement du monde. Si on l'assimile à une enquête, ainsi, une « investigation » est une enquête *praxéologiquement finalisée*, comme le montre le « moment » du « choix d'une situation-problème », qui part de l'analyse des « savoirs visés » en vue de « déterminer les objectifs à atteindre ». On aura noté aussi, s'agissant du moment relatif à « l'acquisition et la structuration des connaissances », que les « nouveaux éléments de savoir (…) utilisés au cours de la résolution » y sont mis en « confrontation avec le savoir établi », lequel apparaît ainsi (a) bien défini, et (b) non problématique en lui-même (sinon pour l'élève). On est là au cœur de la fiction sur laquelle roule le système ancien, où « le » savoir tient lieu de repère absolu, privilégié, bien qu'il constitue une réalité insaisissable, réputée toutefois être fermement du côté du *magister* et de l'institution mandante.

c) Il est une autre fiction au cœur du système ancien, que le patron de la « démarche d'investigation » semble avoir fait sienne. Tout se passe comme si, devant une question Q, on disposait fréquemment – sinon toujours – des œuvres O_{n+1}, …, O_m permettant d'élaborer en autonomie une réponse $R^{\heartsuit}$ et de la valider, et cela sans avoir jamais recours à la « littérature » spécifique du sujet. Il s'agit, là, certes, d'une situation limite, et qui peut advenir ! Mais ce n'est nullement la règle : si l'on se réfère au schéma herbartien

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrow \{\,R_1^{\diamondsuit},\, R_2^{\diamondsuit},\, \ldots,\, R_n^{\diamondsuit},\, O_{n+1},\, \ldots,\, O_m\,\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit},$$

l'usage est d'aller interroger les réponses $R_1^{\diamondsuit}$, $R_2^{\diamondsuit}$, …, $R_n^{\diamondsuit}$ existantes et accessibles, même si $R^{\heartsuit}$ doit se construire finalement *contre* ces réponses. Mais surtout, la fiction tient en cela que l'on pourrait, en un laps de temps réduit, fabriquer *ab ovo* une réponse $R^{\heartsuit}$, sans nourrir sa construction de matériaux trouvés dans la culture, donc à la seule force d'une raison

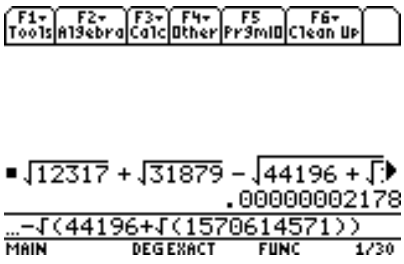
démonstrative et expérimentale supposée émancipée des aléas de l'histoire de la culture. Ainsi, les mêmes qui diront qu'une formation mathématique, ou physique, ou biologique est une longue affaire prétendront qu'on peut faire quasi instantanément des travaux de mathématiques, de physique ou de biologie, par l'emploi extemporané, à faible coût en termes d'étude, des outils idoines. Ce paradoxe renvoie, me semble-t-il, à une vraie difficulté, la maîtrise de la *dialectique entre étude et recherche*, dont le souci est inscrit dans l'expression même de « parcours d'étude et de recherche ».

d) Comme souvent, en revenant à des clichés éculés mais toujours fonctionnels, le texte examiné trop rapidement ici conforte – au lieu de la réduire – la discontinuité entre sciences expérimentales d'un côté et mathématiques de l'autre, réaffirmant au passage l'antique partage scolaire des « spécialités » (regardées souvent comme exclusives), « expérimentation » pour les premières, « démonstration » pour les secondes, ou encore, de façon intimement corrélée, l'ontologie spontanée qui oppose « le monde réel » et le monde mathématique qui, donc, ne serait pas « réel », même s'il ne laisse pas de résister à l'effort humain (ce qu'une certaine idéologie de l'enseignement des mathématiques tend à oublier, pour son malheur).

e) Je souligne que la « démarche d'investigation », qui, semble-t-il, fait actuellement florès en physique-chimie, concerne aussi les mathématiques. Voyez (nous en reparlerons) ce qui se trouve là-dessus à l'adresse http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=882 ou à l'adresse http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/UE2007/UE_2007_Internet.htm.

2. Enquêtes « mathématiques »

a) Voici une question de mathématiques élémentaires (dont l'origine se devinera) : quelle est la valeur de l'expression $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c + \sqrt{d}}$ pour a = 12317, b = 31879, c = 44196, d = 1570614571 ? Aujourd'hui (car il en eût été autrement vers 1960 encore), dira-t-on peut-être, l'enquête se termine à peine commencée ! Il suffira en d'effet d'interroger ce système « adidactique » qu'est une calculatrice et on aura par exemple ceci :



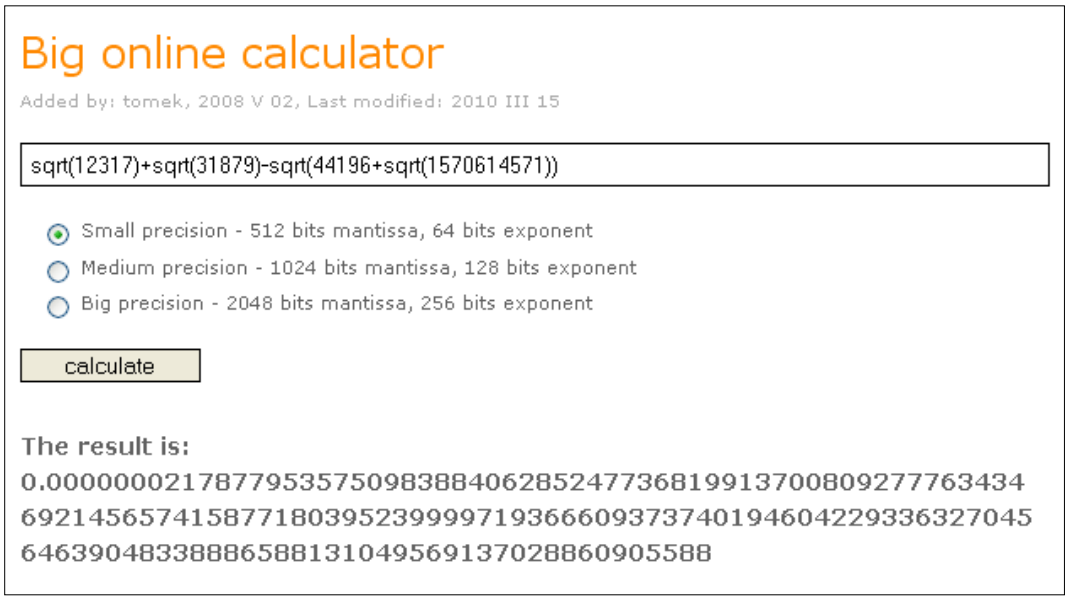
On aurait donc : $\sqrt{12317} + \sqrt{31879} - \sqrt{44196 + \sqrt{1570614571}} = 2{,}17\ldots \cdot 10^{-8}$. En un tel cas, un certain habitus scolaire nous pousse de façon peu réaliste à ne consulter qu'un unique système adidactique. Pourtant, même en supposant de tels systèmes toujours « équivalents » (donnant les mêmes valeurs), ce qu'ils ne sont pas, nous ne sommes pas sûrs d'avoir *adéquatement interrogé* tel ou tel système adidactique ni *fidèlement entendu* sa réponse. Il n'est donc pas inutile de multiplier les « consultations ». Interrogée à propos de la valeur de l'expression $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c + \sqrt{d}}$, la calculatrice de l'ordinateur, ainsi, fait cette réponse :

2,178779535750983884062852476 1634e-8.

Mais surprise ! Si l'on effectue le calcul différemment, elle peut afficher ceci

2,178779535750983884062852476 6256e-8

ou encore cela : 2,178779535750983884062852476629e-8. Que croire ? Le *Big online calculator* fournit ceci, qui est en désaccord avec les trois résultats précédents :



Il y a là un problème de désaccord que je laisserai le lecteur examiner pour son propre compte s'il le souhaite. Je voudrais seulement souligner ceci : dans l'espace de la classe, le « milieu » suprême, *c'est le professeur*. C'est lui qui confirmera à l'élève qui a trouvé (en l'espèce) que l'on aurait

$$\sqrt{12317} + \sqrt{31879} - \sqrt{44196 + \sqrt{1570614571}} = 2{,}17\ldots \cdot 10^{-8}$$

que son résultat est bien *correct*. Le problème du contrôle du résultat est ainsi *pédagogiquement neutralisé*, c'est-à-dire *annulé comme problème*. Et il en va de même de bien d'autres « résultats ». Je ne vois pas pourquoi, dans la pratique de la « démarche d'investigation » questionnée plus haut, l'habitus scolaire qui fait du professeur le *succédané universel de la culture* cèderait si peu que ce soit. Ce n'est qu'en s'appuyant sur cet habitus que l'on peut feindre d'aller *directement* à la réponse $R^{\heartsuit}$, par démonstration et/ou expérimentation, sans passer aucunement par la littérature sur le sujet.

b) Vous aurez peut être observé que l'on a 12317 + 31879 = 44196, c'est-à-dire $a + b = c$. Que faire pour s'en assurer ? On peut recourir à la technique d'addition scolaire mise en œuvre ci-après :

$$\begin{array}{r} 12317 \\ 31879 \\ \hline 44196 \end{array}$$

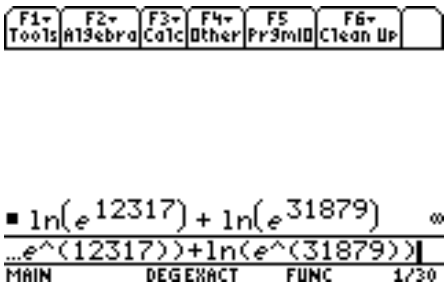
On peut aussi procéder ainsi qu'on le voit ici : 12317 + 31879 = (12320 – 3) + (31880 – 1) = (12320 + 31880) – 4 = (12300 + 31900) – 4 = (12000 + 32000) – 4 + 200 = 44000 + 200 – 4 = 44196. On pourrait encore procéder ainsi : 12317 + 31879 = $1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 3 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 9 \times 10^0 = 4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 11 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 16 \times 10^0 = 4 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0 = 44196$. Supposons que, pour quelque raison, on ne croie pas à la réponse ainsi « vérifiée ». On peut imaginer faire des manipulations plus « complexes », par exemple en utilisant la formule

$$a + b = ab\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Sur la feuille de calcul Excel reproduite ci-après, on a saisi les entiers a = 12317 et b = 31879 respectivement en A1 et A2, on a fait calculer le produit ab en A3, les inverses $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ respectivement en B1 et B2, leur somme $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ en B3, et le produit de ab avec $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ en C3 : à nouveau, on obtient que c = 44196.

