Des programmes, oui. Mais pour quoi faire ?
Vers une réforme fondamentale de l'enseignement

Yves Chevallard

ADEF, Aix-Marseille Université

1. Quels programmes ?

1.1. *Une liste d'œuvres à visiter*

Les développements qui suivent se veulent une réponse à une demande qui m'a été adressée par les responsables du conseil scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques : celle d'expliciter le regard que je porte sur les actuels programmes du collège. J'honorerai cette invitation de façon à aller le plus directement possible au but qui est le mien ici. Je le ferai, bien entendu, en m'exprimant à partir de la *théorie anthropologique du didactique* (TAD). Dans ce cadre, un programme scolaire *d'aujourd'hui* apparaît comme une liste de mots et d'expressions qui désignent des *œuvres* – des œuvres mathématiques, ou réputées telles, pour ce qui est des programmes de mathématiques.

Je prends un exemple. L'actuel programme de mathématiques de la classe de 4^e comporte, dans le domaine d'études intitulé « Nombres et calculs », un secteur d'études nommé « Calcul numérique » comportant un thème d'études libellé ainsi : « Division de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire ». Ce thème, à son tour, se décline en différents sujets d'études, dont l'un au moins est explicité en termes de « capacités » : « Connaître et utiliser l'égalité : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. » Dans le paradigme scolaire traditionnel, que je nomme paradigme *de la visite des œuvres*, un programme désigne moins un système de *questions à étudier* qu'un répertoire de « monuments » – de différentes tailles – à visiter sous la conduite du professeur.

1.2. *Quelle utilité assigner à quel type de programme ?*

Quand on s'interroge sur un programme d'enseignement, qu'il soit fait ou à faire, quand donc on veut l'*évaluer*, c'est-à-dire en estimer la *valeur*, on doit s'interroger sur les fonctions qu'il vise à servir : ce que vaut une chose ne se conçoit que par rapport au *projet* dans lequel cette chose est censée intervenir. *En d'autres termes, un programme n'a pas de valeur en soi*. J'indique tout de suite que l'examen de l'*utilité* des programmes me conduira à écarter les formulations traditionnelles (en termes d'œuvres à visiter) pour proposer un style programmatique bien différent, approprié à un tout autre type de paradigme d'étude scolaire.

Ce paradigme nouveau auquel je me réfèrerai d'abord en filigrane, c'est le paradigme dit du *questionnement du monde*, où l'on s'instruit en étudiant des *questions* auxquelles on essaie par là d'apporter des *réponses*, rassemblant et étudiant *pour cela* des œuvres idoines, mathématiques et autres, en fonction des besoins. Les « programmes » doivent en conséquence se présenter comme des systèmes codisciplinaires de *questions à étudier*, qui renvoient secondairement et d'une façon ouverte, exploratoire, à des programmes-noyaux disciplinaires – je donnerai de cela un exemple plus loin.

2. Des motifs irrecevables

2.1. *Conservatismes élitistes*

Avant toute autre considération, je veux écarter deux « motifs » de valider le contenu d'un programme au sens traditionnel du terme, c'est-à-dire les œuvres dont il se compose. Pour introduire – afin de l'écarter – le premier motif, je note d'abord que souvent, dans les discussions autour des programmes d'enseignement, on voit apparaître des justifications opportunistes dont le but réel est de maintenir une tradition à laquelle quelques-uns sont plus ou moins mélancoliquement attachés. La première question à soulever quand on entend juger d'un programme de telle ou telle discipline est évidemment : *pourquoi enseigner cette discipline ?* Pourquoi lui donner – ou lui conserver – le statut de matière obligatoire et même centrale comme il en va avec la discipline mathématique encore aujourd'hui ? Bien entendu, il n'y a pas, à mes yeux, d'anti-privilège des mathématiques, si je puis dire. C'est bien *toute* discipline qui doit ainsi, périodiquement, être examinée sur sa pertinence pour la formation scolaire des futurs citoyens. Je ne fais donc que poser la question, comme il est normal de le faire. Vous verrez plus loin la façon dont on peut apporter réponse à cette question, non pas *a priori*, mais si je puis dire *in vivo*, dans le travail même des élèves, des classes, de l'École.

Le motif de valider un programme que je viens d'évoquer – pour l'écarter – peut encore se formuler ainsi : cette œuvre ou ce détail d'œuvre devrait continuer d'être enseigné parce qu'il est distinctif d'une élite et donc, à ce titre, précieux – il sera donc pieusement conservé ! Au XIX^e siècle, Marc Girardin dit Saint-Marc Girardin (1801-1873), professeur de poésie française au collège Louis-le-Grand et à la Sorbonne, homme politique, critique littéraire, membre de l'Académie française à partir de 1844, disait, non sans un réalisme cynique : « Je ne demande pas à un honnête homme de savoir le latin ; il me suffit qu'il l'ait oublié » (Lelièvre 1990, p. 43).

