

Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir

par Yves Chevallard

Résumé. Les mathématiques ont pu être regardées comme le modèle des savoirs transmissibles. Le grec *mathêma* désigne à l'origine « ce qui est enseigné » et *mathêsis* « le fait d'apprendre » : les mathématiques furent par excellence *ce qui peut s'apprendre*. Or l'évolution récente semble avoir mis un point final à cette prétention : l'enseignement des mathématiques tend aujourd'hui à se réduire à une visite de monuments plus ou moins dégradés, que l'on révère encore parfois, que l'on restaure aussi, mais dont la vie s'est retirée au point qu'on en a oublié les usages vivants. Visite tantôt sévère (comme le voudraient les fétichistes d'une certaine école d'avant-hier, qui prétendent par là « sauver les maths ») et tantôt badine, désinvolte, voire niaise (comme la veulent, dérisoirement, certains modernistes attardés). Devant ce tableau, le verdict s'énonce simplement : nécrose épistémologique. Le remède ne peut être que brutal : contre le retour à un passé qui, tel un porteur sain, contenait en lui, secrètement, le mal qui aujourd'hui frappe, contre aussi les turlupinades de médecins improvisés qui se contaminent les uns les autres en croyant « mutualiser » leurs trouvailles, la voie qu'il faut ouvrir de vive force et viabiliser ensemble est celle d'une véritable révolution épistémologique, dont le cœur soit l'école et dont la société tout entière se trouve progressivement pénétrée. C'est à la nature, aux contenus, aux mécanismes et aux conditions de possibilité de cette révolution nécessaire que la conférence présentée ici consacrera ses développements.

Y croire ou ne pas y croire ?

Peut-être avez vous eu la curiosité de vous pencher sur le résumé qui annonce mon propos. Peut-être, en le lisant, avez-vous eu le sentiment d'une vision des choses un peu décalée, sinon tout à fait étrange. En ce qui me concerne, mû sans doute par une inquiétude bien compréhensible lorsqu'il s'agit de faire recevoir par un public si vaste, si divers, si sobrement critique, une réflexion qui n'emprunte pas toujours les voies de l'opinion commune, je me suis décidé, contre l'usage, à vous parler aussi de ma propre histoire avec les mathématiques et leur enseignement.

Je suis né en 1946. Je viens donc de passer le cap des soixante ans, épreuve annoncée dont j'ai découvert avec ravissement qu'elle faisait accéder à un autre statut, si, du moins, j'en crois les principes de l'anthropologie de la SNCF, selon laquelle l'âge adulte, qui commence à 15 ans, s'achève à 59. Au-delà sont les seniors, dont je suis désormais. Ce qui me ravit, ce n'est pas d'être senior ; c'est que j'aurais cessé d'être adulte ! J'ai assez côtoyé, dans l'IUFM où je suis encore en poste, les effets de crétinisation du faux concept d'adulte pour me réjouir de pouvoir ainsi, avec la caution intellectuelle et morale de la grande société ferroviaire, flotter entre plusieurs âges, être très jeune et très vieux tour à tour, ou plutôt à la fois, comme vous le découvrirez bientôt.

Je dois vous parler de demain. Pour cela, il m'a donc paru utile de vous parler un peu d'hier. En octobre 1951, dans mon petit village, je suis très malheureux : mes copains un peu plus âgés que moi viennent d'entrer au cours préparatoire ; moi, non : trop petit ! On entre alors à l'école à six ans révolus. Aux récréations, je les aperçois dans la cour, en contrebas, depuis un petit promontoire où j'ai la liberté de me rendre. Pour faire mieux comprendre la genèse des analyses qui suivent, je dois souligner que cette première expérience de non-inclusion (sinon d'exclusion) m'a sans doute prévenu contre l'institution scolaire, à l'endroit de laquelle j'ai toujours conservé une certaine distance critique – qui, par bonheur, sied à merveille au chercheur que je suis devenu bien plus tard. Mais dans le même temps, je m'en aperçois

mieux avec le recul du temps, j'ai toujours *cru aux savoirs* qu'on y proposait et qui la rendait à mes yeux infiniment, indéfiniment désirable. J'ai cru et je crois dans le savoir, par delà même celles et ceux qui le proposent – je veux dire les professeurs.