	A	B	C	D
1	12317	8,11886E-05		
2	31879	3,13686E-05		
3	392653643	0,000112557	44196	
4				
5				

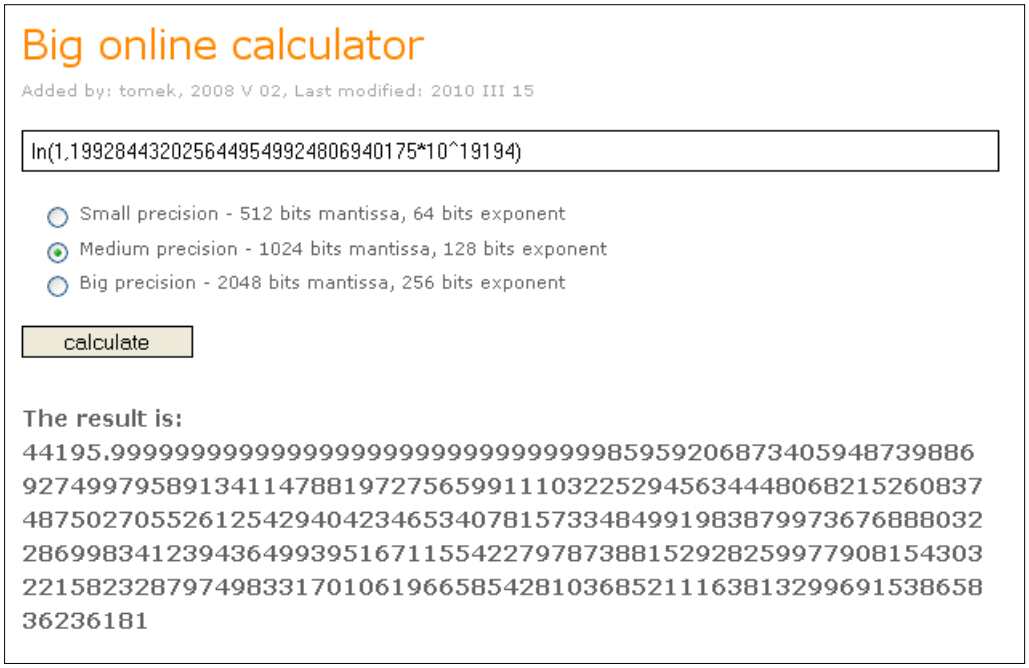
On peut encore effectuer la vérification suivante : si c = 44196, on doit avoir c – 196 = 44000 ; or il vient : 12317 + 31879 – 196 = 12301 + 31879 = 12300 + 31800 – 100 = 12200 + 31800 = 12000 + 32000 = 44000. On reçoit ainsi chaque fois la même « réponse » du système numérique étudié : c = 44196. Bien entendu, certaines manipulations expérimentales « risquées » peuvent échouer. Par exemple, l'utilisation de la formule $\ln(e^a \times e^b) = a + b$ conduit à ceci sur telle calculatrice :



Ici, l'expérience réalisée, avec les moyens employés, n'a pas réussi à faire parler l'expression c. Il en va autrement si l'on emploie la calculatrice de l'ordinateur, qui affiche ceci pour $e^a \times e^b$:

1,19928443202564495499248069401 75e+19194.

Le logarithme népérien du nombre *calculé* par la calculatrice, tel que le fournit cette même calculatrice, est bien 44196. Le *Big online calculator*, lui, donne ce qui suit pour la valeur *affichée* :



Tout cela a pour but de suggérer que le rôle du professeur dans les contrats didactiques dominants simplifie grandement les situations étudiées, au point de les dénaturer comme objets d'étude et de recherche. Il y a là un obstacle majeur à la construction d'une « pédagogie de l'enquête » dans un monde scolaire façonné par le paradigme de la visite des œuvres, obstacle dont le dépassement porte un nom : celui de *dialectique des médias et des milieux*.

3. Un obstacle caché mais récurrent

a) Revenons une fois de plus au schéma herbartien :

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrow \{\, R^{\diamondsuit}_1,\, R^{\diamondsuit}_2,\, \ldots,\, R^{\diamondsuit}_n,\, O_{n+1},\, \ldots,\, O_m \,\}] \rightarrow R^{\heartsuit}.$$

Nous avons noté que la recherche et l'étude des réponses $R^{\diamondsuit}$ n'est pas le fort de l'éducation intellectuelle scolaire, puisque de telles réponses sont *a priori* disqualifiées par le supposé « savoir établi ». Je voudrais souligner ici un aspect de cette situation qui constitue, je crois, un obstacle important à la diffusion du paradigme de questionnement du monde et à l'idée fondatrice de *connaissance par l'enquête*.

b) Mettre en évidence une réponse $R^{\diamondsuit}$, cela consiste, en pratique, à examiner un document dans lequel celle-ci a été inscrite afin de l'en excrire pour la réinscrire en un *compte rendu* qui lui soit fidèle. Or la culture scolaire et universitaire semble avoir négligé, voire déprécié le *compte rendu*, dans lequel on se fait le truchement de $R^{\diamondsuit}$, où l'on « donne la parole » à $R^{\diamondsuit}$, au profit du *commentaire*, dans lequel l'élève ou l'étudiant *parle de* $R^{\diamondsuit}$, ou plutôt parle *à propos* de $R^{\diamondsuit}$, sans souci accablant d'en restituer l'exact contenu. Cette situation avantageuse lui permet de « dire son mot à lui », de faire connaître les profondes réflexions que l'objet commenté suscite en lui : de simple truchement de la culture il se mue en « critique » du monde.

c) Je reviens ici vers un terrain d'observation que j'avais déjà exploité dans le séminaire 2008-2009, lors de la dernière séance, tenue le 9 juillet : celui de l'examen associé à l'UE de licence de sciences de l'éducation intitulée « Théorie de l'apprentissage et didactique pluridisciplinaire », ici dans sa 2e session. L'épreuve correspondante comporte trois parties, dont la première exige du candidat qu'il réponde à deux « questions de cours ». Ces questions figurent dans une liste de questions constituée au fur et à mesure de l'avancement du cours et qui font écho à ce cours. Dans le cas considéré, la liste comportait 128 questions et avait été arrêtée et rendue publique le 24 décembre 2009. Je rappelle que, lors de l'épreuve, tous les documents sont autorisés, et en particulier le texte du cours, celui du « Forum des questions », celui, enfin des questions de cours. Cela rappelé, lors de la

récente épreuve (le 15 juin 2010), les candidats se sont trouvés devant un sujet ainsi libellé dans sa première partie :

> **Partie 1.** En n'utilisant que les éléments disponibles dans le cours de didactique fondamentale (y compris le « Forum des questions »), rédigez une réponse à chacune des deux questions suivantes :
>
> **1.** D'où provient la distinction faite par certains auteurs entre *didactique* et *mathétique* ? Comment peut-on expliquer la proximité des mots *mathétique* et *mathématique* ? Pourquoi cette distinction n'est-elle pas recevable en théorie anthropologique du didactique ?
>
> **2.** Qu'appelle-t-on *praxéologie* ? Quelle relation y a-t-il entre cette notion et l'enjeu didactique ♥ figurant dans la formule générale *S*(*X* ; *Y* ; ♥) décrivant un système didactique ?

La première question était la question 14 de la liste des 128 questions, la deuxième la question 65. La situation est ici la suivante : l'étudiant doit faire un compte rendu (concis) de la réponse apportée à une certain question dans un certain document dont il dispose effectivement. D'aucuns diraient que c'est là une tâche bien trop facile, à la comparer à la traditionnelle épreuve « sans documents » (mais de nature dissertationnelle). Ce que nous savons, c'est que la lecture excriptrice à réaliser est troublée par diverses conditions dont certaines sont portées par les candidats eux-mêmes – tel le fait, qu'on n'observera pas dans ce qui suit, de regarder erronément la formule classique *S*(*X* ; *Y* ; ♥) comme relative à l'*enseignant X* et aux *élèves Y* (les places sont échangées), ou encore, désignant correctement par *Y* l'enseignant, par *X* les élèves, d'écrire cette formule *S*(*Y* ; *X* ; ♥), tant le professeur est *premier* dans l'imaginaire scolaire !

d) Mais c'est à d'autres phénomènes que je m'attacherai dans ce qui suit. La première des deux questions pour lesquelles les candidats devaient rendre compte de la réponse inscrite dans le texte du cours a un mérite : elle parle d'un objet que bien peu de gens connaissent, et sur lequel ils ne sont donc pas enclins à vouloir faire entendre leur propre son de cloche ! Qui, en effet, sait ce qu'est la *mathétique* ? Cela favorisait à l'évidence le fait que les candidats *ne substituent pas*, à la réponse du cours, leur *propre* réponse, cédant en cela à une pulsion narcissique exacerbée par l'éducation scolaire et universitaire ordinaire ; en d'autres termes, on pouvait s'attendre à ce qu'ils restent au plus près du texte du cours, hypothèse dont on va voir qu'elle a été en un sens vérifiée. Mais ce qui va apparaître surtout, c'est un ensemble de déformations, d'erreurs, d'altérations étonnantes par rapport à la réponse inscrite dans le cours. Notons ici que la question proposée était composée en fait de *trois* questions : (1) D'où provient la distinction faite par certains auteurs entre *didactique* et *mathétique* ? (2) Comment peut-on

expliquer la proximité des mots *mathétique* et *mathématique* ? (3) Pourquoi la distinction entre *didactique* et *mathétique* n'est-elle pas recevable en théorie anthropologique du didactique ? Je reproduis maintenant le passage du cours d'où ces questions avaient été « excrites ». (Je rappelle que les candidats avaient à identifier ce passage, ce qu'ils semblent avoir fait sans grande difficulté.) On notera que ce passage ébauche une analyse de la dualité enseignement/apprentissage, analyse dans le cadre de laquelle se trouve lancée une petite enquête à propos du mot « mathétique ».

1.4.2. On voit aussi que le fonctionnement d'un système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,\heartsuit)$ peut provoquer chez les membres de X des « acquisitions » hétérogènes à l'enjeu didactique officiel ♥. Par exemple, en suivant ce cours, certains auront pu apprendre que le mot anglais *soul*, âme, *ne* se prononce *pas* comme le français *soûle*. En même temps, ce fonctionnement pourra échouer plus ou moins largement à provoquer « l'apprentissage de ♥ » qui était à l'origine recherché.

a) En utilisant un vocabulaire sur lequel on reviendra, on peut dire que le fonctionnement de $S(X\,;\,Y\,;\,\heartsuit)$ peut *engendrer*, chez $x \in X$, un *rapport* qui n'existait pas jusque-là à un certain objet $O \neq \heartsuit$, ou encore peut *modifier* le rapport que x avait déjà à cet objet O, mais ne rien faire de tel à propos de l'objet ♥, en ne confortant chez x qu'un rapport à ♥ grossièrement *inadéquat* au projet social (d'enseignement et d'apprentissage) concrétisé par la formation du système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,\heartsuit)$.

b) La distinction précédente est parfois durcie de façon arbitraire, de sorte qu'on en vient à séparer la science *de l'enseignement*, qui serait la didactique, et la science *de l'apprentissage*, pour laquelle on découvrira le nom qui a pu être proposé dans le passage suivant de l'article "Didactic method" de l'encyclopédie *Wikipedia* (version du 21 septembre 2009).