Cet élitisme assumé n'est en rien « moderne ». Il surgit dès l'origine des systèmes d'enseignement. L'étude d'une matière donnée – le latin ou la dactylographie, par exemple – est socialement classante. C'est à certaines matières jadis étudiées que se reconnaissent les élites. Nous avons souvent une haute opinion de la *paideia*, l'éducation grecque. Un historien de l'Antiquité tardive (Matthews, 1989) note qu'« une des fonctions primordiales de cette culture était de distinguer une élite du flot ordinaire de l'humanité. » (p. 78). J'emprunte cette citation au livre de Peter Brown, *Pouvoir et persuasion dans l'Antiquité tardive* (1998, p. 62). Cet historien y précise ceci : « Seuls les fils de notables avaient les moyens et le temps de faire le long voyage qui les amènerait des contrées les plus lointaines de l'Orient grec pour suivre à loisir les cours d'un maître tel que Libanius à Antioche, ou Prohaeresius à Athènes. » (p. 62) L'éducation commune aux élites, la *paideia*, rassemblait alors les segments disparates d'une élite du pouvoir dispersée sur le très vaste territoire de l'empire et lui permettait de s'entre-reconnaître ; ce que Peter Brown illustre par cette anecdote où le dérisoire le dispute au mondain [1] :

> « Rencontrant les conseillers juridiques d'un nouveau gouverneur (qui devait avoir grandi à Rome), Libanius posa la question cruciale : « Comment Ulysse gouvernait-il son royaume d'Ithaque ? » La réponse fusa : « En bon père de famille. » Cette citation classique donna le ton aux relations entre le gouverneur et le conseil municipal pour les mois à venir. (p. 64)

La *paideia* ainsi partagée comme un schibboleth, et si chèrement acquise, et tellement distinctive, « donnait un paysage imaginaire commun » à une mince élite qu'elle séparait du même mouvement du reste immense de la société. La formation scolaire que j'ai en vue ici est aux antipodes d'un tel enseignement clivant et classant : elle prétend s'adresser à tous les citoyens à travers leurs enfants. Il ne s'agit nullement, bien sûr, d'ignorer le *fait* de la spécificité de certains besoins de formation de certaines « élites » ayant une utilité sociale avérée. Mais je considère le problème de la « fabrication » de ces élites comme étant, depuis longtemps, relativement bien maîtrisé. J'examinerai donc ici le problème toujours ouvert, me semble-t-il, de la formation *de la masse*. Il est vrai que j'inclus dans « la masse », et l'auteur

[1] Libanius a vécu de 314 à 393.

de ces lignes, et ses distingués lecteurs, et toutes sortes d'élites « formelles », y compris, vous le verrez, le ministre de l'Éducation nationale lui-même.

2.2. *La prétendue « valeur formatrice »*

Les mobiles ouvertement ou clandestinement élitistes doivent ainsi être sévèrement mis en question. Par contraste, j'avancerai que le premier critère auquel apprécier un programme ou un projet de programme est son adéquation, non sans doute à la demande, mais à des besoins vérifiables de la diversité citoyenne. Cela souligné, un second critère doit alors être mis en avant. S'il n'est pas donné à beaucoup de s'exprimer aujourd'hui avec la franchise de classe d'un Marc Girardin, le conservatisme en matière scolaire – qui n'est pas un critère plus recevable que l'élitisme cynique en la matière – conduit souvent à mobiliser un autre grand classique de la *doxa* scolaire : la supposée « valeur formatrice » de telle ou telle discipline ou de tel ou tel détail de telle discipline. L'entité ainsi « valorisée » contribuerait, avance-t-on quand on ne se contente pas de l'insinuer, à la « formation » des jeunes générations. Mais voilà : à la formation *à quoi* ? À la formation *pour quoi*, au service de *quels projets* majuscules ou minuscules ? Tout cela est ordinairement tu. Or il se trouve que tout ou presque est « formateur » au regard d'au moins un type d'activité qui existe ou a bien dû exister ou pourra exister demain.

C'est le sophisme de la « valeur formatrice » que rejetèrent avec courage les auteurs des instructions relatives aux langues vivantes étrangères lors de la grande réforme de 1902 à laquelle le nom de Georges Leygues (1857-1933) reste attaché. Mettant les points sur les i, ils écrivent en effet : « C'est à l'acquisition de la langue que tout doit être subordonné, c'est pour l'apprendre à l'élève qu'on développe son esprit, et non pour développer son esprit qu'on la lui apprend » (Isambert-Jamati, 1990, p. 56). Voilà donc un second critère : l'allégation nue de la valeur formatrice n'est pas recevable. Pour espérer convaincre, elle doit préciser l'*objet* auquel il y aurait formation, et l'*utilité* de cet objet.

3. Pourquoi et comment étudier une œuvre ?

3.1. *Un choix cardinal : l'utilité de l'œuvre*

La question « Des programmes, pour quoi faire ? » reste, à ce stade, entière, certes. Mais les réponses possibles ont été nettoyées de quelques grands classiques du genre – « Pour se distinguer, entre gens de bien », ou parce que « Ça peut servir. D'ailleurs c'était comme ça *avant*. Ça a *toujours* été comme ça. Non ? ». J'ajoute que je défendrai plus loin une problématique socio-épistémologique et didactique qui ne saurait se satisfaire *seulement* du courageux principe énoncé en 1902 avec tant de netteté. Mais celui-ci délivre une critique ravageuse des programmes que le temps a nécrosés.

