

## UMR ADEF

### JOURNAL DU SEMINAIRE TAD/IDD

#### Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement

*Toda pregunta implica la pérdida de una intimidad o el extinguirse de una adoración. María Zambrano (1904-1991)*

*There is a phrase I learned in college called, "having a healthy disregard for the impossible." That is a really good phrase. Larry Page (1973-?)*

*Le séminaire TAD & IDD est animé par Yves Chevallard au sein de l'équipe 1 de l'UMR ADEF, dont le domaine général de recherche s'intitule « École et anthropologie didactique des savoirs ».*

*Ce séminaire a, solidairement, une double visée. D'une part, il vise à mettre en débat des recherches (achevées, en cours ou en projet) touchant à la TAD ou, dans ce cadre, à des problèmes d'ingénierie didactique du développement, quel qu'en soit le cadre institutionnel. D'autre part, il vise à faire émerger les problèmes de tous ordres touchant au développement didactique des institutions, et notamment de la profession de professeur de mathématiques.*

*Deux domaines de recherche sont au cœur du séminaire : un domaine en émergence, la didactique de l'enquête codisciplinaire ; un domaine en devenir, la didactique des savoirs mathématiques.*

*La conduite des séances et leur suivi se fixent notamment pour objectif d'aider les participants à étendre et à approfondir leur connaissance théorique et leur maîtrise pratique de la TAD et des outils de divers ordres que cette théorie apporte ou permet d'élaborer.*

*Sauf exception, les séances se déroulent le vendredi après-midi, de 15 h à 17 h puis de 17 h 30 à 19 h 30, cette seconde partie pouvant être suivie en visioconférence.*

### → Séance 2 – Vendredi 23 novembre 2007

## ÉCONOMIE PRAXÉOLOGIQUE ET UTILITÉ

### 1. La folklorisation des connaissances

a) Je consacrerai cette séance à un thème qui émerge dans les travaux en cours. On souffrira donc que rien n'y paraisse définitif, arrêté, et malheureusement aussi que beaucoup des notations qui suivent indiquent une direction sans proposer toujours d'avancées clairement lisibles. Le thème en question, c'est celui de *l'utilité des savoirs*, et plus généralement des équipements praxéologiques (personnels et institutionnels : les deux vont presque toujours de pair) ; ou, plus précisément, encore celui des praxéologies *utiles* lorsqu'une question *Q* se pose. Deux objectifs sont ici poursuivis à ce propos : poser le problème des praxéologies utiles en les saisissant notamment comme praxéologies *manquantes* ; mettre en évidence un phénomène essentiel touchant les organisations praxéologiques, celui de leur *figement* institutionnel (et personnel), qui s'oppose aux dynamiques visant l'utilité, en imposant comme allant de soi ce qui n'est que le fruit –

ayant (eu) son utilité – d’une construction historiquement déterminée, sans vertu d’éternité ni d’universalité.

b) Je commencerai par préciser la notion de *folklore* telle que je l’utilise généralement. Le mot *folklore* a été créé en anglais au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle : la notice suivante, extraite d’un dictionnaire étymologique en ligne, en rappelle sommairement l’histoire – dont elle donne peut-être une version... folklorique (<http://www.etymonline.com/index.php?term=folklore>).

**Folklore.** 1846, coined by antiquarian William J. Thoms (1803-85) as an Anglo-Saxonism (replacing *popular antiquaries*) and first published in the “*Athenaeum*” of Aug. 22, 1846, from *folk* + *lore*. This word revived *folk* in a modern sense of “of the common people, whose culture is handed down orally,” and opened up a flood of compound formations, eg. *folk art* (1921), *folk-hero* (1899), *folk-medicine* (1898), *folk-tale* (1891), *folk-song* (1847), *folk-dance* (1912). *Folk-music* is from 1889; in reference to the branch of modern popular music (originally associated with Greenwich Village in New York City) it dates from 1958.

- Le mot *folklore* a aujourd’hui, en anglais, trois orientations sémantiques proches mais distinctes (les citations qui suivent sont toutes empruntées au *OneLook Dictionary*). Tout d’abord, il désigne les “traditional customs, tales, sayings, dances, or art forms preserved among a people”, les “legends, traditions, customs, beliefs, and the like, of a racial, geographical, or national group, handed down through the generations”, les “traditional beliefs, legends, customs, etc., of a people”, bref, ce qui constitue “the lore of a people”. Ensuite, il étiquette “a branch of knowledge that deals with folklore”, “the study of traditional stories, music, and customs”, “the comparative study of folk knowledge and culture”, qui est “also called folkloristics”. Enfin, le même terme se rapporte à “an often unsupported notion, story, or saying that is widely circulated”, “a body of widely accepted but usually specious notions about a place, a group, or an institution”, “a popular but unfounded belief”, “a body of widely held but false or unsubstantiated beliefs”. C’est dans un sens proche de cette dernière acception que j’utiliserai, en français, le mot de folklore, en subsumant sous ce concept des assertions réputées bien connues dans un certain milieu humain où elles sont généralement tenues pour vraies sans toutefois avoir été récemment éprouvées, statut propice à la propagation d’erreurs ou d’à-peu-près.

- Le sens de « folklore » évoqué en dernier lieu est familier au mathématicien, à ce point que l’encyclopédie en ligne Wikipedia lui consacre un bref article, que je reproduis ci-après ([http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical\\_folklore](http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_folklore)).

#### *Mathematical Folklore*

As the term is understood by mathematicians, **folk mathematics** or **mathematical folklore** means theorems, definitions, proofs, or mathematical facts or techniques that circulate among mathematicians by word-of-mouth but have not appeared in print, either in books or in scholarly journals.

Quite important at times for researchers are **folk theorems**, which are results known, at least to experts in a field, and considered to have established status, but

not published in complete form. Sometimes these are only alluded to in the public literature. For example, in tidying up loose ends of the classification of finite simple groups around 2004 (a result which had been claimed, somewhat prematurely, to be proved around 1980), Michael Aschbacher devoted an entire volume to proving various infrastructural results, some of which had not previously been proved in print. [1] Another distinct category is **wellknowable** mathematics, a term introduced by John Conway. This consists of matters that are known and factual, but not in active circulation in relation with current research. Both of these concepts are attempts to describe the actual context in which research work is done.

Some people, principally non-mathematicians, use the term folk mathematics to refer to the informal mathematics studied in many ethno-cultural studies of mathematics.

### References

1. ^ Michael Aschbacher, The Status of the Classification of the Finite Simple Groups, *Notices of the American Mathematical Society*, August 2004

- Pour compléter cette présentation, voici le début de l'article de Michael Aschbacher (<http://www.ams.org/notices/200407/fea-aschbacher.pdf>). On regardera ici comme une boîte noire « la classification des groupes finis simples » et la notion même de « groupe fini simple ».

Common wisdom has it that the theorem classifying the finite simple groups was proved around 1980. However, the proof of the Classification is not an ordinary proof because of its length and complexity, and even in the eighties it was a bit controversial. Soon after the theorem was established, Gorenstein, Lyons, and Solomon (GLS) launched a program to simplify large parts of the proof and, perhaps of more importance, to write it down clearly and carefully in one place, appealing only to a few elementary texts on finite and algebraic groups and supplying proofs of any “well-known” results used in the original proof, since such proofs were scattered throughout the literature or, worse, did not even appear in the literature. However, the GLS program is not yet complete, and over the last twenty years gaps have been discovered in the original proof of the Classification. Most of these gaps were quickly eliminated, but one presented serious difficulties. The serious gap has recently been closed, so it is perhaps a good time to review the status of the Classification. I will begin slowly with an introduction to the problem and with some motivation.

c) Il semble en vérité que, dans une institution donnée, et pour un savoir donné, des connaissances folkloriques spécifiques de ce savoir soient *indispensables* à son fonctionnement praxéologique. Dans l'exemple précédent, ainsi, le programme GLS supposait tout de même les connaissances présentes dans un certain nombre d'ouvrages élémentaires “on finite and algebraic groups”. Or il est hautement vraisemblable que de telles connaissances elles-mêmes reposent sur un humus de connaissances folkloriques.

- Bien entendu, une gestion collective raisonnée des savoirs suppose que, lorsqu'une part du folklore ambiant risque de se constituer en obstacle à l'avancement de la connaissance, on s'affaire à le déconstruire pour l'établir ensuite sur une base mieux contrôlée. J'ai ainsi attiré l'attention sur la légende scolaire selon laquelle deux fractions ayant leurs premières

décimales identiques pourraient cependant différer par exemple par leur 40<sup>e</sup> décimale. Considérons à titre d'exemple la paire de fractions suivantes :

$$\frac{2941}{3287} \text{ et } \frac{2159}{2413}.$$

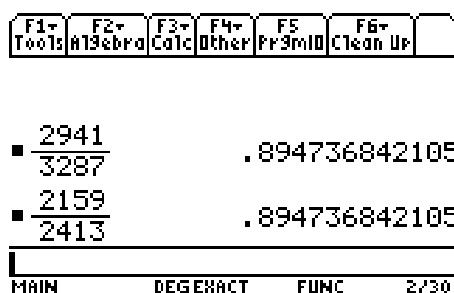
Si ces fractions *ne sont pas égales*, la valeur absolue de leur différence est *supérieure ou égale à*

$$\frac{1}{3287 \times 2413}.$$

Leur différence est donc, en valeur absolue, *strictement supérieure à*

$$\frac{1}{4000 \times 2500} = \frac{1}{10\,000\,000} = 10^{-7}.$$

Or, que dit la calculatrice ? Voici.