> Didactics is the theory of teaching and, in a wider sense, the theory and practical application of teaching and learning. In demarcation from *mathetics*, as the science of learning, didactics refers only to the science of teaching.

L'article "Mathetics" (version du 29 avril 2009) de la même encyclopédie précise ceci.

> *Mathetics* is the science of learning. The term was coined by John Amos Comenius (1592-1670) in his work *Spicilegium didacticum*, published in 1680. He understood *Mathetics* as the opposite of *Didactics*, the science of teaching.

c) Nous ne retiendrons pas cette distinction. La science didactique telle que nous l'entendons ici ne serait pas en accord avec la définition donnée plus

haut si elle ne s'assignait, par principe, d'étudier *l'ensemble des effets d'apprentissage* sur *X* du fonctionnement d'un système didactique *S*(*X* ; *Y* ; ♥) supposé viser « l'apprentissage de ♥ » (par *X*). Une raison forte de donner une telle extension au champ d'investigation de la didactique tient à ce que celle-ci doit développer en son sein une *ingénierie des systèmes didactiques* susceptible d'éclairer et d'inspirer l'action tant de l'institution mandante que de l'institution mandataire et de l'institution enseignée : pour « régler » de façon optimale le fonctionnement de *S*(*X* ; *Y* ; ♥) et de ses acteurs, il convient d'analyser les effets d'apprentissage de ce fonctionnement sur *X* tant à propos de ♥ qu'à propos d'objets *O* ≠ ♥, lesquels par exemple pourraient gêner, voire « asphyxier » l'apprentissage de ♥. Notons en outre que la définition de la didactique avancée plus haut conduit de même à étudier les effets d'apprentissage (en subsumant sous cette expression aussi bien ce qui est *désappris*) du fonctionnement de *S*(*X* ; *Y* ; ♥) sur *Y*, ainsi d'ailleurs que sur les personnes et les institutions « en contact » avec *S*(*X* ; *Y* ; ♥). (Contrairement à une vision dominante mais naïve, l'instruction scolaire *des enfants* est aussi un moyen de renforcer ou d'actualiser l'instruction *des parents*, voire des grands-parents, etc.)

1.4.3. L'étude d'un système de connaissances ♥ fait rencontrer des connaissances *associées*, en quelque sorte auxiliaires, dont la présence dans l'environnement de ♥ peut être regardée *a priori* comme plus ou moins fortuite. Dans les passages de l'encyclopédie *Wikipedia* cités plus haut, on a rencontré ainsi, d'abord, le terme *mathetics*, si proche en apparence de *mathematics* ; ensuite, le nom de *John Amos Comenius* ; enfin le vocable latin *spicilegium* (dans le titre d'un ouvrage posthume de Comenius). Chaque fois, le problème de la force du lien entre les réalités rencontrées et l'enjeu de l'étude (ici, la définition et l'étude de la didactique, en gros) *se pose*. Est-il pertinent par exemple d'élucider l'origine du mot *mathetics*, de chercher à en savoir plus sur l'auteur du *Spicilegium didacticum* ou encore de « déchiffrer » le mot latin *spicilegium* ? Faut-il donc *enquêter* sur le mot (et la notion) de *mathétique* (pour le dire en français), sur Comenius, ou sur le mot (et la notion) de *spicilegium* ? Pour y voir plus clair, amorçons de telles enquêtes.

a) L'article "Mathetics" se poursuit par les lignes suivantes.

> Seymour Papert, MIT mathematician, educator, and author, explains the rationale behind the term *mathetics* in Chapter 5 (A Word for Learning) of his book, *The Children's Machine*. The origin of the word, according to Papert, is not from "mathematics," but from the Greek, *mathēmatikos*, which means *disposed to learn*. He feels this word (or one like it) should become as much part of the vocabulary about education as is the word pedagogy or instructional design.

On voit tout aussitôt que l'on rencontre ici de nouveaux « objets » – par exemple "Seymour Papert" ou "instructional design" – à propos desquels la question d'enquêter se pose itérativement. Par rapport à notre enquête, on y voit que, selon l'auteur (anonyme) qui cite S. Papert, celui-ci prétendrait que "the origin of the word [...] is not from 'mathematics,' but from the Greek, *mathēmatikos*, which means *disposed to learn*". L'allégation est ambiguë : signifie-t-elle que « mathétique » n'aurait *rien à voir* avec « mathématique » ? Ou que « mathétique » ne dérive pas de « mathématique » *mais que* l'un et l'autre dérivent d'une même « racine » ?

b) Pour tenter de répondre, examinons ce que dit le *Dictionnaire historique de la langue française* à propos du terme latin *mathematicus* dont provient le français *mathématique* (Rey et al., 1993, p. 1205).

> Le latin l'a repris au grec *mathematikos* « qui désire apprendre, scientifique » et spécialement « qui concerne les mathématiques », substantivé dans *ê mathematikê (tekhnê)* comme nom de science. Ce mot est dérivé de *mathêma* « ce qui est enseigné », employé au pluriel pour « connaissances », par opposition à *mathêsis*, qui met l'accent sur le fait d'apprendre. L'un et l'autre sont dérivés de *manthanein*, verbe passé de sa signification première, « apprendre, par l'expérience, apprendre à connaître, à faire », au sens plus abstrait de « comprendre ».

On arrive ici à une explication qui semble au moins cohérente : le verbe *manthanein* aurait eu deux rejetons, l'un, *mathêma*, du côté de l'enseigner, l'autre, *mathêsis*, du côté de l'apprendre – de là sans doute qu'on ait pu envisager de nommer *mathétique* la science de l'apprendre ; Mais notons que la science de l'enseigner devrait alors être nommée… *mathématique*, si ce mot n'était déjà très « occupé » ! En fait, la didactique telle que nous l'étudions dans ce cours *intègre en une même science* une « mathématique » et une « mathétique », soit une théorie de l'enseignement *et* une théorie de l'apprentissage. Et retenons aussi que les « mathématiques » étaient par excellence, dans la civilisation grecque, *ce qui s'enseigne et ce qui s'apprend* : raison de plus pour en faire la première pierre de touche d'une science didactique en construction.

e) Quelles réponses ce texte apporte-t-il aux trois questions précédemment rappelées ? Si l'on entend la première question – D'où provient la distinction faite par certains auteurs entre *didactique* et *mathétique* ? – comme concernant l'origine *historique* de cette distinction, la réponse est simple : le texte répond (par documents interposés) qu'elle aurait son origine dans le *Spicilegium didacticum* de Comenius paru en 1680, ouvrage où apparaît (en latin) le terme *mathétique* expressément forgé (*coined*) par Comenius. Le questionnement sur la « provenance » de la distinction didactique/mathétique pouvait aussi être compris comme renvoyant aux

phénomènes à l'origine de cette conceptualisation dualiste. À cet égard, le texte du cours semble rapprocher celle-ci du phénomène selon lequel, lorsque *Y* enseigne ♥ à *X*, *X* apprend peut-être ♥ mais apprend aussi, bien souvent, *d'autres objets O* : ce qui est *appris* ne se superpose pas à ce qui est *enseigné*. En revanche, notons-le aussi, la première question n'exigeait pas que l'on se réfère à Seymour Papert : la distinction didactique/mathétique conçue par Comenius *pourrait* aussi bien être morte aujourd'hui (sauf pour l'historien de l'éducation) et même si ce n'est pas le cas (la requête **mathetics** adressée à Google provoque ainsi, le 29 juin 2010 vers 8 h, l'annonce de 12 700 résultats de recherche), ce que le libellé de la question rappelle comme un simple fait, il n'était nullement question d'identifier les auteurs adeptes de la distinction didactique/mathétique *formulée en ces termes*. La deuxième question – Comment peut-on expliquer la proximité des mots *mathétique* et *mathématique* ? – faisait l'objet dans le cours d'une petite enquête déjà évoquée, qui part de la mention d'une « réponse » attribuée à Papert (dans son livre *The Children's Machine: Rethinking School in the Age of the Computer*, 1992) par l'article "Mathetics" de *Wikipedia* et avance à partir de là jusqu'à la réponse proposée (conjecturalement) dans le cours : le verbe grec *manthanein*, « apprendre » puis « comprendre », aurait eu deux rejetons, l'un, *mathêma*, « ce qui est enseigné » et, au pluriel, « connaissances », qui se situe « du côté de l'enseigner », l'autre, *mathêsis*, qui met l'accent sur le fait d'apprendre ; de là que l'on ait pu désigner une supposée science de l'apprentissage par le mot de *mathétique*, dérivé de *mathêsis*, ce qui aurait normalement conduit à désigner par le mot de *mathématique* la science de l'enseignement, si ce mot n'avait été très anciennement « occupé », ainsi qu'on le sait. La troisième question – Pourquoi la distinction entre *didactique* et *mathétique* n'est-elle pas recevable en théorie anthropologique du didactique ? – reçoit dans le texte du cours une réponse articulée sur deux plans : la didactique au sens de la TAD étudie, notamment dans une perspective d'*ingénierie didactique*, les conditions de la diffusion praxéologique et en particulier, parmi elles, les effets rémanents sur *X* (et sur ses environnements institutionnels) d'apprentissages antérieurs, qui conditionnent en partie les apprentissages ultérieurs de *X*, sans toujours porter sur des objets explicitement enseignés à *X*. Toute l'étude qui suit relève au reste de ce schéma-là : on y découvrira comme obstacle à un apprentissage nouveau un équipement praxéologique ancien dont certaines parties ont été à coup sûr acquises par *X* sans jamais lui avoir été délibérément « enseignées ».

f) Les rédactions des 12 étudiants ayant participé à l'épreuve sont reproduites ci-après le plus fidèlement possible, compte tenu des écarts difficilement réductibles entre écriture manuscrite et écriture au clavier. Elles seront parcourues une à une, dans un ordre quelconque.

Réponse 1

La différence entre Didactique et Mathétic provient de deux définitions anglaises La didactique est la science de l'enseignement alors que la mathetic est celle de l'apprentissage. (terme forgé par Comenius) Selon Paupert, les mathetics et les mathématiques ont les mêmes origines mais l'un ne vient pas de l'autre. En latin, mathetic signifie desire apprendre les sciences. En grec, c'est la science de l'apprentissage donc d'enseigner. Les deux réferences pourraient être associées aux mathématiques. Ce n'est pas recevable car il ne met pas en avant les conditions et contraintes relatif à ces deux termes. Les effets sociaux de la didactique ne sont pas tous étudiés donc on ne peut pas tous savoir sur cette distinction.