J'ai tenté de montrer ailleurs que l'enseignement des mathématiques avait évolué depuis plusieurs décennies vers une *monumentalisation du corpus mathématique enseigné*. Qu'entendre par là ? Un programme est fait aujourd'hui, je l'ai rappelé, de l'indication d'*œuvres à étudier*. L'actuel programme de quatrième prescrit ainsi l'étude de l'œuvre qu'est « l'égalité : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ». Mais qu'est-ce qu'étudier une œuvre, et cette œuvre-là en particulier ? Quelle est la *finalité* de cette étude ? À quoi doit-elle être *utile* ? C'est là que j'introduirai une nouvelle ligne de démarcation par rapport aux vues les plus communes en la matière.

Il y a en effet une finalité traditionnellement poursuivie, de façon semi-consciente en général, qui est de faire connaître à de « bons sujets », supposés dociles, le patrimoine du Royaume, qu'ils pourront regarder, admirer et même, si peu que ce soit, « essayer ». Et puis il y a un ordre de finalités que j'appelle l'ordre *citoyen*, où l'étude vise à faire connaître certaines œuvres en tant qu'*outils* en certaines activités déterminées que certains ont ou auront à réaliser – pas tous, certes, car cela dépend de l'histoire de chacun. Deux remarques solidaires doivent être faites en ce point. Tout d'abord, l'ordre des finalités citoyennes de l'étude est fondé sur les notions jumelles de *raisons d'être* et d'*utilité* d'une œuvre donnée. L'idée était au cœur de la réforme de 1902. L'un de ses illustres acteurs, Gustave Lanson (1857-1934), qui dénonce dès 1888 l'enseignement d'avant la réforme – « excellent, dit-il, pour préparer des hommes du monde » et qui « fait des délicats, quand il réussit, des paresseux quand il échoue » (cité par Jey, 2005, para. 10) – met très clairement les points sur les i (cité par Jey, para. 13) :

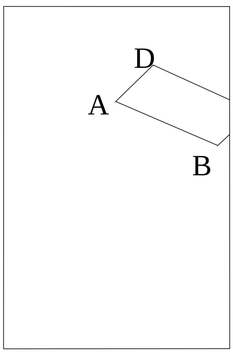
> Je ne puis concevoir un enseignement qui ne soit pas nettement utilitaire, si l'on entend par là un utilitarisme intellectuel : l'éducation doit nous préparer à résoudre, dans la mesure qui sera donnée à chacun de nous, les grandes questions sociales et morales qui se posent aujourd'hui à l'humanité civilisée [...]. Nous autres professeurs, nous devons travailler à faire des hommes du temps présent, des hommes de demain même, et les meilleurs hommes que nous pourrons. Nous ne le pouvons sans leur faire connaître les idées directrices et vitales de la société contemporaine, dont nous vivons, dont ils vivront, en attendant qu'ils les détruisent en les transformant.

La notion d'utilité doit évidemment être entendue en son sens plein, et fort, qui ne nous épargne rien, et ne pas être réduite à ce que d'aucuns font alors, avec quelle suffisance parfois, profession de mépriser ! Ainsi la connaissance du patrimoine a-t-elle son utilité propre, de même que la connaissance de la poésie chère à Marc Girardin et, plus généralement, que la connaissance de *toute* œuvre humaine possible, qu'on la juge « noble » ou « ignoble ». Étudier les sonnets de Shakespeare a son utilité. Mais on voit alors le problème : il ne suffit pas de dire qu'une utilité doit bien exister ! Il faut dire *ce qu'elle est*, et *pour qui*, et *pour quoi*.

3.2. *Énoncer des raisons d'être et les vivre en situation*

L'évolution historique du curriculum que j'ai décrite sous le nom de monumentalisation est contemporaine de *l'effacement des raisons d'être*, de *l'oubli de l'utilité* des œuvres mathématiques enseignées. Ces œuvres deviennent alors semblables à des monuments que l'on visite par contrainte, dont on ignore et dont on ignorera à quoi ils pouvaient bien servir autrefois, lorsqu'ils étaient « vivants », et à quoi ils pourraient bien servir *aujourd'hui* – si ce n'est à inspirer le respect des mondes morts aux êtres dociles ou à exciter les indociles à se rebeller vainement. Bien sûr ces cénotaphes n'en sont pas. Je prendrai ici, successivement, deux exemples.

À quoi sert cette œuvre mathématique qu'est « le parallélogramme » ? C'est une œuvre que l'on étudie, traditionnellement, en cinquième. C'est une œuvre dont, il y a longtemps, on explicitait les raisons d'être. Dans un *Traité de géométrie élémentaire* de la fin du XIX^{e} siècle (Poulain, 1885), au chapitre *Des parallèles et des parallélogrammes*, on trouve ainsi un bref développement intitulé *Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes*. Dans le langage du temps, l'auteur y précise que « ces théorèmes servent à en démontrer d'autres qui ont pour objet de prouver que deux droites sont égales, que deux angles sont égaux, que deux droites sont parallèles » (p. 39). Par exemple, si l'on veut construire la diagonale d'un parallélogramme ABCD dont le sommet C tombe hors de la feuille (voir ci-contre), on peut utiliser cette propriété (caractéristique) d'un parallélogramme de voir ses diagonales se couper en leur milieu commun – en fait, ce qu'il faut utiliser ici, c'est la propriété qu'a chaque diagonale de passer par le milieu de l'autre : la droite cherchée passe donc par A et par le milieu du segment [BD]. C'est là un cas particulier d'un cas généralissime qui est à l'origine de la géométrie : on veut réaliser des *constructions* (comme ici), et pour cela on a besoin de *propriétés*, souvent de *beaucoup* de propriétés, des propriétés qui engendrent d'autres



propriétés, comme le note pertinemment Augustin Poulain dans son *Traité* de 1885.