Si l'on se fie à ce milieu qu'est la calculatrice utilisée ici, la différence est *très inférieure* à  $10^{-7}$  ; les deux fractions ne peuvent donc qu'avoir *la même valeur* :

$$\frac{2941}{3287} = \frac{2159}{2413}.$$

• On peut alors souligner ce fait : un certain folklore numérique solidement installé dans la culture de l'enseignement secondaire des mathématiques, qui prend la place de savoirs aujourd'hui utiles, fonctionne en l'espèce comme un obstacle à l'intégration *juste* de la calculatrice parmi les instruments légitimes du travail mathématique. En règle générale, bien que nécessaire, la folklorisation des praxéologies installe des zones opaques qui vont nuire au problème central que je voudrais évoquer ici : celui des praxéologies « utiles », la notion d'utilité dépendant bien évidemment de l'utilisation visée.

## 2. La question des savoirs « utiles »

a) En recherchant récemment un élément *d'un certain* folklore informatique (à propos de l'Arpanet, que ce folklore présente comme l'ancêtre de l'Internet), je suis tombé sur une expression qui a naguère fait florès : celle d'*autoroute de l'information*. Une courte enquête permet d'établir qu'il s'agit là, en français, de la traduction de l'expression (américaine) *Information superhighway*.

- Selon l'article que l'encyclopédie Wikipedia consacre à cette expression ([http://en.wikipedia.org/wiki/Information\\_superhighway](http://en.wikipedia.org/wiki/Information_superhighway)), le vénérable OED (*Oxford English Dictionary*) précise que celle-ci désigne “a route or network for the high-speed transfer of information; esp. (a) a proposed national fiber-optic network in the United States; (b) the Internet.”

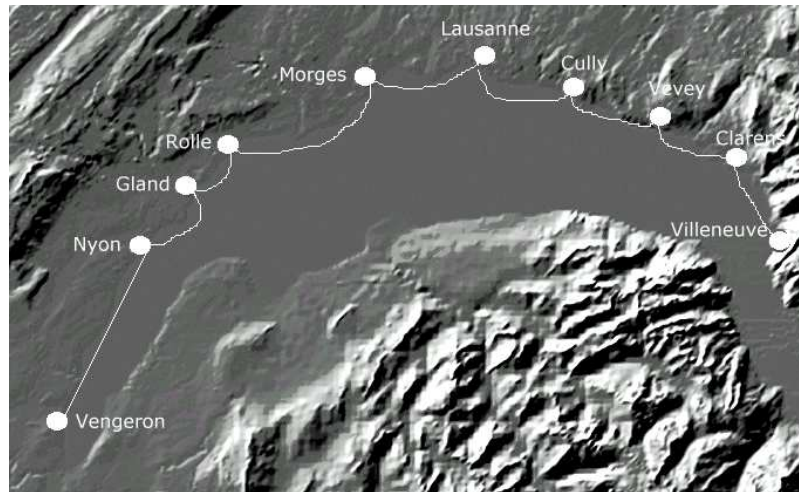
- Selon la même source, on lit dans le numéro daté du 3 janvier 1983 de l'hebdomadaire *Newsweek* que “information superhighways being built of fiber-optic cable will link Boston, New York, Philadelphia, and Washington, D. C. in a 776-mile system on the East Coast”.

- On sait aussi – ou on peut apprendre – que le vice-président Al Gore a popularisé l'expression dans les années 1990. C'est ainsi que l'édition du 26 octobre 1993 du *New York Times* précisait : “One of the technologies Vice President Al Gore is pushing is the information superhighway, which will link everyone at home or office to everything else—movies and television shows, shopping services, electronic mail and huge collections of data.”

b) Que peut – ou pouvait – avoir néanmoins d'obscurcissant la métaphore de « l'autoroute de l'information » ? Voici ce qu'en dit, dans un livre publié alors que cette image autoroutière était florissante (Christian Huitema, *Et Dieu créa l'Internet...*, Eyrolles, 1995, p. 71-72), l'un des rares Français qui ont été tôt associés à l'épopée de l'Internet.

On utilise souvent, pour décrire l'interconnexion des réseaux formant l'Internet, une métaphore routière. Il y aurait de grandes « autoroutes de l'information », des bretelles d'accès, des départementales. Je trouve cette image autoroutière particulièrement détestable. Quand on parle de construire des autoroutes, on voit tout de suite des bataillons de bulldozers abattre les forêts et raser les collines, des norias de camions déverser graviers et ciment, six voies de goudron traverser le pays. Or il s'agit seulement de fibres optiques, d'un micron de diamètre. Un millième de millimètre de verre ne saurait avoir le même coût ni le même impact que cinquante mètres de béton. Mais cette référence aux autoroutes amène aussi, plus subtilement, une idée de monopole. Il paraîtrait absurde de tracer, entre Paris, Lyon et Marseille, trois autoroutes à péage concurrentes. Nos amis les écologistes ne manqueraient pas d'aller s'asseoir devant les pelleteuses pour protester. Si on parle trop vite d'autoroutes de l'information, on risque d'avaler sans y réfléchir la même conclusion, qu'il s'agit d'un investissement gigantesque qu'on devrait obligatoirement confier à une administration monopolistique.

- Ici, la connaissance « manquante », selon l'auteur, c'est simplement qu'une fibre optique a un micron de diamètre. Bien entendu, une telle connaissance existe mal toute seule. Pour qu'elle « tienne », je la compléterai en empruntant au dossier *La fibre optique en images* de l'Université de Genève (<http://www.httr.ups-tlse.fr/pedagogie/cours/fibre/welcome.htm>). Je reproduis donc ci-après, sans commentaires, trois images relatives à pose de la fibre optique dans le lac Lemman.



b) Une connaissance apparaît manquante lorsqu'elle est *utile* afin qu'un certain « état du monde » jugé désirable advienne. La folklorisation des connaissances tend à masquer les connaissances utiles sous des « faits bien connus ». Je donnerai ici un exemple très simple, emprunté à une récente « micro-épreuve » proposée en première année de mathématiques à l'UFRM d'Aix-Marseille.

- Soit un entier  $n \geq 2$  ; il est clair que  $n$  et  $n + 1$  n'ont pas de diviseur commun autre que 1.
- Considérons alors la suite d'entiers définie par  $G_2 = 6$  et, pour tout  $n \geq 3$ ,

$$G_n = G_{n-1}(G_{n-1} + 1).$$

On voit que  $G_2$  a deux diviseurs premiers distincts (à savoir 2 et 3). Supposons que  $G_{n-1}$  en possède *au moins*  $n - 1$ . Comme l'entier  $G_{n-1} + 1$  n'a pas de diviseur premier commun avec  $G_{n-1}$ , on peut en conclure que

$$G_n = G_{n-1}(G_{n-1} + 1)$$

possède au moins  $(n - 1) + 1 = n$  diviseurs premiers distincts. La conclusion suit : le nombre de nombres premiers est supérieur à tout entier  $n$ . On a en pratique

$$G_3 = G_2(G_2 + 1) = 6 \times 7 = 2 \times 3 \times 7 ;$$

$$G_4 = G_3(G_3 + 1) = 2 \times 3 \times 7 \times 43 ;$$

$$G_5 = G_4(G_4 + 1) = 2 \times 3 \times 7 \times 43 \times 1807 = 2 \times 3 \times 7 \times 43 \times (13 \times 139)$$

$$= 2 \times 3 \times 7 \times 13 \times 43 \times 139 ;$$

$$G_6 = 2 \times 3 \times 7 \times 13 \times 43 \times 139 \times 3263443 ;$$

etc.