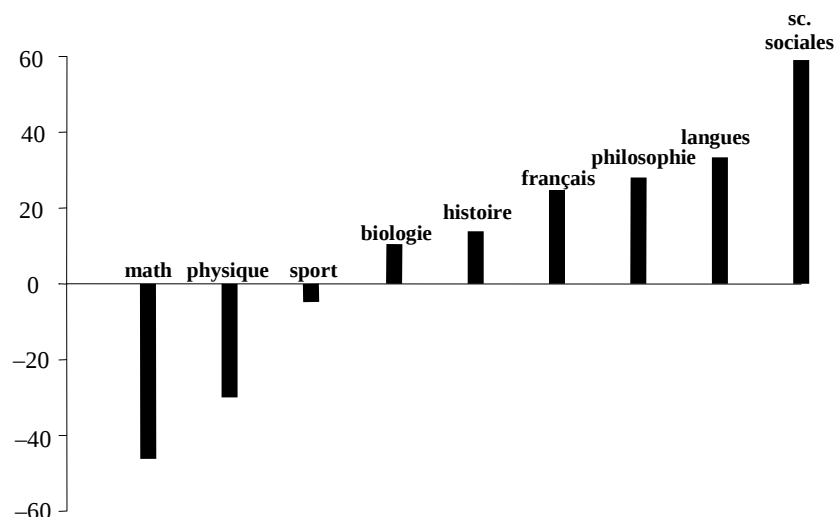
Illustration. J'allume la radio. J'entends un journaliste y parler de *Flushing Meadows* – je note au passage que les autochtones, eux, parlent de *Flushing Meadows Park*, le parc de... Mais là n'est pas le problème. Le journaliste prononce quelque chose comme « Midoze ». Vous serez surpris si je vous dis que cela m'irrite, mais pour une raison qui vous surprendra plus encore : pour moi, le mot anglais *meadow*, prairie, est un mot que j'ai appris en 5^e, durant l'année scolaire 1958-1959, en même temps que j'en apprenais l'écriture phonétique : 'med... et non 'mi:d... Cela vous irritera peut-être à votre tour. Peut-être n'y croirez-vous pas. Mais c'est ainsi : je m'étonne chaque fois que l'on se trompe sur un mot si « élémentaire » – au sens de la transposition didactique de l'anglais *de mon temps*, bien sûr. Vous savez bien ! *Meadow*. Vous l'avez appris en 5^e (ou peut-être en 6^e, ou en 4^e). Moi, j'y croyais.

Je reviens un moment au temps présent. Face à la croyance qui fut la mienne – que les connaissances transmises à l'école, c'est du vrai, du bon, de l'efficace, du désirable, bref, que *ça compte* –, un autre sentiment peut prévaloir : que l'école est un univers d'opérette, auquel en conséquence on n'est pas obligé de croire, parce que ce microcosme envahissant aurait en vérité bien peu à voir avec le monde hors de l'école – c'est-à-dire avec le monde, tout court. Parce que l'école n'a, croit-on, de vrai commerce qu'avec elle-même, on apprend les connaissances apportées par l'école seulement pour « réussir à l'école », non pour comprendre les situations du monde extrascolaire et agir intelligemment, justement, efficacement en leur sein. Bref, face à l'école regardée comme donnant une clé du monde, et non la moins précieuse, voici l'école comme pur tribut à payer pour entrer habilement dans le monde, moment où l'on pourra alors faire litière des connaissances que l'école prétendait vous apporter. Ces credo opposés sont, j'imagine, de toujours ; mais l'un ou l'autre domine. Tel est au fond le point que je souhaite soulever entre tous : sous quelles conditions pouvons-nous croire, et sous quelles conditions les générations montantes peuvent-elles être amenées à croire, non à l'école elle-même, mais aux connaissances et savoirs qu'on y transmet ? (Bien entendu, de cette confiance « épistémologique » découle *ipso facto* un sentiment de gratitude envers l'école elle-même, qui est au cœur de la passion républicaine ; mais ce n'est pas ce qui m'importe ici.)

Discrédit des mathématiques et docte ignorance

Le crédit accordé aux savoirs enseignés varie selon les savoirs : à un moment donné, tous les savoirs inscrits au répertoire de l'école ne pâtissent pas du même discrédit. L'analyse effectuée par une équipe de sociologues coordonnée par Roger Establet sur les résultats de la consultation nationale sur le thème « Quels savoirs enseigner au lycée ? » est à cet égard instructive¹. Voici par exemple un graphique (*op. cit.*, p. 65) montrant les « différences entre les citations positives et les citations négatives » à propos des principales disciplines enseignées dans les voies générales et technologiques. Là où les sciences sociales reçoivent 78 % de citations positives et 22 % de citations négatives (la différence est donc de + 56 points), les mathématiques sont citées positivement dans 27 % des cas, négativement dans 73 % : la différence est négative, égale à – 46 points !

¹ Roger Establet, Jean-Luc Fauguet, Georges Felouzis, Sylviane Feuilladiéu, Pierre Vergès, *Radiographie du peuple lycéen. Pour changer le lycée*, ESF, Paris, 2005.



Mais je me centrerai sur les savoirs mathématiques : on vient de le voir, ils sont en bien mauvaise posture. L'observation clinique de la société tend à montrer que tout se passe comme si, culturellement, *les savoirs mathématiques ne comptaient pas*. Voici un premier exemple, que j'amorce par une anecdote historique. Le comte Pietro Verri (1728-1797), aristocrate milanais, homme des Lumières, épris d'action autant que de réflexion, fait paraître en 1771 un maître ouvrage d'économie politique qui en fait un précurseur de la révolution marginaliste. Lorsqu'il lit cet opus, Condorcet (1743-1794) prend sa plume et adresse à l'auteur l'observation que voici.