Observations 1

Il s'agit là d'un galimatias étonnant où tout se mêle, comme l'illustre bien la dernière phrase de cette rédaction. La simplification arbitraire d'une situation « complexe » conduit à des affirmation absurdes, telle celle-ci : « En grec, c'est la science de l'apprentissage donc d'enseigner. » Mais d'autres aspects sont plus encore surprenants : pourquoi ainsi orthographier « Mathétic » ou « mathetic » ou « mathetics » ce que le texte du cours et le libellé de la question nomment *mathétique* ? Les confusions culturelles abondent. Ainsi la distinction didactique/mathétique proviendrait-elle « de deux définitions anglaises ». L'indication concernant le terme latin *mathematicus* selon laquelle « le latin l'a repris au grec *mathematikos* "qui désire apprendre, scientifique" » devient : « En latin, mathetic signifie desire apprendre les sciences. » Tout se mélange, sans respect aucun pour la réponse à restituer, sans égard non plus pour les règles de la syntaxe. Ainsi dans cette phrase : « Les deux réferences [*sic*] pourraient être associées aux mathématiques. Ce n'est pas recevable car il ne met pas en avant les conditions et contraintes relatif à ces deux termes. »

Réponse 2

Pour certains auteurs, la didactique est la science de l'enseignement, tandis que la mathetic serait la science de l'apprentissage. Selon S. Papert, le mot mathétic viendrait du grec mathēmatikos, comme mathématiques et donc l'un ne serait pas dérivé de l'autre, mais les 2 proviendraient de la même racine.

Dans le dictionnaire historique de la langue française, à mathématicus, on voit que mathêma et mathêsis sont derivés de manthanein, l'un du côté de l'apprendre, l'autre du côté de l'enseigner.

En théorie anthropologique du didactique, cette distinction n'est pas recevable car nous l'étudions en une seule science qui comprend la théorie de l'enseignement et la théorie de l'apprentissage.

Observations 2

Il s'agit là d'un bien meilleur compte rendu de réponse, qui n'en laisse que mieux voir une faible capacité à effectuer ce type de tâches. Notons tout d'abord qu'on retrouve les orthographes « mathetic » et « mathétic », qui devraient troubler un scripteur francophone natif ! Notons aussi que la réponse attendue à la première question est absente, la première phrase ne faisant que reprendre autrement – et bien inutilement – la formulation de la question. Pour la deuxième question, des matériaux de réponse sont proposés ; mais ils ne sont pas exploités pour donner une réponse explicite. S'agissant de la troisième question, on ne nous dit rien de la raison pour laquelle la didactique ne pourrait accepter la dualité institutionnelle science de l'enseignement/science de l'apprentissage. Bien entendu, la meilleure qualité de cette rédaction se marque à ce qu'on n'y retrouve pas les confusions et autres incohérences qui abondaient dans la réponse 1 ci-dessus.

Réponse 3

La didactique intègre en une même science une « mathématique » et une mathétique soit une théorie de l'enseignement et une théorie de l'apprentissage. Les mathematiques étaient par excellence, dans la civilisation grecque, « ce qui s'enseigne et ce qui s'apprend ».
La proximité des mots mathétique et mathématiques le latin l'a repris au grec mathematikos « qui désire apprendre, scientifique », substantivé [en] nom de science. Ce mot est dérivé de mathema « ce qui est enseigné », employé au pluriel pour « connaissance », par opposition à mathesis, qui met l'accent sur le fait d'apprendre.
L'un et l'autre sont dérivés de Manthanein

Observations 3

Ici, un trait présent déjà dans la réponse 2 se distingue mieux peut-être : la candidate *ne répond pas aux questions posées*. Selon l'habitus dissertationnel, elle dit des choses sur le « sujet ». Tout le premier paragraphe est à cet égard exemplaire. Pour la deuxième question, de même, on retrouve l'exposé de « matériaux » bruts, qui, s'il était délivré « de mémoire », ne pourrait que ravir le correcteur, à la syntaxe près ! La troisième question n'est pas abordée ; mais sans doute doit-on voir une « réponse » – qui n'en est pas une, puisqu'elle énonce un fait au lieu d'en donner les raisons – dans le début du premier paragraphe : « La didactique intègre en une même science une "mathématique" et une mathétique… »

Réponse 4

Le terme de mathétique a été employé par John Amos Comenius dans son ouvrage « Spicilegium didacticum » en 1680. On peut voir la distinction entre

didactique et mathétique. La didactique est la science de l'enseignement qui s'oppose à la mathétique qui est la science de l'apprentissage. Mais la science didactique étudie l'ensemble des effets d'apprentissage sur X du fonctionnement d'un système didactique *S*(X ; Y ; ♥) supposé viser « l'apprentissage de ♥ » (par X).
Pour S. Papert, l'origine du mot mathétique ne vient pas de mathématique mais du grec mathēmatikos qui signifie « qui désire apprendre ». Le verbe mathanein aurait donné mathêma (du côté de l'enseigner) et mathêsis (du côté de l'apprendre). C'est de là qu'on ait pu envisager de nommer mathétique la science de l'apprendre. Donc la science de l'enseigner devrait être nommée mathématique. La didactique étudiée en cours intègre en une même science une « mathématique » et une « mathétique », soit une théorie de l'enseignement et une théorie de l'apprentissage.

Observations 4

Un correcteur bienveillant doit considérer ici, par delà les maladresses stylistiques, que la rédaction proposée restituent à peu près les réponses aux deux premières questions, mais ne va pas plus loin que les rédactions précédentes s'agissant de la troisième question. On notera la difficulté – qu'on peut croire installer par l'habitus essayiste – à formuler son propos comme une *réponse* formelle à une question explicitement formulée : au lieu de « Le terme de mathétique a été employé par John Amos Comenius dans son ouvrage "Spicilegium didacticum" en 1680 », cette exigence voudrait que la candidate écrive quelque chose comme : « Le terme de mathétique a été créé par John [*sic*] Amos Comenius, qui l'a employé dans son ouvrage *Spicilegium didacticum* paru en 1680. »

Réponse 5

La distinction entre didactique et mathétique Faîtes par certains auteurs provient de la définition que l'on donne à chacun d'eux : la didactique serait la science d'enseigner alors que mathétique serait la science de l'apprentissage ; mathétique serait donc l'opposé de la didactique.
Cette proximité entre les mots mathétique et mathématique est dû à l'origine de ces deux mots en langue grecque : le verbe manthanein aurait eu deux dérives : mathema (qui se rapproche de l'enseignement) et mathêsis (qui se rapproche de l'apprentissage), et, c'est par cette même racine qui explique comment les mots mathetiq et mathématique sont si proche.
Cette distinction n'est pas recevable en theorie anthropologique du didactique car la définition de la didactique proposé (science d'enseigner) n'est pas en accord avec celle de la theorie anthropologique du didactique qui est l'étude de l'ensemble des effets d'apprentissage sur X du fonctionnement d'un système didactique *S*(X ; Y ; ♥) supposé viser l'apprentissage de ♥ par X.

Observations 5

Au-delà des fantaisies orthographiques, on note d'abord que la première question ne reçoit pas de réponse : l'explicitation de la distinction didactique/mathétique se substitue à la considération de sa « provenance » (Comenius, si l'on suit le texte du cours). À la deuxième question, le candidat apporte un peu plus que des matériaux bruts : on peut considérer que la réponse du cours est ici restituée presque correctement (même si une vraie réponse eût demandé une explicitation plus poussée). En revanche, la « réponse » à la troisième question, qui part d'un bon pas, échoue à expliciter l'argument sur lequel repose le rejet de la distinction didactique/mathétique. On notera enfin un hapax : l'orthographe « mathetiq », qui appartient peut-être au français « modernerisé ».

Réponse 6

La didactique comme nous l'étudions suppose d'étudier l'ensemble des effets d'apprentissage sur X du fonctionnement d'un système didactique *S*(X ; Y ; ♥) supposé viser l'apprentissage de ♥ par X.
Seulement certains auteurs font une distinction entre didactique et mathétique.
Cette distinction vient du fait que l'enjeu didactique officiel ♥ peut - être acquis, chez les membres de X, de manière différente. La didactique est définit comme la science de l'enseignement et la mathétique comme la science de l'apprentissage.
Le terme mathétique est inventé par John Amos Comenius vers 1680. Il l'oppose donc à la didactique.
Les effets d'apprentissage du fonctionnement *S*(X ; Y ; ♥) sur X sont analysér à propos d'objets O ≠ ♥. ou à propos de ♥. Or pour régler de façon optimale le fonctionnement du système didactique il convient d'analyser le tout.
La proximité des mots mathetique et mathématique peut être expliquer par l'origine grecque de ces deux mots.
A la base ils proviennent tous deux du verbe manthanein qui derive et donne deux autres mots : mathêma qui signifie « ce qui est enseigné » et qui est opposé à mathêsis qui met l'accent sur l'apprendre.
La science de l'apprendre donne donc le mot mathétique

Observations 6

Sous la simplicité rustique du style de la candidate, on découvre quantité de matériaux jetés en vrac et qui dessinent des ébauches de réponse. On pourrait les distribuer ainsi, avec un reste :

Question (1)

« Le terme mathétique est inventé par John Amos Comenius vers 1680. Il l'oppose donc à la didactique. »

« La didactique est définit comme la science de l'enseignement et la mathétique comme la science de l'apprentissage. »
« Cette distinction vient du fait que l'enjeu didactique officiel ♥ peut - être acquis, chez les membres de X, de manière différente. »

Question (2)

« La proximité des mots mathetique et mathématique peut être expliquer par l'origine grecque de ces deux mots.
A la base ils proviennent tous deux du verbe manthanein qui derive et donne deux autres mots : mathêma qui signifie « ce qui est enseigné » et qui est opposé à mathêsis qui met l'accent sur l'apprendre.
La science de l'apprendre donne donc le mot mathétique »

Question (3)

« Les effets d'apprentissage du fonctionnement *S*(X ; Y ; ♥) sur X sont analysér à propos d'objets O ≠ ♥. ou à propos de ♥. Or pour régler de façon optimale le fonctionnement du système didactique il convient d'analyser le tout. »
« La didactique comme nous l'étudions suppose [donc] d'étudier l'ensemble des effets d'apprentissage sur X du fonctionnement d'un système didactique *S*(X ; Y ; ♥) supposé viser l'apprentissage de ♥ par X. »

Reste

« Seulement certains auteurs font une distinction entre didactique et mathétique. »

Là encore, ce qui frappe, c'est la difficulté à articuler une *réponse*, qui soit voulue telle, à une *question*.

Réponse 7

Le verbe manthanein aurait eu deux rejetons, l'un, mathêma, du côté de l'enseigner, l'autre, mathêsis, du côté de l'apprendre. De là sans doute qu'on ait pu envisager de nommer mathetique la science l'apprendre ; nous notons que la science de l'enseigner devrait alors être nommée… mathematique. La didactique telle que nous l'étudions intègre en une même science une « mathematique » et une « mathetique » soit une theorie de l'enseignement et une theorie de l'apprentissage. les « mathematiques » étaient dans la civilisation grec par excellence, ce qui s'enseigne et ce qui s'apprend.