- La connaissance clé passée sous silence dans ce qui précède est la suivante : *tout entier  $\geq 2$  possède un diviseur premier*. Dans le folklore que l'on trouve aujourd'hui dans les manuels de seconde figure (à tort) la propriété « bien connue » selon laquelle tout entier  $\geq 2$  possède une décomposition « unique » en un produit de facteurs premiers. Or cette propriété « gêne » l'appel à la propriété dont la connaissance a été dite manquante ci-dessus – propriété qui, classiquement (c'est-à-dire dans un état antérieur de l'organisation de connaissances concernée), est facile à démontrer (en même temps qu'elle permet une démonstration simple de l'existence d'une décomposition en un produit de facteurs premiers).

c) La question des savoirs utiles, du « manque » de ces savoirs et de la « compensation » relative qu'apporte, de façon souvent peu heureuse, la folklorisation doit être soulevée de façon récurrente dans l'analyse d'un curriculum. Je reprendrai ici un exemple que Gisèle Cirade a traité dans sa thèse récente et qu'elle a en outre choisi de présenter dans sa communication au congrès d'Uzès : celui de l'existence d'une écriture « canonique » des fractions d'entiers, l'expression « écriture canonique » désignant ici un système de notation dans lequel toute fraction d'entiers a une écriture bien déterminée, *unique*, si bien que deux écritures fractionnaires désignant le *même* nombre auront la même écriture canonique.

- Le résultat essentiel – que l'on acceptera ici provisoirement – est à cet égard le suivant : étant donné une fraction d'entiers strictement positifs,  $\frac{a}{b}$ , il existe un couple *unique*  $(c, d)$  d'entiers strictement positifs tels que  $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ ,  $c$  et  $d$  n'ayant *pas de diviseurs communs* autres que 1.

• On peut déduire de là la technique suivante pour obtenir ce qu'on nommera la *forme irréductible*  $\frac{c}{d}$  d'une fraction  $\frac{a}{b}$  : on procède à des divisions de  $a$  et  $b$  par des diviseurs entiers communs à  $a$  et  $b$ , et cela jusqu'à ce qu'on obtienne une fraction d'entiers dont le numérateur et le dénominateur n'ont plus de diviseur commun hormis 1. D'après l'unicité affirmée dans le théorème, cette fraction sera alors *la* forme irréductible cherchée.

- Le seul point qu'il resterait à justifier, c'est que la procédure de divisions successives par des entiers strictement supérieurs à 1 *ne se poursuit pas indéfiniment*. La chose résulte, classiquement, du fait que, dans  $\mathbb{N}^*$ , il n'existe pas de suite descendante infinie. J'admets ici, cependant, que l'on puisse laisser à ce phénomène son statut d'évidence folklorisée : « Lorsqu'on divise, ça devient de plus en plus petit et, à un moment, forcément ça s'arrête, on ne peut plus diviser. » Tout cela étant tenu pour acquis, on

retrouve ainsi, de façon « justifiée », un geste effectué familièrement dans les classes de 3<sup>e</sup> : on essaie de simplifier « le plus possible » ; lorsqu'il n'est plus possible de simplifier, on tient la forme irréductible de la fraction examinée.

- On voit toutefois que *l'obtention de fait* de la forme irréductible ne suppose pas, inversement, la connaissance du théorème d'existence et d'unicité formulé plus haut. Pour cette raison, on peut, dès la 4<sup>e</sup> (et même avant), en « simplifiant le plus possible », obtenir *de fait* la forme irréductible des fractions manipulées, sans pour autant s'interroger sur l'existence et l'unicité d'une telle écriture. Cette manipulation permet notamment de voir que deux fractions sont égales dès lors que l'une et l'autre donnent par simplification la même fraction d'entiers. Mais la réciproque pose problème si l'on ne dispose pas du résultat d'unicité : comment conclure, par exemple, si  $c$  et  $d$  d'un côté sont premiers entre eux et si  $e$  et  $f$  d'un autre côté sont premiers entre eux, et si *on n'a pas*  $c = e$  et  $d = f$ , que, alors, on a  $\frac{c}{d} \neq \frac{e}{f}$  ? La situation se règle aisément, bien entendu, si l'on a soit  $c = e$  et  $d \neq f$ , soit  $c \neq e$  et  $d = f$  ; mais le cas général est beaucoup plus résistant.

- Pour le montrer, considérons la contraposée de la proposition en cause : si  $\frac{c}{d}$  et  $\frac{e}{f}$  sont des fractions irréductibles et si  $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$  alors  $c = e$  et  $d = f$ . En voici la démonstration classique : « L'hypothèse que  $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$  implique l'égalité  $cf = ed$  ; l'entier  $c$ , qui divise  $cf$ , divise donc  $de$  ; étant premier avec  $d$ , il divise  $e$  (théorème de Gauss). On montre de la même façon que  $e$  divise  $c$ , ce qui entraîne, dans  $\mathbb{N}^*$ , que  $c = e$ , d'où il résulte aussitôt que  $f = d$ . » Mais cette démonstration est regardée aujourd'hui hors de portée de classes du collège. Une voie possible pour contourner la difficulté est alors la suivante : au lieu de prendre pour définition de la forme irréductible celle que nous avons évoquée (le numérateur et le dénominateur sont des entiers positifs premiers entre eux), on peut adopter, au niveau technologique, une définition qui ne répond pas immédiatement à l'usage technique de simplifier en divisant numérateur et dénominateur jusqu'à ne plus pouvoir le faire, mais qui se révèle plus maniable au plan *technologique*. Étant donné une fraction d'entiers  $\frac{a}{b}$ , avec  $a$  et  $b$  non nuls, on dira que  $\frac{c}{d}$  est *une forme minimale* de  $\frac{a}{b}$  s'il n'existe pas de fraction  $\frac{c'}{d'}$  telle que  $c' < c$  et  $\frac{c'}{d'} = \frac{a}{b}$ . Le résultat d'existence et d'unicité attendu peut alors s'établir de la façon suivante, en commençant par l'unicité. Si  $\frac{c}{d}$  est une forme minimale de  $\frac{a}{b}$  et si  $\frac{c'}{d'}$  en est une autre, on a nécessairement  $c' = c$  ; comme  $\frac{c'}{d'} = \frac{c}{d}$ , il en résulte aussitôt que  $d' = d$ .

- L'unicité étant ainsi démontrée, il reste à établir l'existence. C'est ici que la voie ouverte par la définition posée présente un avantage redoutable, celui de fournir une démonstration d'apparence naturelle. Pour  $a$  et  $b$  donnés,

considérons en effet l'ensemble  $C$  des entiers  $c$  tels qu'il existe  $d$  vérifiant l'égalité  $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$  ; cet ensemble n'est pas vide (il contient  $a$ , et aussi  $2a$ ,  $3a$ , etc.). Soit alors  $c_0$  le premier (le plus petit) élément de  $C$ , et soit  $d_0$  l'entier tel que  $\frac{c_0}{d_0} = \frac{a}{b}$  : il est clair que  $\frac{c_0}{d_0}$  est la forme minimale de la fraction  $\frac{a}{b}$ . Bien entendu, dire que l'on prend le premier élément de  $C$  suppose qu'on se réfère à la propriété de l'ordre de  $\mathbb{N}$  d'être un *bon ordre*, laquelle entraîne toutes les propriétés importantes sur les entiers, division euclidienne et théorème de Gauss inclus.

- Notons en passant que, si l'on a  $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$ , alors les fractions  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{u}{v}$  ont la même forme minimale. Cela noté, on voit à l'évidence que si  $\frac{c}{d}$  est la forme minimale de  $\frac{a}{b}$ , alors  $c$  et  $d$  n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité : la forme minimale est irréductible. Mais la réciproque est-elle vraie ? Énonçons d'abord la propriété suivante : si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , où  $\frac{c}{d}$  est la forme minimale de  $\frac{a}{b}$ , il existe un entier  $n$  tel que  $a = nc$  et  $b = nd$ . Avant d'établir ce théorème, tirons-en ce corollaire essentiel : si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  avec  $(c, d) = 1$ , c'est-à-dire avec  $\frac{c}{d}$  non simplifiable, alors  $\frac{c}{d}$  est la forme minimale de  $\frac{a}{b}$ . En effet, soit  $\frac{c'}{d'}$  la forme minimale de  $\frac{a}{b}$  ; c'est aussi la forme minimale de  $\frac{c}{d}$ , en sorte qu'il existe un entier  $n$  supérieur ou égal à 1 tel que  $c = nc'$  et  $d = nd'$ . Comme on suppose que  $c$  et  $d$  sont premiers entre eux, on a aussi nécessairement  $n = 1$ , et donc  $c = c'$  et  $d = d'$ , CQFD.