Les exemples du type précédent pourraient être multipliés à l'infini. Pourquoi s'intéresse-t-on aux triangles ? Aux angles ? Aux angles saillants ? Aux droites parallèles ? Aux demi-droites ? Aux fractions ? À leur simplification ? Aux bases d'un espace vectoriel ? Aux espaces vectoriels eux-mêmes ? Chaque fois, en un curriculum qui traite ses « sujets » *en citoyens* ou en futurs citoyens, *on doit pouvoir* énoncer *des réponses, c'est-à-dire des raisons d'être*. Mais cela *ne suffit pas* : si l'on s'arrêtait là, l'élève resterait un *spectateur*, non un *utilisateur* de l'œuvre. Ces raisons d'être doivent donc s'incarner dans une *situation* dont l'élève soit le *protagoniste* – l'*actant*, comme dit Guy Brousseau.

3.3. *Des AER aux PER*

Dans le cas du parallélogramme, on peut proposer à des élèves de cinquième qui ne connaissent pas la propriété des diagonales de résoudre le problème du parallélogramme « tronqué » (tracer la diagonale passant par le sommet C « manquant »). On aboutit ainsi à la notion d'*activité d'étude et de recherche* (AER). Mais cela ne suffit pas. Car, idéalement, il faudrait ainsi inventer une AER *pour chaque œuvre ou chaque détail d'œuvre*, même si le pouvoir générateur d'une AER particulière donne vie, souvent, à une multitude de détails d'œuvres. Par exemple, il faudrait des AER particulières pour « introduire » les demi-droites, les angles saillants, l'orthocentre, etc. Tout cela fournit un nouveau critère de jugement d'un « programme », un critère à *deux degrés* : toute œuvre figurant dans un programme sera conservée si (et seulement si) l'on peut 1) en *énoncer* une *raison d'être* clé au niveau d'enseignement visé (qui ne se réduise pas, bien sûr, à prétendre que « C'est formateur » ou qu'« on l'a toujours fait ») ; 2) *produire* une AER – une situation – compatible avec les conditions d'enseignement, où cette œuvre apparaisse comme éminemment utile, sinon indispensable.

En dépit des travaux d'ingénierie didactique réalisés depuis plus de trente ans, ce critère ne pourrait être satisfait *pour bon nombre d'items des programmes actuels*, même quand il l'a un jour été ! Je m'arrête sur un exemple évoqué plus haut en passant. Dans le thème d'études du programme de quatrième intitulé « Division de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire » apparaît, je l'ai rappelé, le sujet d'études formulé ainsi : « Connaître et utiliser l'égalité : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. » L'item fait l'objet de ce commentaire : « Un travail est mené sur la notion d'inverse d'un nombre non nul ; les notations $\frac{1}{x}$ et x^{-1} sont utilisées, ainsi que les touches correspondantes de la calculatrice. » Quel travail peut-on attendre d'une classe visitant cette œuvrette mathématique ? Un travail qui rende sensibles les raisons d'être – les raisons *d'être là* – de l'égalité à « connaître » et à « utiliser ». Une enquête historique montre ceci : longtemps, lorsque les calculs devaient être faits à la main et souvent de tête, sans support écrit, la division demeura une opération « difficile ». Comment alors calculer le quotient de a par b ? Eh bien, *en remplaçant la division par une multiplication*, grâce à l'égalité susdite. Voici un extrait d'un ouvrage qui s'inscrit encore dans la tradition d'*avant* la calculatrice, une *Algèbre* publiée en 1951 pour la « formation initiale, [la] formation continue, [les] concours administratifs » par R. Cluzel (professeur à l'ENNA de Paris) et H. Court (inspecteur général de l'Enseignement technique) :

> **2. Nombres inverses.** – L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$; celui de $-\frac{3}{7}$ est $-\frac{7}{3}$.
>
> ***Deux nombres sont dits inverses s'ils ont pour produit 1.***
>
> L'inverse de b est b' tel que $b' = \frac{1}{b}$.

Diviser par b revient à multiplier par son inverse $\frac{1}{b}$.

$\boxed{\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}}$ (p. 24)

Jusque-là, la différence n'est pas nette avec ce qui se fait aujourd'hui. Mais les auteurs précisent alors l'*utilité* de l'égalité qu'ils ont encadrée, et cela change tout :

Cette propriété est souvent utilisée dans les calculs. On remplace ainsi une division par une multiplication.