Observations 7

Le traitement précédemment appliqué donnerait ici ce que voici :

Question (1)

∅

Question (2)

« Le verbe manthanein aurait eu deux rejetons, l'un, mathêma, du côté de l'enseigner, l'autre, mathêsis, du côté de l'apprendre. De là sans doute qu'on ait pu

envisager de nommer mathetique la science l'apprendre ; nous notons que la science de l'enseigner devrait alors être nommée… mathematique. »

« les « mathematiques » étaient dans la civilisation grec par excellence, ce qui s'enseigne et ce qui s'apprend. »

Question (3)

« La didactique telle que nous l'étudions intègre en une même science une « mathematique » et une « mathetique » soit une theorie de l'enseignement et une theorie de l'apprentissage.

Reste

∅

Il s'agit là d'une réponse minimaliste et déséquilibrée, qui reprend *verbatim* des passages du texte du cours. À propos de l'omission des accents (mathetique, mathematique(s), theorie), je me demande si la candidate ne verrait pas en cela une simple singularité personnelle de son « écriture », qui ne saurait (donc) pas plus lui être reprochée que sa façon de former les *o* ou les *r* !

Réponse 8

La distinction faite entre didactique et mathetique vient du fait que la didactique serait plutôt la science de l'enseignement alors que la mathétique (Comenius) serait celle de l'apprentissage. La proximité de ces deux mots vient de l'origine du mot « mathématique » qui vient du grec « mathematikos » signifiant « désire apprendre ». Ce mot en a donné deux autres dont l'un signifierait plus « enseigner » et l'autre « apprendre ». Cependant, si le mot « mathematique » n'avait pas été autant utilisé alors c'est ainsi qu'aurait dû s'appeler la mathetique.

Observations 8

On notera une confusion déjà rencontrée : la candidate passe du couple didactique/mathétique au couple mathématique/mathétique comme s'il s'agissait d'une seule et même réalité : la proximité des deux mots dont elle parle est celle de *mathématique* et de *mathétique*, non de didactique et de mathématique. On aura noté qu'elle ne répond vraiment qu'à la deuxième question, sans apporter de réponse explicite à la première et sans considérer aucunement la troisième. La valse des accents est ici non moins remarquable : les graphies « mathetique » et « mathétique » semblent tenues pour équivalentes.

Réponse 9

La distinction faite par certains auteurs entre didactique et mathématique.

Seymour Papert, prétendait que « mathétique » n'aurait rien à voir avec « mathématiques » ? ou que « mathétique » ne dérive pas de « mathématiques » mais que l'un et l'autre dérivent une même « racine ».
Comenius étudie en particulier la didactique.
Sans doute qu'on ait pu envisager de nommer mathétique la science de l'apprendre ; Mais notons que la science de l'enseigner devrait alors être nommée… mathématique, si ce mot n'était déjà très « occupé » ! en fait, la didactique telle que nous l'étudions dans ce cours intègre en une même science une « mathématique » et une mathetique », soit une théorie de l'enseignement et une théorie de l'apprentissage. Et retenons aussi que les « mathématiques » étaient par excellence, dans la civilisation grecque, ce qui s'enseigne et ce qui s'apprend : raison de plus pour en faire la première pierre de touche d'une science didactique en construction.

Observations 9

On peut reprendre la même remarque que précédemment concernant les formes « mathetique » et « mathétique ». On notera à nouveau l'incapacité de la candidate à formuler des réponses nettes aux questions posées : la rédaction déploie un fondu-enchaîné qui ne favorise pas la rigueur et qui renvoie typiquement au style dissertationnel, dans lequel l'important est de « dire quelque chose », non de répondre à des questions.

Réponse 10

Le therme mathétique est la science de l'apprentissage qui s'oppose à la didactique selon Rey dans le dictionnaire historique de la langue française.
Le latin a repris au grec le mot mathematikos puis le verbe manthanein qui donne des mots :
– mathêma = enseigner qui renvoi aux mathématiques
– mathêsis = apprendre
La didactique intègre en une même science mathématiques et mathetique comprenant la theorie de l'enseignement et la theorie de l'apprentissage.

Observations 10

Comme en d'autres cas, on voit ici les effets de confusions culturelles diverses. L'orthographe « therme » provient d'une *correction*, sans doute de « terme », mot qui a été recouvert par un correcteur liquide. La candidate prête à Alain Rey, qui a dirigé le *Dictionnaire historique de la langue française*, le fait d'opposer « mathétique » à « didactique », alors que ce dictionnaire ne connaît pas le mot « mathétique ». Selon elle, « le latin a repris au grec le mot mathematikos puis le verbe manthanein »… Surtout, la didactique intègrerait en une même science « mathématiques et mathetique » !

Réponse 11

Les auteurs John Amos Comenius et S. Papert font une distinction entre dialectique et mathématique. La définition de l'étude de la dialectique pose le problème de la force du lien entre les realités rencontrées et l'enjeu de l'étude. Ils pretendent que « Mathématique » et « Mathétique » ne derivent ni l'un de l'autre mais d'une même racine.

On explique la proximité de ces Mots par le fait qu'ils proviennent du verbe, Manthanein. L'un mathêma, du côté de l'enseigner, l'autre Mathêsis, du côté de l'apprendre. D'où il aurait pu être envisagé de Nommer Mathétique la science de l'apprendre et Mathématique science de l'enseigner. Les Mathématiques etaient dans la civilisation grecque ce qui s'enseigne et ce qui s'apprend.

Cette Distinction entre Mathétique et Mathématique n'est pas recevable en théorie Anthropologique didactique car ces deux dans la didactique telle que nous l'étudions intègre en une même science une science didactique en construction.

Observations 11

La confusion est ici à son comble. La candidate a remplacé « didactique » par « dialectique ». Elle réunit Comenius, mort en 1670, et Papert, né en 1928, dans une commune opposition de la dialectique et de la… mathématique ! Le passage sur la « force du lien » est un recopiage maladroit d'un passage du cours reproduit ci-dessus. « Dire quelque chose », même maladroitement, est plus important que de tenter de répondre clairement à des questions précises. Bien entendu, la lambada des accents continue.

Réponse 12

La distinction faite entre didactique et mathétique provient d'un mathématicien du nom de Seymour Papert où est mis l'accent sur la proximité de deux termes, mathétique et mathématique : en effet, tous deux sont issus du verbe latin manthanein qui a donné deux autres verbes mathema et mathesis, qui ont respectivement pour sens enseigner et apprendre. L'un serait vu comme la science de l'apprendre et l'autre comme la science de l'enseigner, tous deux regroupant une même science au service de la didactique. C'est pourquoi elle ne peut être recevable en théorie anthropologique du didactique car elles regroupent une même science intégrée à la didactique ; on ne peut les distinguer car la didactique c'est à la fois enseigner et apprendre.

Observations12

On note que le candidat aborde successivement – quoique très confusément – les trois questions posées.

Question (1)

« La distinction faite entre didactique et mathétique provient d'un mathématicien du nom de Seymour Papert »

Question (2)

« où est mis l'accent sur la proximité de deux termes, mathétique et mathématique : en effet, tous deux sont issus du verbe latin manthanein qui a donné deux autres verbes mathema et mathesis, qui ont respectivement pour sens enseigner et apprendre. »

Question (3)

« L'un serait vu comme la science de l'apprendre et l'autre comme la science de l'enseigner, tous deux regroupant une même science au service de la didactique. C'est pourquoi elle ne peut être recevable en théorie anthropologique du didactique car elles regroupent une même science intégrée à la didactique ; on ne peut les distinguer car la didactique c'est à la fois enseigner et apprendre. »

Mais on retrouve dans sa rédaction certains traits bien identifiés. Ainsi de la confusion entre le couple de notions didactique/mathétique d'une part, et le couple de mots mathématiques/mathétique d'autre part. La syntaxe, on l'aura vu, est ici étrangement maltraitée. Les confusions « culturelles » sont insistantes : du grec *manthanein*, le candidat fait ainsi un verbe latin. Sa tentative d'argumentation (en relation avec la troisième question) tourne court, pour le moins.

g) L'étude précédente confirme un fait clinique anciennement observé : la formation scolaire usuelle ne prépare pas ou prépare mal à examiner une réponse $R^{\Diamond}$ pour en rendre compte de façon précise. Au mieux, elle conduit à un déballage de notations supposées avoir un certain rapport avec la question Q à laquelle $R^{\Diamond}$ fait écho. On retrouve là l'influence du modèle de l'essayisme dissertationnel ; et l'on voit que l'un des gestes cardinaux de l'enquête, telle que la formalise le schéma herbartien, ne va nullement de soi dans l'équipement praxéologique engendré par l'école.

ENQUÊTES MATHÉMATIQUES

1. Mathématiques pour didacticiens : suite sans fin

a) Je voudrais revenir ici sur deux enquêtes mathématiques évoquées au cours des séances précédentes. La première a trait à la question suivante :

Étant donné deux expressions $f(a, b, c, \ldots)$ et $g(a, b, c, \ldots)$, où $a, b, c, \ldots$, sont des variables *entières positives* majorées par des entiers $A, B, C, \ldots$, comment déterminer le minimum (ou un minorant > 0) de $\delta = |f - g|$ sur l'ensemble M =

$\{ (a, b, c, \ldots) \in I \,/\, \delta(a, b, c, \ldots) > 0 \}$, où $I = I_A \times I_B \times I_C \times \ldots$, la notation I_K ($K \in \mathbb{N}$) désignant l'ensemble d'entiers $[0, K] \cap \mathbb{N}$?

C'est là un problème que nous avons résolu dans quelques cas simples. J'ébaucherai ici un nouvel exemple en me contentant, faute de mieux, d'un petit bricolage mathématique. On connaît trop peu l'identité suivante (où a et b sont des entiers positifs) : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a + b + \sqrt{4ab}}$. Considérons alors les fonctions $f(a, b) = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $g(c, d) = \sqrt{c + \sqrt{d}}$ ainsi que $\delta(a, b, c, d) = |\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c + \sqrt{d}}|$, qui s'écrit encore

$$\delta(a, b, c, d) = |\sqrt{a + b + \sqrt{4ab}} - \sqrt{c + \sqrt{d}}|,$$

et dont on recherche un minorant strictement positif sur un certain ensemble M de quadruplets d'entiers.

b) Considérons le cas où a, b, c vérifient $c \leq a + b$ et où ab est un entier non carré. Considérons alors l'application $d \mapsto \varphi(d) = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c + \sqrt{d}}$. Il est clair que φ est *décroissante*. La suite d'égalités

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c + \sqrt{d}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (c + \sqrt{d})}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c + \sqrt{d}}} = \frac{a + b - c + \sqrt{4ab} - \sqrt{d}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c + \sqrt{d}}}$$

montre en outre que $\varphi(d)$ est *positif* lorsque $d < 4ab$ et tend vers $-\infty$ quand d tend vers $+\infty$. La plus petite valeur positive de φ est atteinte pour

$$d_- = \mathrm{E}[(a + b - c + \sqrt{4ab})^2]$$

et la plus grande valeur négative de φ est atteinte pour $d_+ = d_- + 1$. À titre de simple illustration, prenons le cas où $a = 7$, $b = 11$ et $c = 15$; on a alors

$$d_- = \mathrm{E}[(a + b - c + \sqrt{4ab})^2] = \mathrm{E}[(3 + \sqrt{308})^2] = 422$$

et donc $d_+ = 423$. Il vient ainsi : $\varphi(d_-) = \sqrt{7} + \sqrt{11} - \sqrt{15 + \sqrt{422}} = 0{,}00061138\ldots$, $\varphi(d_+) = \sqrt{7} + \sqrt{11} - \sqrt{15 + \sqrt{423}} = -0{,}0014283\ldots$ On a ainsi par exemple, pour tout entier positif d, $|\sqrt{7} + \sqrt{11} - \sqrt{15 + \sqrt{d}}| > 10^{-4}$.