- Ce résultat induit l'algorithme mis en œuvre *de facto* au collège : pour trouver la forme irréductible d'une fraction, simplifier la fraction jusqu'à ce qu'elle ne soit plus simplifiable. La *technologie* évoquée – fondée sur la notion de forme minimale d'une fraction d'entiers – rejoint ainsi la *technique* usuelle de « simplification ». Pour que l'exposé soit complet, il reste cependant à démontrer la propriété dont on vient d'examiner le corollaire. Supposons donc  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  avec  $\frac{c}{d}$  minimale. On a évidemment  $c \leq a$ . Effectuons la division euclidienne de  $a$  par  $c$  ; on obtient l'égalité  $a = nc + r$ , où  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq r < c$ . On a alors

$$b = a \times \frac{b}{a} = a \times \frac{d}{c} = (nc + r) \times \frac{d}{c} = nd + \frac{rd}{c}.$$

Comme  $b$  et  $nd$  sont des entiers,  $s = \frac{rd}{c}$  est un entier. Si  $r$  n'est pas nul,  $s$  ne l'est pas davantage et il vient  $\frac{c}{d} = \frac{r}{s}$ , avec  $r < c$ , ce qui est contradictoire avec

l'hypothèse que  $\frac{c}{d}$  est la forme minimale de  $\frac{a}{b}$ . On a donc  $r = 0$  et, par suite,  $a = nc$ , et  $b = nd$ , CQFD.

d) Le « savoir » précédent serait, me semble-t-il, utile, non pas seulement à telles ou telles personnes – élèves, professeurs, didacticiens des mathématiques, par exemple –, mais à une ou des institutions – celle de l'enseignement scolaire des mathématiques et des institutions constituées autour de ce projet et de cette réalité sociales – dont « la profession », bien sûr. D'une façon générale, on a là une situation de *manque praxéologique* dont on ne se soucie pas suffisamment, qui est associée à un univers cognitif figé et souvent fermé sur lui-même – à une forme d'autisme praxéologique. Ce phénomène est plus marqué peut-être dans ces institutions où des connaissances mathématiques sont tenues pour « ancillaires », au service d'enjeux qui les dépassent et qu'elles servent plus ou moins adéquatement. Je prendrai donc l'exemple que voici.

• Dans la profession infirmière, un des enjeux de la formation au métier (et de son exercice) est le *calcul de doses*. Le fait est attesté par de nombreux ouvrages commerciaux, dont la liste ci-après donne une idée.

- *Initiation aux calculs de dose : Exercices corrigés* par Christiane Kahwati (Broché - 22 février 2007)
- *Calculs de dose : Exercices corrigés* par Martine Péguin et Hélène Khodoss (Broché - 24 janvier 2007)
- *Guide du calcul de doses et de débits médicamenteux* par Dominique Rispail et Alain Viaux (Broché - 28 décembre 2006)
- *Maths et calculs de doses : Etudes infirmières, préparation au Diplôme d'Etat, exercice professionnel* par Claudie Pinosa et Catherine Barouhiel (Broché - 14 mars 2006)
- *Calculs de dose et soins infirmiers. 122 exercices et 10 cas concrets* par Martine Péguin (Broché - 1 décembre 1998)
- *Calcul de doses* par Marie-Christine Clugnet et Claire Peron (Broché - 20 septembre 2005)
- *Cas concrets corrigés - Calculs de dose, tome 1 et tome 2* par Christiane Kahwati (Broché - 31 mai 2001)
- *Calculs de dose. sujets officiels corrigés - annales* par Collectif (Broché - 28 juillet 2000)
- *S'entraîner au calcul de doses et de débits médicamenteux* par Dominique Rispail (Broché - 13 septembre 1999)
- *Calculs de doses médicamenteuses ; Débits de perfusion* par Edwige Michez (Broché - mai 2001)
- *Calcul de doses* par Marie-Christine Clugnet (Broché - 2 octobre 2007)
- *Calcul de doses : Comprendre pour réussir* par Collectif (Broché - 27 novembre 2001)

• Voici alors un extrait d'un ouvrage du type précédent, signée de Claudie Pinosa, « cadre infirmier formateur », et de Catherine Barouhiel, « coordinatrice pédagogique » : *Maths et calcul de doses. Études infirmières*,

*préparation au diplôme d'État, exercice professionnel*, Maloine, Paris, 3<sup>e</sup> édition 2004. (Les passages cités ci-après se trouvent p. 48-54.)

### **Intérêt professionnel de ces règles**

Vous aurez principalement à convertir des pourcentages chaque fois que vous ajouterez des électrolytes dans une perfusion. En effet le médecin prescrit les électrolytes en gramme, or vous disposez d'ampoules en millilitres. Vous devez donc convertir les grammes en millilitres. Cette conversion dépend du % de concentration de votre produit.

Les électrolytes que vous mettez dans les perfusions se présentent sous forme d'ampoules de différents pourcentages : 10 %, 20 %, 15 %...

NaCl à 10 % signifie solution contenant du chlorure de sodium à la concentration de : 10 g de produit actif pour 100 ml

Il en est de même pour le KCl et les autres électrolytes.

NaCl à 20 % signifie solution contenant du chlorure de sodium à la concentration de : 20 g de produit actif pour 100 ml.

Il en est de même pour le KCl et les autres électrolytes (calcium, magnésium).

De plus les électrolytes que vous utilisez se présentent sous forme d'ampoules de différentes contenances : 10 ml, 20 ml...

Si vous disposez d'une solution concentrée à 10 g pour 100 ml (10 %),

votre ampoule de **10 ml** contiendra 1 g

votre ampoule de **20 ml** contiendra 2 g

Si vous disposez d'une solution concentrée à 20 g pour 100 ml (20 %),

votre ampoule de **10 ml** contiendra 2 g

votre ampoule de **20 ml** contiendra 4 g

### **Attention :**

Le pourcentage inscrit sur les ampoules est très important.

Ne confondez pas une ampoule de NaCl à 9 pour mille (ou 0.9 %) avec une ampoule NaCl à 10 %, ou une ampoule de NaCl à 20 %.

La première peut servir à nettoyer une plaie ou à diluer un médicament (comme de l'eau pour préparation injectable). L'ampoule contient 0,09 gramme de chlorure de sodium pour 10 ml.

La deuxième contient 1 gramme pour 10 ml, soit presque 11 fois plus de sodium...

La troisième contient 2 grammes pour 10 ml.

### **EXERCICES D'APPLICATION**

#### **■ Exercice 1**

Le médecin prescrit 1,5 g de NaCl.

Vous disposez de NaCl à 10 % en ampoules de 10 ml Combien de ml prélevez-vous ?

#### **■ Exercice 2**

Le médecin prescrit 3 g de NaCl dans la perfusion.

Vous disposez de NaCl à 20 %, en ampoules de 10 ml

Combien de ml prélevez-vous ?

Analysez bien les résultats de l'exercice 1 et 2. Quelle conclusion faites-vous ?

### **✓ AIDE À LA RÉOLUTION**

#### **■ Exercice 1**

Le médecin prescrit 1,5 g de NaCl.

Vous disposez de NaCl à 10 % en ampoules de 10 ml.

Combien de ml prélevez-vous ?

### Procédure

10 % signifie 10 g pour 100 ml ou 1 g pour 10 ml

J'ai besoin de 1,5 g.

Si 1 g  $\Leftrightarrow$  10 ml

1,5 g  $\Leftrightarrow$  ? ml

ou bien

$$\begin{array}{ccc} \frac{1 \text{ g}}{1,5 \text{ g}} & \begin{array}{c} \blacktriangledown \quad \blacktriangledown \\ \blacktriangle \quad \blacktriangle \end{array} & \frac{10 \text{ ml}}{Y \text{ ml}} \end{array}$$

$$1 \times Y = 1,5 \times 10$$

$$Y = \frac{?}{?} = ? \text{ ml}$$

Je prépare ? ml. Pour cela je prends ? ampoule dans la pharmacie.

### ■ Exercice 2

Le médecin prescrit 3 g de NaCl dans la perfusion.

Vous disposez de NaCl à 20 %, en ampoules de 10 ml. Combien de ml devez-vous prélever ?

### Procédure

20 % signifie 20 g pour 100 ml ou 2 g pour 10 ml J'ai besoin de 3 g

Si 2 g  $\Leftrightarrow$  10 ml

Alors, 3 g  $\Leftrightarrow$  ? ml

Je prélève ? ml.

Ou bien :

Je pose et j'applique la règle des produits en croix

$$\begin{array}{ccc} \frac{2 \text{ g}}{3 \text{ g}} & \begin{array}{c} \blacktriangledown \quad \blacktriangledown \\ \blacktriangle \quad \blacktriangle \end{array} & \frac{10 \text{ ml}}{Y \text{ ml}} \end{array}$$

$$? \times Y = ? \times ?$$

$$Y = \frac{? \times ?}{?} = ? \text{ ml}$$

$$Y = \frac{?}{?} = ? \text{ ml}$$

Je prépare ? ml. Pour cela je prends ? ampoules de NaCl 20 % dans la pharmacie, mais je n'utilise que ?

Analysez bien les résultats de l'exercice 1 et 2. Quelle conclusion faites-vous ?

.....

## ✓ CORRIGÉ DES EXERCICES

### ■ Exercice 1

10 % signifie 10 g pour 100 ml

ou 1 g pour 10 ml

J'ai besoin de 1,5 g.