Exemple : $\frac{38}{\pi} = 38 \times \frac{1}{\pi} \approx 38 \times 0{,}318 \approx 12{,}084$. (≈ signifie : égal *approximativement* à). (p. 25)

À la fin du chapitre – intitulé *Quotient de deux nombres relatifs* – sont proposés 13 exercices dont voici le 12e :

12. Calculer les inverses des nombres suivants : 0,375 ; $\frac{2}{3}$; 0,625 ; π ; $\frac{2}{\pi}$.

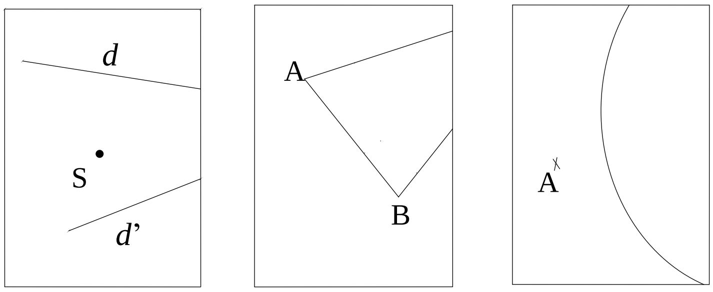
Application. Effectuer : 243 : 0,375 ; 48,34 : $\frac{2}{3}$; 168,32 : 0,625 ; 3 : π. (p. 26)

Rien n'a changé jusqu'à aujourd'hui, disions-nous, *sauf un détail clé* : on avait autrefois vitalement besoin de l'égalité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ pour faire des divisions. Il y avait dans les manuels des tables d'inverses et l'on savait par cœur, notamment, que $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}318$. Tout cela n'a plus de raison d'être aujourd'hui, sauf à mettre en scène un « Puy-du-Fou mathématique ».

Dans cet exemple comme dans celui du parallélogramme, on voit que les raisons d'être des œuvres mathématiques considérées sont « prosaïques » (et non pas « flamboyantes », « grandioses ») et qu'elles se rapportent à des emplois déterminés, parfois quasi *uniques*, et eux-mêmes fort « prosaïques ». Je veux tracer grossièrement un cercle de longueur 20 m dans un jardin pour y installer un nombre donné de chaises ; quel rayon dois-je utiliser pour tracer le cercle ? La longueur est donnée par la formule $2\pi R$ et le rayon en résulte : $R = \frac{20 \text{ m}}{2\pi}$. Calculons (de tête) : $\frac{20 \text{ m}}{2\pi} = \frac{10 \text{ m}}{\pi} = 10 \text{ m} \times \frac{1}{\pi} \approx 10 \text{ m} \times 0{,}318 = 3{,}18$ m. Voilà l'affaire. C'est cela qui m'a poussé à soutenir que « les mathématiques, c'est (comme) de la plomberie », ce qui veut dire que les outils employés et les gestes accomplis ne procèdent pas de motifs emphatiques et sentencieux mais d'humbles besoins qu'il convient de satisfaire de façon réglée.

Si l'on applique le critère indiqué plus haut dans l'état de choses actuel, ce sujet d'étude *devrait être écarté du programme*. Cela ne signifie pas que les élèves de quatrième ne sauront pas écrire *par exemple* que $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ pour établir (de tête) que l'on a $\frac{7}{2{,}5} = \frac{7 \times 4}{2{,}5 \times 4} = \frac{28}{10} = 2{,}8$ et tant d'autres choses encore. Tel détail de telle œuvre mathématique peut tomber en désuétude mais retrouver plus tard, sous une autre forme, une nouvelle fonction. Il est certes des détails qui disparaissent sans laisser de souvenir dans les générations suivantes : il y a longtemps, ainsi, qu'on n'apprend plus par cœur au lycée que la droite coupant l'axe des x au point d'abscisse a et l'axe des y au point d'ordonnée b a pour équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, détail qui eut son rôle à jouer dans les études scientifiques autrefois – le lecteur verra par lui-même lequel.

D'une façon générale, des items auraient à être écartés et d'autres ajoutés. Mais je voudrais rester encore un peu sur le problème des raisons d'être et, plus précisément, de l'organisation de *rencontres motivées et significatives avec les œuvres à étudier*. Partant de la notion d'AER, j'ai introduit une généralisation désignée par le sigle PER – pour *parcours d'étude et de recherche*. L'idée d'une telle suite d'AER est illustrée par les figures ci-contre, où, de gauche à droite, il s'agit 1) de tracer la droite passant par le point S et le point d'intersection des droites *d* et *d'*, 2) de tracer la hauteur relative au côté [AB], 3) de tracer la droite passant par A et le centre du cercle dont un arc est tracé sur la feuille. Ce type de problèmes de construction conduit à rencontrer une bonne part des œuvres géométriques traditionnellement enseignées au collège. Deux ou trois PER – portant sur les *distances inaccessibles* ou sur le *calcul graphique* par exemple – permettent ainsi de couvrir le programme de géométrie ou ce qu'il en reste.



J'ajoute que la redécouverte de l'utilité des œuvres à enseigner est aujourd'hui largement obérée par une tendance qui s'est imposée en réaction aux audacieuses réformes « modernistes » des années 1960 : la *pusillanimité curriculaire*, qui fait du collège notamment, et pas seulement en mathématiques (je songe, ici, aux sciences physiques par exemple), un triangle des Bermudes de la connaissance. (Le principe de ces disparitions me semble être celui-ci : tout tend à apparaître comme « conceptuellement trop difficile » pour les élèves ; tout serait infiniment subtil et devrait en conséquence voir son introduction différée. Bien entendu, ce sont moins les élèves qui ont changé que le rapport des décideurs à la chose enseignée, envahi qu'il est par des afféteries « didactiques » stériles.) Par contraste, un curriculum « citoyen » se doit de proposer des œuvres mathématiques – des praxéologies mathématiques – qui honorent la raison au lieu de l'abaisser. Un programme acceptable doit se référer à des types de tâches nettement définis, des techniques efficaces et des technologies génératrices d'intelligibilité. Il doit promettre à l'élève un *équipement praxéologique* (mathématique) pertinent et *de qualité*.