c) Je considère maintenant un autre type de cas particuliers, celui où l'on a $c = a + b$, en sorte que l'on a cette fois :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c + \sqrt{d}} = \frac{\sqrt{4ab} - \sqrt{d}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c + \sqrt{d}}}.$$

Pour a et b donnés, l'expression $\psi(a, b, d) = \sqrt{4ab} - \sqrt{d}$ est une fonction *décroissante* de d, positive lorsque $d < 4ab$, nulle lorsque $d = 4ab$ et négative lorsque $d > 4ab$. Les deux plus petites valeurs non nulles de $|\sqrt{4ab} - \sqrt{d}|$ sont ainsi $\sqrt{4ab} - \sqrt{4ab - 1}$ et $\sqrt{4ab + 1} - \sqrt{4ab}$. Comme la suite $n \mapsto \sqrt{n} - \sqrt{n - 1}$ (pour $n \geq 1$) est décroissante, ainsi que le montre l'égalité

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}},$$

la plus petite valeur non nulle de $|\sqrt{4ab} - \sqrt{d}|$ est en fait

$$\sqrt{4ab+1} - \sqrt{4ab} = \frac{1}{\sqrt{4ab+1} + \sqrt{4ab}}.$$

Pour a, $b \leq 10^6$ et $d \neq 4ab$, on a donc

$$|\sqrt{4ab} - \sqrt{d}| > \frac{1}{\sqrt{4ab+1} + 2\cdot 10^6}.$$

On a par ailleurs : $\sqrt{4ab+1} = \sqrt{4ab}\sqrt{1 + \frac{1}{4ab}} < \sqrt{4ab}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{4ab}\right) = \sqrt{4ab} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4ab}} \leq 2\cdot 10^6 + 0{,}25\cdot 10^{-6}$. Il vient ainsi :

$$|\sqrt{4ab} - \sqrt{d}| > \frac{1}{2\cdot 10^6 + 0{,}25\cdot 10^{-6} + 2\cdot 10^6} = \frac{1}{4\cdot 10^6 + 0{,}25\cdot 10^{-6}} > 0{,}2499\cdot 10^{-6}.$$

Dans le type de cas considéré ($c = a + b$, avec a, $b \leq 10^6$), on aura donc :

$$|\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c + \sqrt{d}}| = \frac{|\sqrt{4ab} - \sqrt{d}|}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c + \sqrt{d}}} > \frac{0{,}2499\cdot 10^{-6}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c + \sqrt{d}}}.$$

Comme $\sqrt{a}$, $\sqrt{b} \leq 10^3$ et $c = a + b \leq 2 \cdot 10^6$, en supposant de plus $d \leq 4ab + 1 = 4 \cdot 10^{12} + 1$, il vient

$$|\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c + \sqrt{d}}| > \frac{0{,}2499\cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^3 + \sqrt{2 \cdot 10^6 + \sqrt{4 \cdot 10^{12} + 1}}}$$

en sorte que, finalement, $|\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c + \sqrt{d}}| > 6 \cdot 10^{-11}$.

d) Je m'arrêterai sur cette question : ce qui précède s'étend-il, et comment, au cas où $c < a + b$? Existerait-il d'autres techniques, d'autres technologies utiles, plus efficaces que celles mises en jeu jusqu'ici ?

2. Degrés de liberté

a) L'enquête précédente, à peine amorcée, relève à ce stade de l'enquête « sans littérature » typique de la culture mathématique scolaire. La chose, ici, s'explique, doublement : d'un côté, par le fait qu'il nous est possible de démarrer l'enquête « en autonomie », avec des outils mathématiques très réduits ; d'un autre côté, par le fait que l'identification de réponses $R^\diamondsuit$ apparaît difficile. On est là, classiquement, devant le dilemme qui est au cœur de la *dialectique de l'étude et de la recherche* : faut-il (d'abord) chercher par soi-même, ou faut-il (d'abord) étudier les conclusions de ceux qui ont

cherché ? La situation est à cet égard différente quand on en vient au second sujet d'enquête évoqué à la fin de la séance précédente de ce séminaire.

> Q_0. Que peut-on faire, y compris au plan mathématique, pour faire entendre [à des étudiants de SHS] ce qu'est et ce que signifie la notion de degré de liberté introduite à propos du test du χ^2 ?

Bien entendu, ici, on peut tenter de produire une réponse $R^{\heartsuit}$ sans se référer explicitement à des $R^{\diamondsuit}$; mais il n'est pas déraisonnable de s'arrêter sur la question que voici, qui peut au reste être regardée comme incluse dans la question à étudier :

> Q_1. Que font les auteurs, y compris au plan mathématique, pour faire entendre [à des étudiants de SHS] ce qu'est et ce que signifie la notion de degré de liberté introduite à propos du test du χ^2 ?

b) Enquêter sur Q_0 peut commencer par une enquête sur Q_1 : d'emblée, ainsi, s'introduit la notion de *parcours d'étude et de recherche*. Ce parcours, ici, s'ouvre donc par une phase *d'étude* (alors que dans l'enquête sur le minimum de δ l'enquête s'ouvre par une phase de *recherche*). Comme toujours, il est *a priori* indéterminé. Si, par exemple, on se réfère à la « règle » consistant à « partir de *Wikipédia* », on peut commencer par aller voir l'article « Degré de liberté (statistiques) » ; celui-ci est si court qu'on peut le reproduire ici *in extenso* :

> En statistiques le degré de liberté désigne le nombre de valeurs aléatoires qui ne peuvent être déterminées ou fixées par une équation (notamment les équations des tests statistiques).
> Par exemple si l'on cherche deux nombres dont la somme est 12, aucun des deux nombres ne doit être déterminé par l'équation X + Y = 12.
> X peut être choisi arbitrairement, mais alors pour Y il n'y a alors plus le choix. Ainsi, si vous choisissez 11 comme valeur pour X, Y vaut obligatoirement 1. Il y a donc deux variables aléatoires (X,Y), mais un seul degré de liberté.

À la fois obscur (pour le non-spécialiste) et trivial, cet article ne permet guère de faire démarrer l'enquête ; mais on pourra lui faire jouer un rôle de *test* de l'étude à mener : dès lors que celle-ci sera un peu avancée, il conviendra que ce court texte devienne une « boîte claire », de part en part intelligible, y compris dans ses approximations ou ses erreurs éventuelles.

c) Comment avancer à partir de là ? Là encore, on peut utiliser une règle proposée aux élèves et aux étudiants dans les enquêtes qu'ils ont à réaliser : *passer à l'anglais*. En l'espèce, l'article correspondant de *Wikipedia*, intitulé

“Degrees of freedom (statistics)”, apparaît d’emblée comme beaucoup plus ambitieux, notamment dans son recours aux mathématiques, et en particulier à la géométrie des espaces à *N* dimensions. On y lit notamment ceci :

> While introductory texts may introduce degrees of freedom as distribution parameters or through hypothesis testing, it is the underlying geometry that defines degrees of freedom, and is critical to a proper understanding of the concept.

L’article se réfère alors à un travail déjà ancien (1940) dû à Helen M. Walker (1891-1983), “Degrees of Freedom” (*Journal of Educational Psychology* : voir http://courses.ncssm.edu/math/Stat_Inst/PDFS/DFWalker.pdf), dont est extrait ce bref constat :

> For the person who is unfamiliar with *N*-dimensional geometry or who knows the contributions to modern sampling theory only from secondhand sources such as textbooks, this concept often seems almost mystical, with no practical meaning.

On voit ainsi que le problème de la compréhension de la notion de degré de liberté dans le champ de la recherche en éducation a été anciennement posé et a fait relativement tôt l’objet de travaux précis. On peut à ce stade marquer l’article de *Wikipedia* – et celui d’Helen Walker – comme contenant des réponses $R^{\Diamond}$ à examiner, sans le faire immédiatement pour autant.

d) Une tâche peut-être plus pressante est d’identifier le type de situations d’où naît la question Q_0. Bien entendu, on peut ici se reporter à l’article « Test du χ^2 » de *Wikipédia*, dont voici le début :

> Le test du χ^2 (prononcer « khi-deux » ou « khi carré », qu’on écrit également à l’anglaise « chi-deux » ou « chi carré ») permet, partant d’une hypothèse et d’un risque supposé au départ, de rejeter l’hypothèse si la distance entre deux ensembles d’informations est jugée excessive.
>
> Il est particulièrement utilisé comme *test d’adéquation* d’une loi de probabilité à un échantillon d’observations supposées indépendantes et de même loi de probabilité. Un *test d’homogénéité* concerne un problème voisin, la comparaison d’échantillons issus de populations différentes. De manière assez différente, un *test d’indépendance* porte sur des données qualitatives.

L’article développe ensuite les trois cas recensés ici : *test d’adéquation*, *test d’homogénéité*, *test d’indépendance*. Je laisserai chacun se reporter à l’article en question. Pour illustrer le cas du test d’indépendance – car il me semble

qu'une rencontre problématique avec la notion de degré de liberté se fait surtout dans ce cas –, je vous renvoie à la présentation que j'ai donnée dans la séance 5 du séminaire de l'année 2006-2007 et que je reproduis sans changement, ci-après, en annexe.