Si 1 g  $\Leftrightarrow$  10 ml

Alors 1,5 g  $\Leftrightarrow$  15 ml

Je prépare 15 ml, soit 1 ampoule et demie.

Ou bien

Je pose et j'applique la règle des produits en croix :

**NB : Pour l'ensemble des exercices, l'inconnue = Y**

$$\begin{array}{ccc} \frac{1 \text{ g}}{1,5 \text{ g}} & \begin{array}{c} \blacktriangledown \quad \blacktriangledown \\ \blacktriangle \quad \blacktriangle \end{array} & \frac{10 \text{ ml}}{Y \text{ ml}} \end{array}$$

$$1 \times Y = 1,5 \times 10$$

$$Y = \frac{15}{1} = 15 \text{ ml}$$

Je prépare 15 ml, soit 1 ampoule et demie de NaCl à 10 %

### ■ Exercice 2

Le médecin prescrit 3 g de Nacl dans la perfusion.  
Vous disposez de Nacl à 20 %, en ampoules de 10 ml.  
Combien de ml devez-vous prélever ?

*Procédure*

20 % signifie 20 g pour 100 ml

ou 2 g pour 10 ml

J'ai besoin de 3 g

Si 2 g  $\Leftrightarrow$  10 ml

Alors, 3 g  $\Leftrightarrow$  15 ml

Je prélève 15 ml.

Ou bien :

Je pose et j'applique la règle des produits en croix

$$\begin{array}{ccc} \frac{2 \text{ g}}{3 \text{ g}} & \begin{array}{c} \blacktriangledown \quad \blacktriangleleft \\ \blacktriangleleft \quad \blacktriangledown \end{array} & \frac{10 \text{ ml}}{Y \text{ ml}} \end{array}$$

$$2 \times Y = 3 \times 10$$

$$Y = \frac{3 \times 10}{2}$$

$$Y = \frac{30}{2} = 15 \text{ ml}$$

Je prépare 15 ml. Pour cela je prends 2 ampoules de Nacl 20 % dans la pharmacie mais je n'utilise qu'une ampoule et demie.

Les résultats de l'exercice 1 et 2 sont les mêmes (15 ml) Pourtant dans le premier exercice je prépare 1,5 g de sodium et dans le deuxième exercice je prépare 3 g sodium. Cela est logique compte tenu de la concentration des ampoules, respectivement à 10 % et 20 %.

- On aura remarqué que deux techniques sont proposées. La première est la technique dite traditionnellement de *réduction à l'unité*, longtemps diffusée comme technique « pour les nuls », comme on dirait aujourd'hui, c'est-à-dire, dans ce cas, pour les couches sociales les plus humbles et les moins instruites. On peut présenter la technique de réduction à l'unité sous la forme suivante.

Q. Si  $a$  contient (suppose, coûte, rapporte, etc.)  $b$ , combien  $c$  contient-il (suppose-t-il, coûte-t-il, rapporte-t-il, etc.) ?

R<sub>1</sub>. Si  $a$  contient (suppose, coûte, rapporte, etc.)  $b$ , alors 1 contient (suppose, coûte, rapporte, etc.) «  $a$  fois moins », soit  $b : a = ?$  et  $c$  contiendra (supposera, coûtera, rapportera, etc.) «  $c$  fois plus », soit  $? \times c$ .

Par exemple, si 10 (grammes) sont contenus dans 100 (millilitres), alors 1 (gramme) est contenu dans  $100 : 10 = 10$  (millilitres) et 2,5 (grammes) seront contenus dans  $10 \times 2,5 = 25$  (millilitres). Cette technique était regardée classiquement comme « auto-explicative », « auto-justifiée », c'est-à-dire portant dans sa formulation sa propre intelligibilité : cas limite où la technologie proposée *se lit* dans la mise en œuvre (orale) de la technique.

- La seconde technique, dont l'expression de « produits en croix » est traditionnellement l'emblème, n'a pas la transparence que l'on prête à la technique de réduction à l'unité, comme on le verra ci-après.

Q. Si  $a$  contient (suppose, coûte, rapporte, etc.)  $b$ , combien  $c$  contient-il (suppose-t-il, coûte-t-il, rapporte-t-il, etc.) ?

R<sub>2</sub>. Si  $a$  contient (suppose, coûte, rapporte, etc.)  $b$ , alors  $c$  contiendra (supposera, coûtera, rapportera, etc.)  $x$  tel que l'on ait

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$$

c'est-à-dire tel que  $a \times x = b \times c$ , soit  $x = \frac{b \times c}{a}$ .

- La technique ne montre pas d'elle-même *pourquoi* le nombre  $x$  cherché vérifierait l'égalité de fractions

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$$

ni *pourquoi* cette égalité de fractions se traduirait par l'égalité des produits en croix,  $a \times x = b \times c$ . Ce point est sans doute le plus simple pour qui connaît un tant soit peu la théorie des fractions. On a en effet

$$\frac{a}{c} = \frac{a \times b}{b \times c} \text{ et } \frac{b}{x} = \frac{a \times b}{a \times x}$$

en sorte que l'égalité  $\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$  s'écrit encore

$$\frac{a \times b}{b \times c} = \frac{a \times b}{a \times x}.$$

Ces fractions ayant le même numérateur,  $a \times b$ , leur égalité est réalisée si et seulement si leurs dénominateurs sont égaux, c'est-à-dire si et seulement si

$$a \times x = b \times c, \text{ CQFD.}$$

- Le *pourquoi* de la traduction de la situation considérée par l'égalité de fractions

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$$

était apparent dans la technique employée pendant des siècles et dont celle que l'ouvrage examiné met en jeu n'est qu'un vestige. Longtemps, en effet, l'usage fut celui-ci. Étant donné quatre nombres  $a$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $x$  telle celle considérée ci-dessus, on disait que ces nombres (pris dans cet ordre) constituait une *proportion* dès lors qu'on pouvait dire que «  $a$  est à  $c$  comme  $b$  est à  $x$  », ce qu'on écrivait

$$a : c :: b : x.$$

Dans son *Traité d'arithmétique élémentaire* (Paris, 15<sup>e</sup> édition 1820), Sylvestre-François Lacroix (1765-1843), écrit ceci (p. 89).

Pour indiquer qu'il y a proportion entre les nombres 13, 18, 130 et 180, on les écrit ainsi :  $13 : 18 :: 130 : 180$  ; et on énonce : *13 est à 18 comme 130 est à 180* ; ce qui veut dire que 13 est la même partie de 18, que 130 l'est de 180, ou que 13 est

contenu dans 18 autant de fois que 130 l'est dans 180, ou enfin que le rapport de 18 à 13 est le même que celui de 180 à 130.

- L'écriture  $a : c :: b : x$  préfigure ainsi l'écriture « moderne »  $\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$ . La proportion  $a : c :: b : x$  comporte quatre termes, dont deux, le premier et le quatrième, sont appelés (termes) *extrêmes*, les deux autres, le deuxième et le troisième, étant appelés (termes) *moyens* (« moyen » vient du latin *medianus*, « qui est au milieu »). Une propriété caractéristique d'une proportion (c'est-à-dire d'un assemblage de quatre termes  $a$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $x$  où l'on suppose que «  $a$  est à  $c$  comme  $b$  est à  $x$  ») est l'égalité du produit des « extrêmes » et du produit des « moyens » :

$$a : c :: b : x \Leftrightarrow a \times x = c \times b$$

ce qui conduit à la valeur de  $x$  en fonction des autres termes de la proportion :

$$x = \frac{c \times b}{a}.$$

- En pratique, on peut utiliser *techniquement* la propriété *technologique* caractéristique en disant que «  $x$  est égal au produit des moyens (s'il est comme ici un extrême) divisé par l'autre extrême ». Si, par exemple (il s'agit là de l'exercice 3 proposé par l'ouvrage examiné), l'on veut 4 g de NaCl en utilisant une solution à 20 % de NaCl, on peut dire ainsi : «  $x$  (ml) est à 4 (g) comme 100 (ml) est à 20 (g), et donc  $x$  est égal à 4 fois 100 divisé par 20, soit 20 ; il faut donc 20 ml de solution. » De même si (comme il en va dans l'exercice 4 proposé par les auteures) on veut 200 mg (c'est-à-dire 0,2 g) de sulfate de magnésium en utilisant une solution à 15 %, on peut dire ainsi : «  $x$  (ml) est à 0,2 (g) comme 100 (ml) est à 15 (g), et donc  $x$  est égal à 100 fois 0,2 divisé par 15, soit 1,33... ; il faut donc 1,33 ml de solution (environ). »
- Ce que l'on constate alors, c'est que les praxéologies disponibles pour la profession infirmière aujourd'hui présentent en l'espèce de notables faiblesses. Dans la mesure où l'on ne peut remonter à la technique classique des proportions, une praxéologie mise à jour est souhaitable. Une telle praxéologie dérivera vraisemblablement de la théorie des fractions, mais d'une manière autre que ne le fait la technique des produits en croix. Je me limiterai ici à la présentation sommaire que voici.