4. « Un citoyen herbartien, procognitif, exotérique », dites-vous ?

4.1. *Symptômes d'un effondrement historique*

En 1753 paraît dans le troisième volume de l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (1751-1772) un article signé de d'Alembert, intitulé « Collège », qui jouera un grand rôle dans les changements éducatifs de la deuxième moitié du XVIIIe siècle (Granderoute, 1988). L'auteur y propose un constat que je résumerai ainsi : le paradigme de l'étude scolaire sur lequel l'époque vit encore est moribond et délétère. La philippique est connue : « … après avoir passé dans un collège dix années qu'on doit mettre au nombre des plus précieuses de sa vie, note d'Alembert, [un jeune homme] en sort, lorsqu'il a le mieux employé son temps, avec la connaissance très imparfaite d'une langue morte, avec des préceptes de rhétorique et des principes de philosophie qu'il doit tâcher d'oublier… » Je crains que ce tableau, dont je passe certains détails, ne soit aujourd'hui à nouveau d'actualité ; voyons cela.

On s'est beaucoup inquiété, dans les médias grand public et ailleurs, des résultats des jeunes Français aux tests du *Programme for International Student Assessment* (PISA). Ce qui m'inquiète le plus est ailleurs – chez les adultes, et pas seulement chez « les jeunes », qui ne font en cela qu'imiter leurs aînés. Une habitude s'est prise largement qui consiste à se délester automatiquement (quoique de façon sans doute différenciée) des connaissances scolairement apprises, selon un principe d'hygiène cognitive qu'une métaphore d'aujourd'hui résume à merveille : lorsque l'enseignement est terminé, lorsque l'examen est passé, faire « Corbeille » puis « Vider corbeille ». On s'inquiète de voir de jeunes élèves peiner à résoudre des problèmes sur lesquels, semble-t-on oublier, *l'immense majorité des adultes « instruits » et « cultivés »* serait « en échec ». Voilà ce qui m'inquiète ! Une étude du Credoc révèle que « seule une personne sur deux sait que 100 € placés à 2 % par an conduisent à un capital de 102 € » (Bigot, Croutte & Muller, 2011, p. 6). Et nous avons vu successivement l'ancien ministre Xavier Darcos (en 2008) et l'actuel ministre Luc Chatel (en 2010) sécher sur un problème simple de proportionnalité. Le premier, confronté à la question « Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros, combien valent 14 stylos ? », s'est d'emblée récusé en s'exclamant : « Oh ! La règle de trois, je ne sais pas la faire ! » (Cet ex-ministre de l'Éducation nationale, notons-le, a tout de même reconnu un problème de règle de trois.) Le second devait répondre à une question extraite du cahier d'évaluation des élèves de CM2 : « Dix objets identiques coûtent 22 euros. Combien coûtent quinze de ces objets ? » Une réponse est venue assez vite : 16,5 euros, soit la moitié du prix attendu, ce qui met 15 objets à un prix *inférieur* à celui de 10 de ces objets. Un journaliste de radio et de télévision, Jean-Jacques Bourdin, avait pris l'habitude – il a, depuis, cessé de le faire, l'ai-je entendu déclarer récemment – de poser à ses invités « politiques » des questions d'arithmétique simple. C'est ainsi que Didier Migaud, président de la Cour des comptes, lui a répondu avec une assurance feinte que 7 fois 9, c'est 76 (c'est-à-dire *plus* que 7 fois 10), tandis qu'Olivier Besancenot, rejoignant en cela Xavier Darcos, a refusé tout net de s'engager à donner la valeur du produit 8×9. Nous savons tous, en vérité, que ces personnes ont ainsi manifesté *le comportement « modal » des adultes français*. Auraient-ils répondu pertinemment qu'à bon droit nous pourrions les regarder comme des *monstres* – un individu *normal* n'agit pas autrement qu'ils ne l'ont fait, sauf à être un ancien professeur de mathématiques ou de sciences, ou, disons, un ancien élève de CPGE !

Enseigner les mathématiques se heurte ainsi, de nos jours, à une difficulté fondamentale : *les adultes cultivés sont absolument, résolument étrangers aux mathématiques même les plus simples* (et sans doute aux autres disciplines scolaires d'ailleurs), qui restent pour la plupart des souvenirs vagues et plutôt détestables. Tout se passe comme si les mathématiques *n'existaient qu'à l'école*, dont elles feraient partie au même titre que les notes et les punitions. En dépit des contorsions de certains pédagogues pour plaire, pour séduire, pour convaincre, *la docilité aux mathématiques s'arrête au mieux, pour l'immense majorité des gens, lorsque s'arrêtent les études secondaires*. Voilà le fait massif duquel, je pense, il nous faut partir.