UN PROGRAMME DE RECHERCHE

1. Le projet de l'UMR ADEF pour 2012-2015

a) Le projet de l'UMR ADEF qui doit être examiné sous peu par le conseil scientifique de l'université de Provence est arrivé à une version stable (en principe). À l'heure actuelle, quatre équipes composent l'UMR. L'équipe dont nous sommes membres a pris pour dénomination « Approches Comparatives et Anthropologiques du didactique et du scolaire » (équipe ACADIS). Cette équipe, dirigée par Alain Mercier, est formée de l'union de quatre sous-équipes dont les dénominations respectives sont « Approches comparatives du didactique » (responsable : Teresa Assude), « Approches socio-didactiques et territorialisées de questions socialement vives » (responsable : Alain Legardez), « Développement de la théorie anthropologique du didactique » (responsable : Yves Chevallard), « Approches des usages des technologies de l'information et de la communication » (responsable : Jean Ravestein).

b) Les contraintes imposées à la rédaction du projet ont provoqué une réduction draconienne de la place allouée à chaque équipe, et donc à chaque sous-équipe, pour expliciter son apport au projet global de l'UMR. Pour ce qui est de l'équipe TAD – ou plutôt, donc, de la sous-équipe « Développement de la théorie anthropologique du didactique » –, ce qui a survécu d'une présentation plus détaillée est ceci, que je ne commenterai pas davantage ici :

> *Développement de la théorie anthropologique du didactique*
> Ce programme de recherche se déploie selon trois dimensions correspondant aux grands types de choix inhérents aux institutions didactiques : choix des connaissances à diffuser (les praxéologies), choix des situations didactiques par lesquelles les diffuser, choix des parcours de formation. La variable des choix praxéologiques se conjugue avec deux autres variables : la variable des publics (par exemple les étudiants en sciences de l'éducation) et la variable des univers praxéologiques (par exemple la méthodologie de la recherche et la statistique). Pour l'essentiel, les publics étudiés sont a) les élèves de l'enseignement secondaire, b) les étudiants et les chercheurs en sciences de l'éducation et en didactique, c) les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire, d) les élèves des écoles d'ingénieurs. Les univers praxéologiques sont essentiellement 1) les savoirs mathématiques, 2) les

savoirs de la recherche d'information sur l'Internet, 3) les savoirs du développement durable, 4) les savoirs de la recherche, y compris la statistique et l'analyse de données, 5) les savoirs de la production et de l'édition de textes, 6) les savoirs didactiques de l'étude et de l'enseignement en présence et à distance.

2. Recherche et partage

a) Je voudrais pour terminer faire un commentaire plus général, inspiré par divers épisodes dans le détail desquels, cependant, je n'entrerai pas ici. À l'occasion des discussions qui ont conduit à la partie du projet de l'UMR ADEF concernant l'équipe ACADIS, j'ai pu observer, à vrai dire chez de rares collègues, deux attitudes que je trouve éminemment condamnables. Imaginons qu'un chercheur *x* travaille sur un secteur ou un thème de recherche désigné ici par l'acronyme IDÉES (Innovations DÉsespérément ESpérées) : *x* fait donc des recherches sur les IDÉES, se veut un spécialiste des IDÉES, dirige des thèses sur les IDÉES, etc. J'imagine en outre – bien que ce ne soit pas nécessaire à ma démonstration – que *x* est un chercheur « monocorde », je veux dire qui n'a qu'une corde à son arc : il est sur les IDÉES et sur cela seulement, ne travaille sur rien d'autre ; c'est dire s'il est expert en la matière ! Il entend, bien évidemment, que ce thème de recherche soit mentionné dans le projet du laboratoire, ce qui assurera qu'il puisse poursuivre ses recherches dans ce cadre institutionnel. Bien entendu, pour qu'il en soit ainsi, les responsables du laboratoire, de leur côté, doivent s'assurer que l'ensemble des chercheurs s'engageant, en son sein, à travailler sur les IDÉES est non vide. Or, ici, cet ensemble contient au moins *x*, en sorte que ladite condition est satisfaite. Le thème sera donc dûment inscrit dans le répertoire thématique du laboratoire. Voici alors la première dérive : *x* considère en vérité que le thème des IDÉES n'occupe pas, dans la formulation du projet, suffisamment de place – quelques lignes, alors qu'il aurait pu fournir une page et demie au moins (et une bibliographie de 20 pages). Il en déduit [*sic*] que le laboratoire n'aime pas les IDÉES et n'accueille ce thème que du bout du clavier. Comme il a tendance à s'identifier à son thème de recherche, il en déduit encore [re-*sic*] que le laboratoire ne veut guère de lui, et qu'on ne lui déroule pas un tapis suffisamment rouge et suffisamment long. Bien entendu, vous le savez, tout cela est absurde : le thème des IDÉES est bien là, dûment répertorié, et c'est à *x* (notamment) de le faire vivre comme objet de recherches – le thème ne saurait exister davantage pour avoir fait l'objet de plus longues palabres ! Mais voici maintenant la seconde attitude que j'ai annoncée : dans la droite ligne de son narcissisme scientifique exacerbé, *x* considère qu'il aurait, tenez-vous bien, l'*exclusivité* des recherches sur les IDÉES au sein du laboratoire, et qu'aucun autre que lui ne saurait s'arroger le droit d'un

commerce scientifique avec les IDÉES ! Si, par exemple, il découvre qu'un autre chercheur du laboratoire prétend faire inscrire sur son enseigne, disons, « Obsolescence et IDÉES », il interviendra subrepticement pour obtenir que cela soit retiré. S'il le pouvait, *x* demanderait à avoir l'exclusivité des IDÉES pour toute la France, pour l'Europe, pour la planète entière ! Bien entendu, tout cela n'a rien à voir ni avec l'éthique, ni avec la réalité barbare, forcément barbare du travail scientifique, où quiconque le veut peut travailler sur les IDÉES ou sur tout autre sujet de son choix. Car, en science, on juge l'arbre à ses fruits et le chercheur à ses travaux, non à ses prétentions notariales de petit propriétaire courroucé.

c) Ah ! lecteur crédule ! Tu as donc gobé mon petit apologue ? Tu me déçois, cher lecteur. Tu comprends maintenant ? J'ai cherché, je l'avoue, à t'emberlificoter – sans peut-être y réussir, car ta lucidité, je le sais, est sans pareille ! Mais non, bien sûr, *x* n'existe pas ! Il n'a jamais existé et – je l'espère désespérément – n'existera jamais que dans mon imagination joueuse, que la fin d'une année non moins laborieuse que les précédentes échauffe quelque peu. Arrêtons donc là cette courte satire ; et faisons ensemble le départ entre la fantaisie, enchantée ou monstrueuse, qui nous est quelquefois nécessaire, à nous les humains, pour comprendre le monde comme il va, et la quiétude désenchantée du réel, à laquelle je vous invite à revenir maintenant : bonnes et studieuses vacances d'été à tous, *x* compris !

That's all, folks!

Annexe au journal de la séance 8

Le test du χ^2

e) Voici tout d'abord un petit schéma de raisonnement, d'abord déterministe, ensuite aléatoire, qui éclaire ce que l'on fait dans un test statistique.

➔ Soit deux propositions *p* et *q*. On a le schéma de raisonnement suivant (que l'on peut appeler « raisonnement par contraposition ») :

> Si *p* était vraie, alors *q* serait fausse. Or *q* est vraie. Donc *p* est fausse.

Ce schéma s'exprime par la tautologie suivante : $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge q] \Rightarrow \neg p$. Cela rappelé, modifions un peu le vocabulaire et les notations. On suppose que l'on considère une certaine hypothèse H_0 (dite en statistique *hypothèse nulle*) et un certain événement *E*, liés par l'énoncé suivant :

> Si H_0 était vraie, alors l'événement *E* ne pourrait pas se produire. Or on a observé la survenue de *E*. Donc H_0 est fausse.

Dans le cas *non déterministe*, on suppose que l'on dispose d'un *modèle probabiliste* qui fournit la probabilité de survenue de l'événement *E* sous l'hypothèse H_0, ce qu'on note classiquement $P(E \mid H_0)$ et qu'on lit dans un langage abrégé : « probabilité de *E* sachant H_0 ». On a alors le schéma de raisonnement suivant, où δ est un nombre positif inférieur ou égal à 1 :

> Si H_0 était vraie, alors l'événement *E* aurait une probabilité de survenir $P(E \mid H_0)$ inférieure ou égale à δ. Or on a observé la survenue de *E*. Donc on a observé la survenue d'un événement de probabilité inférieure δ.

Comme on le voit, le « raisonnement » est incomplet : on s'attendrait à une conclusion touchant la vérité ou la fausseté de H_0 ! Or ce qui manque est moins une conclusion qu'une *décision*. Supposons que l'on se soit fixé la règle d'action suivante : si la probabilité $P(E \mid H_0)$ est inférieure ou égale à, disons, 1/10 000, et si *E* se produit, je considérerai que ce résultat n'est pas « croyable », en ce sens que *je ne peux pas croire* que je viens de voir se produire sous mes yeux un événement si improbable ; je déciderai alors *de tenir H_0 pour fausse* – on dira que je *rejette* H_0 (tout en étant conscient que je peux faire erreur : il est des événements plus rares encore qui se produisent !).

➔ On peut s'excentrer de ce schéma « subjectif » *en l'objectivant*. Soit un nombre ε compris strictement entre 0 et 1, par exemple ε = 1/100. On a

observé la survenue d'un événement E tel que $P(E \mid H_0) \leq \varepsilon$; on dira alors que H_0 est rejeté au seuil ε. Si ε est grand, par exemple ε = 0,5 = 50 %, on va *rejeter H_0 à tort* en bien des cas : c'est ce qu'on nomme le risque de *première espèce*. Si ε est très petit, par exemple $\varepsilon = 10^{-6}$, on va souvent *accepter H_0* à tort : c'est le risque de *deuxième espèce*.

➔ Voici maintenant un exemple d'utilisation du test du χ^2 – une praxéologie dont on ne rendra ici claire qu'une partie. On considère une population de personnes. On suppose qu'on en a extrait au hasard un échantillon de 6800 personnes sur lesquelles on a prélevé chaque fois deux informations, la couleur de yeux, *X*, et la couleur des cheveux, *Y*. On pense que ces deux caractères *ne sont pas indépendants* – que par exemple, quand on a les cheveux blonds, on a plus souvent les yeux bleus, etc. Considérons le tableau suivant.

	Blond	Brun	Noir	Roux	Totaux
Bleu					2811
Gris-vert					3132
Brun					857
Totaux	2829	2632	1223	116	6800

On va alors formuler l'hypothèse nulle H_0 selon laquelle *X* et *Y* seraient indépendants – avec, bien sûr, l'idée que H_0 est *fausse*, et l'espoir de pouvoir *la rejeter*, même en étant exigeant, par exemple en prenant un seuil ε égal à 1/1000. Si *X* et *Y* étaient indépendants, la distribution des différentes couleurs de cheveux parmi les personnes aux yeux bleus serait la même que dans l'échantillon tout entier : il y aurait par exemple une proportion de $\frac{2829}{6800} \approx 41{,}6\ \%$ des enquêtés qui auraient les yeux bleus, soit exactement $\frac{2829}{6800} \times 2811$ personnes ayant les yeux bleus. On aurait pu aussi calculer la proportion de personnes ayant les cheveux blonds parmi les personnes ayant les yeux bleus. Elle devrait être la même que dans l'échantillon tout entier, soit $\frac{2811}{6800}$, en sorte que le nombre de personnes ayant à la fois les yeux bleus et les cheveux blonds serait égal à $\frac{2811}{6800} \times 2829$. On retrouve ainsi le même effectif « théorique », que l'on peut écrire ainsi : $c_{11} = \frac{2829 \times 2811}{6800} \approx 1170$. On remplit de même les autres cellules du tableau :

	Blond	Brun	Noir	Roux	Totaux
Bleu	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	2811
Gris-vert	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	3132

Brun	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{33}	857
Totaux	2829	2632	1223	116	6800

Voici maintenant le tableau « empirique » formés par les effectifs *observés*.