#### Problème

Le médecin a prescrit  $n$  g d'une substance  $S$ . On dispose de cette substance sous la forme d'ampoules de  $p$  ml à  $m$  %, c'est-à-dire remplie d'une solution dont 100 ml contiennent  $m$  g de  $S$ .

- 1) Combien de millilitres de solution à  $m$  % faut-il prélever ?
- 2) Combien d'ampoules de  $p$  ml faut-il se procurer à la pharmacie pour cela ?

#### Solution

1) On a :  $n \text{ g} = \frac{n}{m} \times m \text{ g}$  ; comme 100 ml de solution contiennent  $m \text{ g}$  de  $S$ , il faut prélever  $v \text{ ml} = \frac{n}{m} \times 100 \text{ ml}$  de solution.

2) Une ampoule contenant  $p \text{ ml}$  de solution à  $m \%$ , pour prélever  $v \text{ ml}$  de solution, il faut se procurer  $\left\lceil \frac{v}{p} \right\rceil$  ampoules, soit, puisque

$$\frac{\frac{n}{m} \times 100}{p} = \frac{100 \times n}{p \times m},$$

aller chercher à la pharmacie  $\left\lceil \frac{100 \times n}{p \times m} \right\rceil$  ampoules.

e) La question qui m'importe ici peut se formuler en relation avec le schéma herbartien bien connu

$$(S(X; Y; Q) \Rightarrow R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m) \Rightarrow R^\heartsuit.$$

Lorsqu'on étudie une question  $Q$  sous des conditions et des contraintes données, quelles sont les œuvres  $O_{n+1}, \dots, O_m$  – relevant des disciplines les plus diverses – dont il serait pertinent d'acquérir "a working knowledge" – en intégrant à ce questionnement les perspectives ouvertes et par la dialectique *des boîtes noires et des boîtes claires* et par la dialectique – toujours affleurante – *du sujet et du hors sujet* ?

- Dans quels contextes institutionnels poser le problème précédent ? Je me réfère *a priori* à des contextes d'étude et de recherche où l'on se propose d'étudier une certaine question  $Q$ , sans « préférence » aucune, en principe, pour tel ou tel outillage d'œuvres : nous sommes donc dans la problématique « pure » de *l'enquête codisciplinaire*. Pourtant, lorsqu'on fait fonctionner cette problématique en quelque *skholê* que ce soit, on retrouve semble-t-il des résultats « bien connus » (ou « bien connaissables »). *Tout d'abord*, nombre d'œuvres que la tradition « scolaire » – l'adjectif se rapporte ici à la *skholê* considérée – a inscrites à son répertoire se révèlent en effet *pertinentes*, même s'il est patent que, dans un enseignement monumentaliste, cette pertinence est souvent insaisissable. *Ensuite*, l'étude scolaire de ces œuvres, dans la mesure où elle n'est pas impulsée par des besoins d'étude et de recherche déterminés, apparaît souvent, par contraste, *incomplète*, insuffisante, inadéquate à tel ou tel emploi que l'on a en vue. *Enfin*, nombre d'autres œuvres émergent, appelées par la dynamique des enquêtes, qui sembleraient pouvoir demeurer indéfiniment à l'écart du répertoire scolaire.

- La première des observations précédentes appelle sans doute la mise en œuvre d'un principe très ferme, qu'une remarque fondamentale doit d'abord éclairer. Lorsqu'un certain « savoir » apparaît souvent sollicité de façon pertinente dans des enquêtes codisciplinaires auxquelles est reconnu un caractère « vital », lorsque, en conséquence, l'étude scolaire de ce savoir est décidée, lorsque cette étude est programmée sur une longue période de temps – jusqu'à plusieurs années, comme il en va pour certains apprentissages scolaires –, alors *le monumentalisme guette*. Le principe

annoncé est donc le suivant : quelle que soit *l'œuvre* à étudier, il conviendra d'en justifier la présence par l'étude à la fois génératrice et corrélative de *questions* faisant un appel non contingent à cette œuvre, de tels *usages de l'œuvre* étant *premiers* dans le contrat curriculaire. On n'étudierait donc rien qui ne soit clairement motivé par l'étude d'une ou plusieurs questions dont l'inscription au répertoire scolaire ne soit elle-même *fortement ratifiée*.

f) Pour illustrer le second point ci-dessus, je choisirai la question suivante, qui a trait à la praxéologie « orthographique » : « On dit parfois qu'il ne faut pas écrire "Étant donnés trois points non alignés A, B, C..." mais "Étant donné trois points..." », sans s à "donné". Est-ce vrai ? Si oui, pourquoi ? »

• Voici une première réponse à la question posée, que l'on peut glaner dans l'ouvrage classique d'Adolphe V. Thomas et Michel de Toro, *Dictionnaire des difficultés de la langue française* (Larousse, Paris, 1971, p. 136, 40, 163, 94, 433).

- **donner.** – **Étant donné** est aujourd'hui rangé dans la catégorie des *attendu, excepté, y compris, vu*, etc. ; il reste *invariable* s'il est placé *avant* le nom auquel il se rapporte : *Étant donné sa stupidité, on ne pouvait attendre autre chose de lui* (Acad.). *Étant donné une droite...* (mais *Une droite étant donnée...*)
- **attendu**, employé sans auxiliaire et immédiatement devant l'adjectif, le nom ou le pronom, est considéré comme une préposition et demeure *invariable* : *Attendu leurs bonnes références, les références ci-dessus. Il fut exempté de cette charge, attendu son infirmité* (Littré).
- **excepté**, employé sans auxiliaire et situé immédiatement avant l'adjectif, le nom ou le pronom, est considéré comme une préposition et reste *invariable* : *Tous les habitants, excepté les femmes* (Lar. du XX<sup>e</sup> s.). *Toutes les filles sont mariées, excepté la plus jeune* (Acad.). Mais on écrira : *Tous les habitants, les femmes exceptées*.
- **compris.** – Employés sans auxiliaire et placés avant l'adjectif, le nom ou le pronom, **y compris, non compris** sont considérés comme des prépositions et restent *invariables* : *Tous frais payés, y compris les réparations. Il a dix mille francs de revenu... non compris la maison où il loge* (Acad.).  
Mais on dira : *Tous frais payés, les réparations y comprises. Il a dix mille francs de revenu... la maison où il loge non comprise*.
- **vu**, employé sans auxiliaire et placé devant le nom ou le pronom, est considéré comme une préposition et reste *invariable* : *Vu les circonstances. Vu la difficulté de passer la rivière*. Et elliptiquement : *Vu par la cour les pièces mentionnées* (Acad.).

• Je ne suis pas sûr – je n'ai pas fait le travail d'enquête indispensable pour conclure de façon tant soit peu certaine – que la réponse qu'apporte ce dictionnaire soit dûment inscrite au répertoire de la grammaire scolaire actuelle – alors même, pourtant, qu'il s'agit là d'une question que beaucoup de citoyens rencontreront sur leur clavier. Nombre d'observations portent à penser que la technologie orthographique *spontanée* des sujets actuels ou anciens de l'école ne distingue pas *antéposition* et *postposition* et usent en cela d'une technologie d'autant plus prégnante qu'elle est spontanée. Ceux qui, en effet, écrivent « Étant données les circonstances » n'ont sans doute jamais consulté un ouvrage de grammaire à ce sujet, mais invoquent, pour

marquer l'accord en genre et en nombre, l'évidence de la raison « naturelle » : « Qu'est-ce qui est donné ? Les circonstances. Donc : "étant données" ». Voici par contraste, un extrait d'un autre texte prétendant apporter une réponse « autorisée » : on verra qu'il confirme pleinement le dictionnaire consulté. ([http://grammaire.reverso.net/4\\_1\\_08\\_accord\\_du\\_participe\\_passe\\_sans\\_auxiliaire.shtml#header2](http://grammaire.reverso.net/4_1_08_accord_du_participe_passe_sans_auxiliaire.shtml#header2)).

**Le participe passé à valeur de préposition**

Certains participes passés s'emploient devant un nom et servent en quelque sorte à l'introduire : ils ont alors la valeur d'une préposition et sont **invariables**.

***Vu les circonstances, nous acceptons de reporter nos délais.***

***Leurs filles sont toutes mariées, **excepté** Françoise.***

***Approuvé la suppression de trois lignes.***

C'est le cas de :

|           |             |           |
|-----------|-------------|-----------|
| approuvé  | compris     | ôté       |
| attendu   | entendu     | passé     |
| certifié  | étant donné | supposé   |
| ci-annexé | excepté     | vu        |
| ci-inclus | non compris | y compris |
| ci-joint  |             |           |

Lorsque ces participes sont placés après le nom, ils retrouvent leur valeur d'adjectif et s'accordent avec ce nom.