4.2. *Épistémologiquement et didactiquement, il faut refonder l'École*

Pour illustrer un changement que je caractériserai par trois qualificatifs – « herbartien », « procognitif », « exotérique » –, je prends un exemple encore. Dans un ouvrage intitulé *La course de la gazelle. Biologie et écologie à l'épreuve du hasard* et signé d'Alain Pavé (2011), l'auteur use d'un petit modèle mathématique pour expliquer comment, du fait des mécanismes de l'évolution darwinienne, il y a deux sexes et non pas trois, ou quatre, etc., et pourquoi les proportions p et q des individus de l'un et l'autre sexe sont approximativement égales. La chose est explicitée dans un encadré qui s'ouvre par ces mots : « Avertissement important : l'auteur souhaitant ne pas porter la responsabilité de troubles de santé, les lecteurs allergiques aux mathématiques, mêmes élémentaires, peuvent se reporter directement à la conclusion. » Nous sommes là encore *dans l'ancien monde*, qui n'en finit pas de mourir. Mais le simple fait d'étudier une *question* – « Pourquoi pas trois sexes ou plus ? » –, qui a elle-même ses raisons d'être, relève bien du paradigme cognitif nouveau, celui du *questionnement du monde*.

Tout d'abord, l'auteur est nécessairement, en tant que chercheur, herbartien[2] : il sait qu'on connaît le monde en le questionnant. Et il tend ainsi à faire de son lecteur lui-même un personnage herbartien. Qu'en est-il alors de la procognitivité ? Pour traiter de la question des proportions optimales d'individus lorsqu'il y a deux sexes seulement, il faut recourir à un rien de mathématiques : le modèle consiste simplement à représenter une rencontre « féconde » comme un ensemble de deux choix au hasard, indépendants, dans une urne composée de mâles en proportion p et de femelles en proportion $q = 1 - p$. L'auteur montre alors que la probabilité de choisir ainsi un mâle *et* une femelle (plutôt que deux mâles ou deux femelles) vaut $2pq$ et que cette probabilité est maximale lorsque $p = q = 50$ %. Pour cela, dit-il, il n'est besoin de rien que l'on n'ait pu apprendre en classe terminale (scientifique, s'entend). Or c'est là que le bât blesse.

L'auteur se montre ainsi, très classiquement, *rétrocognitif* : les outils (mathématiques, ou autres) à mettre en œuvre *hic et nunc* doivent avoir été maîtrisés *antérieurement, à l'avance*. S'il n'en est pas ainsi, tout se passe comme si l'auteur s'avouait impuissant à aider son lecteur, qu'apparemment il suppose rétrocognitif – ce qui est en effet, aujourd'hui, une hypothèse raisonnable. Par contraste, ce que le nouveau paradigme scolaire doit « fabriquer », ce sont des citoyens *procognitifs*, qui vont de l'avant au lieu de seulement regarder en arrière, étudiant et apprenant ainsi à tout âge et à tout instant les connaissances qui s'avèrent utiles, sans vivre leur passé comme un destin indépassable. Pour trois sexes supposés, en proportion p, q et r (avec $p + q + r = 1$), la probabilité d'une rencontre « productive » est $6pqr$. Cette quantité est maximale en même temps que le produit pqr, dont la somme des facteurs est constante ; or un théorème aujourd'hui bien oublié (mais qui eut son heure de gloire scolaire au XIX^e^ siècle) indique qu'un produit de cette sorte est maximal quand ses facteurs sont égaux, soit ici lorsque $p = q = r = 1/3$. En ce cas, la probabilité de rencontre féconde, qui était de 50 % pour deux sexes, tombe à 22 % environ. Voilà pourquoi, Darwin aidant, deux amoureux sont toujours seuls au monde.

Il y avait, dans l'école de Pythagore, deux degrés d'élèves : les ésotériques et les exotériques. Les ésotériques savent ; les exotériques ont à apprendre. Très généralement, le citoyen doit se situer, de fait, comme un *exotérique*, et non se lamenter de n'être pas un ésotérique. « Je vais étudier telle question ; j'ai besoin pour cela de certaines connaissances dont j'ignore la nature et que j'ignore sans doute ; mais je vais les conquérir – ou les reconquérir – *à partir de maintenant*. » En vérité, chacun, y compris le spécialiste supposé, doit se penser constamment comme un exotérique, qui passe les acquis antérieurs supposés, souvent parcellaires, oubliés, fragilisés, partiellement adéquats, à l'étamine du présent. La figure de l'ésotérique est un trompe-l'œil, épistémologiquement et didactiquement perfide. L'élève de l'École à refonder doit ainsi se construire comme herbartien, procognitif, exotérique – ce qui est à peu près complètement le contraire du sujet idéal de l'École que nous aurons connue.

J'illustrerai cela, ici, en suggérant par un petit apologue ce que pourrait être demain le comportement, face à quelque Jean-Jacques Bourdin du futur, d'un Didier Migaud ou d'un Olivier Besancenot qui, sans prétendre le moins du monde être des ésotériques en mathématiques (ou ailleurs), auraient reçu une éducation authentiquement herbartienne, procognitive, exotérique. J'appelle β l'intervieweur et ξ l'interviewé ; voici leur dialogue imaginaire :

β. – 7 fois 9 ?
ξ. – 7 fois 9 ? Mince, ça je ne sais plus ! Eh bien 7 fois 10, c'est 70…
β. – Non, non ! Répondez tout de suite !
ξ. – Permettez… Donc 7 fois 9, cela fait 70 moins 7, soit 63.

[2] Du nom de Johann Friedrich Herbart (1778-1841), philosophe et pédagogue allemand.