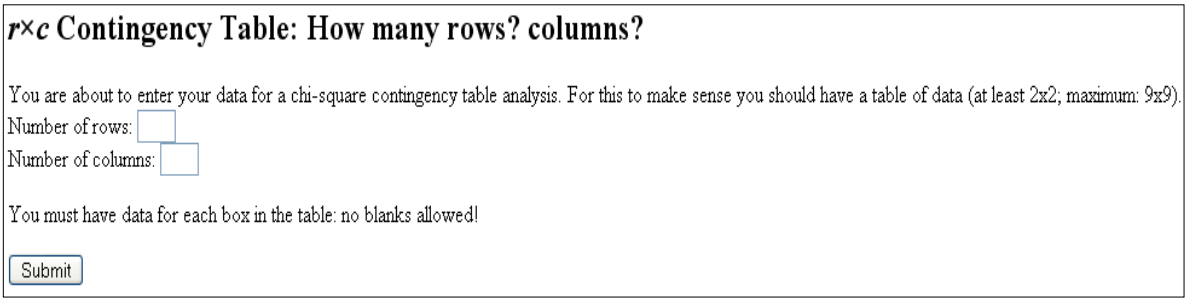
	Blond	Brun	Noir	Roux	Totaux
Bleu	1768	807	189	47	2811
Gris-vert	946	1387	746	53	3132
Brun	115	438	1223	16	857
Totaux	2829	2632	1223	116	6800

On voit que, dans le cas des personnes à yeux bleus et cheveux blonds, ce tableau observé s'éloigne du tableau théorique : l'effectif observé (1768) est assez nettement *supérieur* à l'effectif théorique (1170). Cet écart entre tableau théorique et tableau empiriquement observé et les autres écarts (en plus ou en moins) que nous pourrions calculer sont-ils explicables par la fluctuation d'échantillonnage, qui peut expliquer de petites écarts aux effectifs théoriques ? C'est là qu'intervient le teste du χ^2.

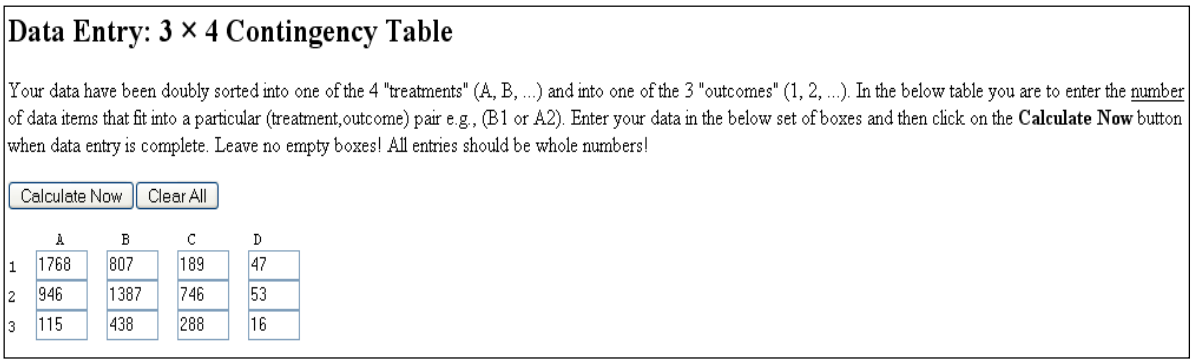
➔ Le χ^2 est un indicateur numérique qui évalue la *distance* ou, disons, la *dissemblance* entre les deux tableaux : si on note n_{ij} les effectifs *observés*, on a de façon générale

$$\chi^2 = \sum_{i,\,j} \frac{(n_{ij} - c_{ij})^2}{c_{ij}}.$$

Ici, le calcul donne : $\chi^2 \approx 1075$. L'événement E évoqué plus haut est $\chi^2 \geq 1075$. Or il se trouve que la probabilité d'observer cet événement – une distance aussi grande que 1075 – sous l'hypothèse H_0 d'indépendance *est très faible*. En fait, elle est *quasi nulle*. Comment le savoir ? On peut aujourd'hui utiliser un calculateur en ligne comme celui que l'on voit utilisé ci-après (http://www.physics.csbsju.edu/stats/contingency_NROW_NCOLUMN_form.html). Voici le premier écran que l'on rencontre.



Le nombre de lignes (*rows*) est ici 3, le nombre de colonnes (*columns*) 4. En cliquant sur *Submit*, on voit apparaître un écran comportant une table 3 × 4 où l'on saisit les effectifs empiriques observés.



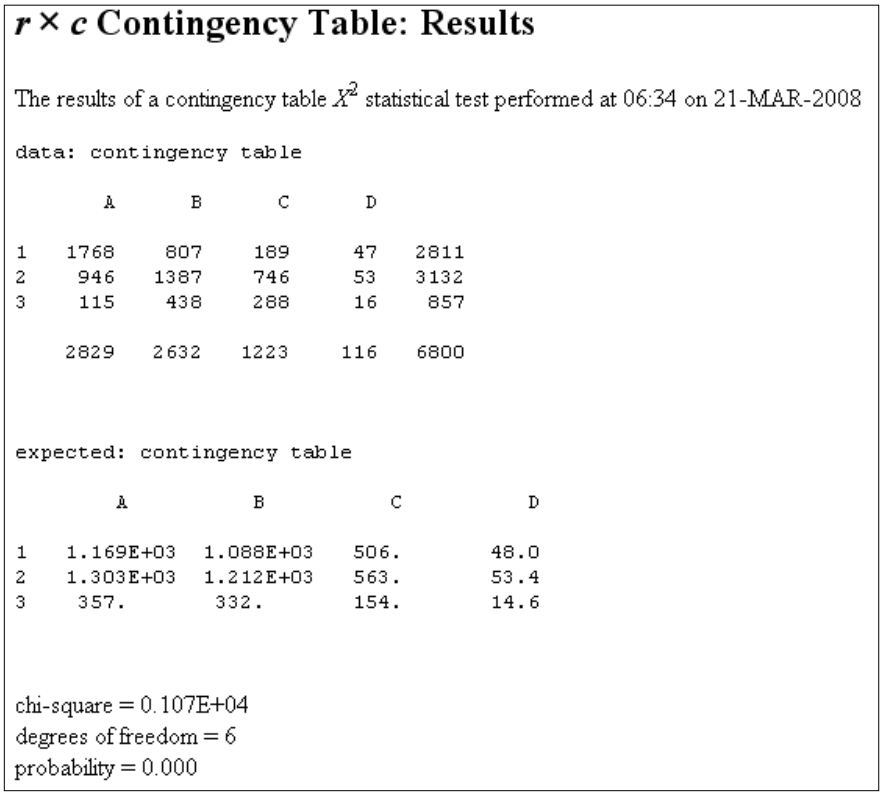
Data Entry: 3 × 4 Contingency Table

Your data have been doubly sorted into one of the 4 "treatments" (A, B, ...) and into one of the 3 "outcomes" (1, 2, ...). In the below table you are to enter the number of data items that fit into a particular (treatment,outcome) pair e.g., (B1 or A2). Enter your data in the below set of boxes and then click on the **Calculate Now** button when data entry is complete. Leave no empty boxes! All entries should be whole numbers!

Calculate Now | Clear All

	A	B	C	D
1	1768	807	189	47
2	946	1387	746	53
3	115	438	288	16

En cliquant sur *Calculate Now*, on obtient alors ceci.



$r \times c$ Contingency Table: Results

The results of a contingency table X^2 statistical test performed at 06:34 on 21-MAR-2008

data: contingency table

	A	B	C	D	
1	1768	807	189	47	2811
2	946	1387	746	53	3132
3	115	438	288	16	857
	2829	2632	1223	116	6800

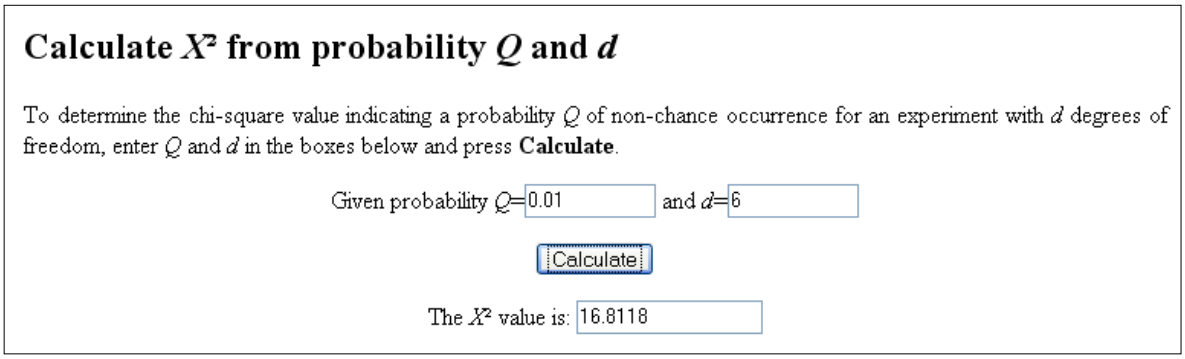
expected: contingency table

	A	B	C	D
1	1.169E+03	1.088E+03	506.	48.0
2	1.303E+03	1.212E+03	563.	53.4
3	357.	332.	154.	14.6

chi-square = 0.107E+04
degrees of freedom = 6
probability = 0.000

Le logiciel a calculé 1. les effectifs marginaux, 2. les effectifs théoriques, 3. la valeur de χ^2, 4. le nombre de degrés de liberté (*degrees of freedom*, notion sur laquelle on reviendra : ce nombre vaut ici (3 – 1)(4 – 1) = 6), 5. La probabilité de l'événement $\chi^2 \geq 0{,}107 \cdot 10^4$, qu'il trouve égale à 0,000. Dans cette situation, on ne peut guère que *rejeter* l'hypothèse d'indépendance entre les caractères *X* et *Y*. On est ici, en vérité, dans un cas qui illustre cette remarque de l'auteur des *Méthodes d'analyse d'enquêtes* : « On se souviendra que le khi-deux étant sensible aux effectifs, dès qu'une

population d'enquêtés devient importante, il devient rare que le khi-deux d'un tableau croisé ne soit pas significatif. » De fait, à l'aide du calculateur disponible à l'adresse http://www.fourmilab.ch/rpkp/experiments/analysis/chiCalc.html, on obtient par exemple ceci.



Autrement dit, pour que la différence entre les deux tableaux – théorique et observé – soit significative au seuil de 1 %, il suffit que χ^2 atteigne ou dépasse la valeur 16,8118. Voici un tableau de valeurs que l'on obtient avec le même calculateur (pour 6 degrés de liberté).

Prob. ≤ …	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
$\chi^2 \geq$ …	16,8118	22.4577	27.8563	33.1070	38.2583	43.3292	48.1824	51.6164

Observer un χ^2 de plus de 52 est, sous l'hypothèse d'indépendance de X et Y, un événement dont la probabilité est déjà inférieure à *un milliardième* ; observer un χ^2 de plus 1070 a donc une probabilité infinitésimale.

Fin de l'annexe au journal de la séance 8