***Nos prix s'entendent TVA **incluse**.***

***Les documents **ci-joints** vous donneront tous les renseignements utiles.***

Les participes *fait*, *lu* et *approuvé* sont également invariables lorsqu'ils se rapportent à l'ensemble d'un document au bas duquel ils figurent.

***Lu et **approuvé** le 30 avril 2000.***

***Fait à Lille le 25 mai 1954.***

- Cela noté, on doit constater aussi que la réponse à laquelle on arrive ainsi reste *incomplète* : le lecteur, en effet, s'interrogera peut-être sur la raison pour laquelle les prépositions seraient invariables ! La chose semble posée, ici, comme un postulat irréfragable. Le questionner – c'est-à-dire questionner l'évidence que cette règle irait de soi – supposerait une enquête dans laquelle je ne m'avancerai pas plus aujourd'hui.

g) Avant d'aller plus loin, j'avancerai cette remarque pour moi essentielle : contre le figement institutionnel, traditionaliste des organisations praxéologiques, un autre rapport à la connaissance peut être conçu et pratiqué, dont l'un des traits essentiels s'énonce plus adéquatement à l'aide d'une métaphore informatique : il se construit en effet autour de l'exigence de *crawler* indéfiniment les amas praxéologiques existants pour en déconstruire les organisations établies et permettre, avec les matériaux ainsi recueillis et quelques autres, à produire parfois *ab ovo*, de construire les organisations utiles – localement, dans l'espace et le temps institutionnels – à nos projets de connaissance et d'action.

### 3. Que faut-il et que peut-on savoir ?

a) Je voudrais d'abord mentionner ici un indice d'un phénomène sur lequel je désire maintenant attirer l'attention : les connaissances s'organisent, dans une institution donnée, en se dotant de « frontières » vécues à la longue comme naturelles par les sujets de l'institution, phénomène dont la folklorisation des connaissances constitue une phase avancée. L'indice en question est le suivant : quand on s'approche naïvement d'un champ « disciplinaire », on découvre que certaines connaissances qu'on croit en relever non seulement n'y sont pas « bien connues » mais parfois n'y sont pas connues du tout, du moins pour une large majorité de personnes que l'on identifie pourtant comme « appartenant » à ce champ disciplinaire. Je prendrai ici, d'abord, l'exemple de l'algorithme PageRank, dont quiconque enquête sur le moteur de recherche Google ne peut manquer de rencontrer, mais dont il semble que nombre de spécialistes du champ « Informatique & Internet » n'ont jamais entendu parler, parce que la frontière du champ l'a rejeté dans les ténèbres extérieures.

b) Voici un autre exemple, qui a trait toujours au même champ.

- Je reproduis ici un bref extrait de l'opuscule intitulé *Comment marche Internet ?* dû à Françoise Virieux et paru dans la collection « Les Petites Pommes du Savoir » aux éditions Le Pommier (Paris, 2004). Aux pages 13 à 15, l'auteure entreprend de raconter à son lecteur le mécanisme des « noms de domaine ». Voici ce passage (qui suppose seulement connue la notion d'adresse IP d'un ordinateur).

#### **Un schéma de nommage hiérarchique**

Comme les noms de pays pour les adresses postales, Internet comporte un premier niveau de noms de domaines, de type générique, comme com (commercial), edu (éducation), net (fournisseurs d'accès), org (organisations sans but lucratif), ou de type géographique : fr (France), it (Italie), jp (Japon). Un deuxième niveau joue le même rôle que les noms de villes. Par exemple, yahoo.fr est un sous-domaine du domaine fr. Chaque domaine est divisé en sous-domaines, eux-mêmes pouvant être redivisés en sous-sous-domaines. On obtient ainsi une structure arborescente de noms de domaines. Chaque nom d'ordinateur relié à Internet est donc une feuille de l'arbre de nommage. La racine de l'arbre est le domaine père de tous les autres.

Le schéma de nommage est basé sur les organisations et non pas sur les réseaux. Ce sont les organisations – entreprise, université, fournisseur d'accès – qui peuvent demander un nom de domaine, peu importe le réseau par lequel ces organisations sont reliées à Internet. Depuis quelques années, on voit même apparaître des noms de domaine correspondant à une personne. La création d'un nom de domaine est assujettie à l'autorisation du domaine père. Si l'on veut ajouter un sous-domaine à univ-paris7.fr, le nom de domaine de l'université Paris 7, il faut s'adresser au gestionnaire des noms de domaine de cette université. On pourra par exemple créer math.univ-paris7.fr pour le département de mathématiques de cette même université.

Revenons à notre annuaire mondial. Au lieu du fichier situé dans un ordinateur central dont nous parlions plus haut, il existe, pour chaque nom de domaine d'Internet, un fichier situé dans un ordinateur de l'organisation qui a obtenu ce nom

de domaine. Cet ordinateur est appelé **serveur de noms** car les autres ordinateurs peuvent l'interroger pour traduire des adresses DNS en numéros IP.

Dans le fichier, on trouve la liste des ordinateurs du domaine avec les couples adresse IP-nom d'ordinateur. Si le domaine est décomposé en sous-domaines, ce fichier contient la liste des sous-domaines avec l'adresse IP de leur serveur de noms.

Chaque domaine d'Internet dispose ainsi d'un serveur de nom de domaines. Il en a même plusieurs : le serveur primaire, sur lequel les informations sont mises à jour, et des serveurs secondaires, sur lesquels les informations sont recopiées. Ainsi le système des noms de domaines offre une bonne tolérance aux pannes grâce à la redondance des serveurs, à commencer par les treize serveurs du domaine-racine (dix aux États-Unis, deux en Europe et un au Japon).

- Je découvre donc, comme en passant, ceci : il y a une « racine » de l'Internet, et elle est faite de 13 ordinateurs serveurs de noms de domaine ! Qui le savait autour de vous ? Faites l'expérience. Après un développement que j'omets (à regret), la même auteure écrit un peu plus loin ceci, qui met le doigt un peu plus sur le fait jusqu'ici inconnu de moi (p. 18-19).

Cette capacité des serveurs de noms à mémoriser les informations déjà reçues allège énormément le trafic sur le réseau. Sans cette capacité, les treize serveurs de la racine seraient saturés de requêtes DNS et ne pourraient plus fournir.

Ainsi, grâce à la structure arborescente des noms de domaine et à un réseau de serveurs de noms redondant, on a réussi à construire un annuaire mondial distribué : aucun ordinateur ne contient l'ensemble de l'information, mais cette information est distribuée sur des milliers d'ordinateurs. Ce système est remarquablement fiable, il fonctionne depuis vingt ans sans panne majeure. Il a jusqu'à présent survécu à de nombreuses tentatives de piratage. La dernière a eu lieu en octobre 2002, où une attaque concertée contre tous les serveurs de la racine a échoué, deux d'entre eux ayant résisté. Depuis, des mécanismes de protection de ces treize serveurs ont été mis en place et il faudra donc que les pirates se creusent un peu plus la cervelle !

- À partir de là, bien entendu, une enquête peut commencer. Après avoir tâtonné un peu, on arrive sur l'article de Wikipedia consacré au sujet, intitulé *Root nameserver* (<http://en.wikipedia.org/wiki/Rootserver>). On y lit par exemple ceci.

DNS server that answers requests for the root namespace domain, and redirects requests for a particular top-level domain (TLD) to that TLD's nameservers. Although any local implementation of DNS can implement its own private root name servers, the term "root name server" is generally used to describe the thirteen well-known root name servers that implement the root namespace domain for the Internet's official global implementation of the Domain Name System.

All domain names on the Internet can be regarded as ending in a full stop character e.g. "www.example.com.". This final dot is generally implied rather than explicit, as modern DNS software does not actually require that the final dot be included when attempting to translate a domain name to an IP address. The empty string after the final dot is called the root domain, and all other domains (i.e. .com, .org, .net, etc.) are contained within the root domain.

When a computer on the Internet wants to resolve a domain name, it works from right to left, asking each name server in turn about the element to its left. The root

name servers (which have responsibility for the . domain) know about which servers are responsible for the top-level domains. Each top-level domain (such as .com) has its own set of servers, which in turn delegate to the name servers responsible for individual domain names (such as example.com), which in turn answer queries for IP addresses of subdomains or hosts (such as www).