β. – C’est ça !
ξ. – Ou encore c’est 7 fois 3 fois 3 (parce que 3 fois 3, 9), c’est-à-dire 21 fois 3, ce qui fait 63. Ou bien, puisque je crois me rappeler que 7 fois 8, c’est 56, 7 fois 9 c’est 56 plus 7, c’est-à-dire 56 plus 6, 62, plus un, 63. Ou aussi, c’est égal encore à $(8 - 1)(8 + 1)$, soit $8^2 - 1$ (vous vous souvenez, β, « l’identité remarquable »…), ou 64 moins 1, donc 63. Ou… Bon. C’est aussi 9 fois 9, soit 81, moins deux fois 9, soit 18, c’est donc 81 moins 20 plus 2, soit 61 plus 2, donc 63. Oui, voilà ma réponse : 63. Enfin je crois !
β. − C’est bien ça !
ξ. − Mais vous, comment le savez-vous ?
β. − Je le sais ; 7 fois 9, 63.
ξ. − En êtes-vous sûr ? Est-ce que vous ne confondez pas, comme l’ont fait certains de vos interlocuteurs ? Est-ce que nous ne sommes pas en train de nous tromper tous les deux ? Quand j’étais enfant j’aimais bien compter en base 3.
β. − ?
ξ. − Voyons, recomptons en base 3, mon cher β ! En base 3, le nombre 7 s’écrit… 21 et 9 s’écrit… 100. Leur produit vaut donc 2100, c’est-à-dire $0 + 0 + 3^2 + 2 \times 3^3$, soit 9 plus deux fois 27, ou 9 plus 54, soit donc… 63. On n’en sort pas !
β. – Dites donc, vous en mettez du temps !
ξ. – C’est mieux que de se tromper, non ?
β. – Ce n’est pas faux…
ξ. – Les mathématiques, mon cher β, cela mérite un peu de respect ; et les gens, pareil.
β. – Que voulez-vous dire ?
ξ. – Eh bien, les gens, cela mérite un peu de respect. En particulier dans leurs rapports avec les mathématiques. Vous ne croyez pas ?
β. Peut-être…

Les répliques finales nous rappellent que notre rapport à la connaissance et à l’ignorance, qui est l’objet premier de l’École, est une composante de notre rapport au monde, et que celui-ci est donc aussi à travailler si nous voulons que celui-là change un jour.

4.3. *Pour conclure*

Ce qui me paraît *sine qua non* aujourd’hui, c’est d’introduire dans les classes une activité d’*étude critique* de textes visant à apporter réponse à des questions codisciplinaires, cette activité elle-même nourrissant de ses questions l’activité proprement mathématique (et, plus généralement, disciplinaire) de la classe, dans une perspective herbartienne, procognitive, exotérique. Bien entendu, des problèmes d’ingénierie didactique (et des problèmes fondamentaux de didactique des mathématiques qui leur sont corrélés) en dériveront à foison. À propos de questions choisies nationalement, qui formeront l’armature des « programmes », et qui seront étudiées dans les classes de façon codisciplinaire, il faudra notamment constituer une librairie de textes contenant ce que je nomme des *traces* de mathématiques (comme il en va dans le texte sur le nombre des sexes) et d’autres disciplines. Il faudra articuler la lecture critique de ces textes avec l’activité mathématique propre de la classe de façon à couvrir des programmes-noyaux qui laisseront une marge de manœuvre permettant précisément de voir se dégager un choix d’œuvres mathématiques utiles au futur citoyen − problème d’identification qui se résoudra alors du fait du *fonctionnement même de l’École* et non *en amont* de ce fonctionnement et en appui dogmatique sur une tradition partiellement périmée. Et, bien sûr, il faudra que se crée une pédagogie herbartienne, procognitive, exotérique qui, aujourd’hui, n’existe pratiquement pas. Pour être tout à fait clair, j’ajoute que, sans tout cela, une réforme des programmes me paraîtrait d’un très faible intérêt, parce qu’elle pourrait au mieux dissimuler encore un temps l’inadéquation croissante de nos mœurs didactiques scolaires ainsi que la marche vers l’effondrement qui en découle.

Références

Bigot, R., Croutte, P. & Muller, J. (2011). *La culture financière des Français*. Paris : Crédoc. http://www.latribune.fr/static/pdf/La_culture_financiere_des_Francais_2011.pdf

Brown, P. (1998). *Pouvoir et persuasion dans l'Antiquité tardive*. Paris : Seuil.

Cluzel, R. & Court, H. (1951). *Algèbre*. Paris : Delagrave.

Granderoute, R. (1988). La fortune de l'article Collège dans le discours pédagogique (1753-1789). *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie, 5*(5), 55-71. www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rde_0769-0886_1988_num_5_1_980

Isambert-Jamati, V. (1990). *Les savoirs scolaires*. Paris : Éditions Universitaires.

Jey, M. (2005, 7 octobre). Gustave Lanson et la réforme de 1902. *Fabula. La recherche en littérature* [site Web]. http://www.fabula.org/atelier.php?Gustave_Lanson_et_la_r%26eacute%3Bforme_de_1902#_edn6

Lelièvre, C. (1990). *Histoire des institutions scolaires (1789-1989)*. Paris : Nathan.

Matthews, J. (1989). *The Roman Empire of Ammianus*. Londres : Duckworth.

Pavé, A. (2011). *La course de la gazelle. Biologie et écologie à l'épreuve du hasard*. Paris : EDP Sciences.

Poulain, A. (1885). *Traité de géométrie élémentaire*. Paris : Desclée, De Brouwer.