In practice, most of this information doesn't change very often and gets cached, and necessary DNS lookups to the root nameservers are relatively rare. However, there are many incorrectly configured systems on the Internet that are responsible for the majority of root nameserver lookup traffic. For example, queries with the source address 0.0.0.0 (corresponding to anywhere and everywhere) make it to the root servers.<sup>[citation needed]</sup> Also, misconfigured desktop computers sometimes try to update the root server records for the TLDs, which is incorrect.<sup>[citation needed]</sup>

There are currently 13 root name servers specified, with names in the form letter.root-servers.net, where letter ranges from A to M. (Seven of these are not actual single servers, but represent several physical servers each in multiple geographical locations; cf. below.):

- On aura identifié peut-être, là aussi en passant, une autre connaissance tombée au fond du puits, disparue dans le triangle des Bermudes de la folklorisation du champ « Informatique et Internet : “All domain names on the Internet can be regarded as ending in a full stop character e.g. “www.example.com. ”. This final dot is generally implied rather than explicit, as modern DNS software does not actually require that the final dot be included when attempting to translate a domain name to an IP address. The empty string after the final dot is called the root domain, and all other domains (i.e. .com, .org, .net, etc.) are contained within the root domain.”
- Cela noté, voici une carte approximative de la “geographical location of all DNS root name servers (as of March 2007)”.



- Bien entendu, cette carte donne l'impression que les serveurs de la racine sont plus de 13 : on a déjà vu en fait ce qui explique cette apparente anomalie – quoiqu'on n'ait pas vu *pourquoi* cette anomalie existe. Cela noté, voici maintenant le tableau des 13, qui terminera ce début d'enquête.

| Letter | IP address     | Old name         | Operator                                                                                                 | Location                                | Software |
|--------|----------------|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|----------|
| A      | 198.41.0.4     | ns.internic.net  | VeriSign                                                                                                 | Dulles, Virginia, U.S.                  | BIND     |
| B      | 192.228.79.201 | ns1.isi.edu      | USC-ISI                                                                                                  | Marina Del Rey, California, U.S.        | BIND     |
| C      | 192.33.4.12    | c.psi.net        | Cogent Communications                                                                                    | distributed using anycast               | BIND     |
| D      | 128.8.10.90    | terp.umd.edu     | University of Maryland                                                                                   | College Park, Maryland, U.S.            | BIND     |
| E      | 192.203.230.10 | ns.nasa.gov      | NASA                                                                                                     | Mountain View, California, U.S.         | BIND     |
| F      | 192.5.5.241    | ns.isc.org       | ISC                                                                                                      | distributed using anycast               | BIND     |
| G      | 192.112.36.4   | ns.nic.ddn.mil   | Defense Information Systems Agency                                                                       | Columbus, Ohio, U.S.                    | BIND     |
| H      | 128.63.2.53    | aos.arl.army.mil | U.S. Army Research Lab  | Aberdeen Proving Ground, Maryland, U.S. | NSD      |
| I      | 192.36.148.17  | nic.nordu.net    | Autonomica              | distributed using anycast               | BIND     |
| J      | 192.58.128.30  |                  | VeriSign                                                                                                 | distributed using anycast               | BIND     |
| K      | 193.0.14.129   |                  | RIPE NCC                                                                                                 | distributed using anycast               | NSD      |
| L      | 199.7.83.42    |                  | ICANN                                                                                                    | distributed using anycast               | NSD      |
| M      | 202.12.27.33   |                  | WIDE Project            | distributed using anycast               | BIND     |

• On peut et on *doit* se demander, bien entendu, si les connaissances précédentes doivent être diffusées, et à qui, en dehors des cercles étroitement concernés. Que faut-il savoir, donc ? Et, secondairement, que peut-on savoir – sous des conditions et des contraintes déterminées ? Telles sont deux des questions (solidaires) que soulève le projet d’une didactique (et d’un enseignement) de l’enquête codisciplinaire.

c) Dans cette perspective – que doit-on savoir ? –, je reviens, très brièvement aujourd’hui, à PageRank, ou plutôt à l’ouvrage déjà cité d’Amy N. Langville et Carl D. Meyer, *Google’s PageRank and Beyond. The Science of Search Engine Rankings* (Princeton University Press, 2006). Nous avons rencontré la dernière fois, comme une boîte noire, la formule

$$\pi^T = \pi^T(\alpha \mathbf{S} + (1 - \alpha)\mathbf{E}).$$

Nous allons nous avancer vers elle en suivant la route tracée par les auteurs dans leur chapitre 4, *The Mathematics of Google’s PageRank*.

• On considère la famille  $(P_i)_{i \in W}$  des pages du Web. On note  $r(P_i)$  le PageRank (PR) de  $P_i$  (lequel, à ce stade, n’est pas défini !). On voudrait alors imposer aux PR la relation suivante, valable pour tout  $i \in W$  :

$$r(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{r(P_j)}{|P_j|}.$$

$B_i$  est l’ensemble des pages  $P_j$  qui pointent vers  $P_i$  (qui ont un lien vers  $P_i$ ). Une telle page  $P_j$  participe au rang de  $P_i$  en lui donnant une fraction de son propre rang, fraction d’autant plus petite que davantage de liens partent de  $P_j$  : la notation  $|P_j|$  désigne en effet le nombre de liens qui partent de  $P_j$ . Plus  $P_j$  est « généreux » dans ses références, moins il apporte à chacune des pages vers lesquelles il pointe – son rang se partage également entre chacune d’elles. (Bien entendu,  $P_j$  peut avoir un rang plus ou moins important, en sorte que ce qu’il donne à chaque page concernée varie.)

- Comment savoir si le système d'équations

$$r(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{r(P_j)}{|P_j|}, i \in W$$

a une solution (et une solution unique !) par rapport aux inconnues  $r(P_i)$ ,  $i \in W$ ? Telle n'est pourtant pas la question que l'on se posera maintenant. En fait, les créateurs de l'algorithme PageRank, Sergey Brin et Larry Page, tentent d'obtenir une telle solution par une procédure itérative toute simple : au départ, ils posent

$$r_0(P_i) = \frac{1}{|W|}, \text{ pour tout } i \in W$$

donnant ainsi le même rang à toutes les pages du Web ; ensuite, on définit la fonction  $r_1$  par

$$r_1(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{r_0(P_j)}{|P_j|}, i \in W$$

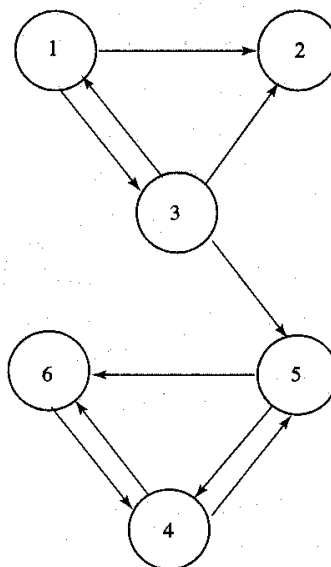
puis la fonction  $r_2$  par

$$r_2(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{r_1(P_j)}{|P_j|}, i \in W$$

et, plus généralement, la fonction  $r_{k+1}$  (en supposant que la fonction  $r_k$  a été définie) par

$$r_{k+1}(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{r_k(P_j)}{|P_j|}, i \in W.$$

- Considérons ici un *Web* miniature qui ne contiendrait que 6 pages, avec la structure de liens suivante.



La formule générale

$$r(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{r(P_j)}{|P_j|}$$

s'écrit ici, successivement,

$$r(P_1) = \frac{r(P_3)}{|P_3|} = \frac{r(P_3)}{3} ;$$

$$r(P_2) = \frac{r(P_1)}{|P_1|} + \frac{r(P_3)}{|P_3|} = \frac{r(P_1)}{2} + \frac{r(P_3)}{3} ;$$

$$r(P_3) = \frac{r(P_1)}{|P_1|} = \frac{r(P_1)}{2} ;$$

$$r(P_4) = \frac{r(P_5)}{|P_5|} + \frac{r(P_6)}{|P_6|} = \frac{r(P_5)}{2} + r(P_6) ;$$

$$r(P_5) = \frac{r(P_3)}{|P_3|} + \frac{r(P_4)}{|P_4|} = \frac{r(P_3)}{3} + \frac{r(P_4)}{2} ;$$

$$r(P_6) = \frac{r(P_4)}{|P_4|} + \frac{r(P_5)}{|P_5|} = \frac{r(P_4)}{2} + \frac{r(P_5)}{2}.$$

Construisons alors le tableau des rangs  $r_k(P_i)$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

|       | $r_0$ | $r_1$  | $r_2$   |
|-------|-------|--------|---------|
| $P_1$ | $1/6$ | $1/18$ | $1/36$  |
| $P_2$ | $1/6$ | $5/36$ | $1/18$  |
| $P_3$ | $1/6$ | $1/12$ | $1/36$  |
| $P_4$ | $1/6$ | $1/4$  | $17/72$ |
| $P_5$ | $1/6$ | $5/36$ | $11/72$ |
| $P_6$ | $1/6$ | $1/6$  | $14/72$ |

Si l'on itère indéfiniment, que se passe-t-il ? Va-t-on, et sous quelles conditions, voir une « stabilisation » de la fonction  $r_k$ , qui ferait émerger un classement « intrinsèque » des pages  $P_i$  ? Tel est le problème qu'il reste à examiner.

*That's all, folks!*