Pardonnez, Monsieur, si un géomètre a osé vous faire une observation sur un endroit de votre livre où vous employez le langage de la géométrie. Vous dites que le prix est en raison inverse du nombre des vendeurs, et en raison directe de celui des acheteurs. Je sais bien que le prix augmente quand le nombre des acheteurs augmente, et qu'il diminue quand celui des vendeurs s'accroît ; mais est-ce le même rapport ? C'est ce que je ne crois pas. Ainsi le langage géométrique dans ce cas, et dans tous les autres de cette espèce, bien loin de conduire à des idées plus précises, me semble induire en erreur ; on se dit que l'auteur se serait contenté du langage ordinaire, s'il n'avait pas entendu parler d'une proposition rigoureusement exacte.

Je traduis : il n'existe pas que deux types de relation fonctionnelle entre deux grandeurs x et y , la proportionnalité directe et la proportionnalité inverse... En vérité, pendant des siècles, pour qui n'a qu'une première teinture de mathématiques – celle de l'enseignement primaire –, toute relation fonctionnelle entre deux grandeurs x et y est censée être de proportionnalité directe ou d'inverse proportionnalité, en sorte qu'il suffit de distinguer un cas de l'autre en se demandant si, lorsque x croît, y croît ou, au contraire, décroît. Où en est-on aujourd'hui ? J'ouvre un livre récemment paru, au demeurant fort éclairant sur la triste exploitation politicarde du débat sur l'enseignement de la lecture à l'école² ; et je tombe sur ce passage (*op. cit.*, p. 63) :

« Même si l'on ne grignote que quelques points, en passant de 15 % à 11 % des élèves en difficultés à l'entrée en sixième, ce sera toujours ça de gagné », affirme sans l'ombre d'un complexe un conseiller ministériel qui donne l'impression qu'il s'agit de compter des mètres cubes dans un espace de stockage. Le gain espéré d'électeurs serait-il inversement proportionnel à la réduction du nombre d'élèves en difficulté ?

Bien entendu, ce que peuvent espérer les politiques, c'est que le gain d'électeurs soit *proportionnel* à la réduction du nombre d'élèves en difficulté ; que, donc, lorsque cette réduction est de 4 %, ce gain soit deux fois supérieur à celui que leur vaudrait une réduction

² Laure Dumont, *Globale ou b.a.-ba ? Que cache la guerre des méthodes d'apprentissage de la lecture ?*, Robert Laffont, Paris, 2006.

de 2 %, etc. Ici, « inversement proportionnel » n'est rien d'autre qu'un superlatif : introduire l'adverbe intrus, « inversement », c'est user d'une formulation *plus épiciée*, davantage susceptible de frapper l'imagination du lecteur, faute de s'adresser à sa raison. Les mathématiques ne comptent pas : elles fournissent quelques images frelatées, tel ce « plus grand dénominateur commun » qu'évoquent de loin en loin quelques journalistes. Il y a longtemps, il est vrai, que l'inverse proportionnalité n'est plus un objet d'étude officiel de la scolarité obligatoire à la française. Mais voici un autre exemple que, sous le titre *La cerise sur le ghetto*, un hebdomadaire satirique bien connu rapporte involontairement³ :

Comment en finir avec les collèges-ghettos, points noirs de la carte scolaire ? Sarkozy veut en raser une bonne partie, et Xavier Darcos (UMP) cite l'exemple d'un établissement, démoli à Bergerac, et dont les élèves ont réintégré avec succès les autres collèges de la ville.

Moins radicale, la principale d'un établissement du nord de la France a réclamé un nouveau découpage de son secteur, qui réduirait ses effectifs. « Une solution rarement suggérée par mes collègues, dit-elle en souriant, car notre traitement est proportionnel au nombre d'élèves ! »

Un traitement proportionnel au nombre d'élèves ? On peut en douter. Ce que veut signifier ce chef d'établissement, c'est sans doute que le traitement qu'elle perçoit est une fonction *croissante* du nombre d'élèves de l'établissement : nous voilà ramenés au comte Verri. Si vous pensez que cette observation procède d'un distinguo inessentiel, que « ce n'est pas important », c'est que vous acceptez que les professeurs de mathématiques s'échinent aujourd'hui, en classe de seconde, à faire entendre les principales notions concernant les fonctions sans que cela ait le *moindre effet* sur notre appréhension du monde social ! C'est que, au fond, vous ne croyez pas que cela *compte*. Comme n'y croirait pas le professeur d'anglais qui, complaisant, glisserait que prononcer « midoze » n'a pas vraiment d'importance. Réagir ainsi face aux multiples symptômes d'*incrédulité épistémologique* est à mes yeux un autre symptôme, écho d'un mal *qui ne touche pas que les élèves*. C'est aussi la matérialisation d'un renoncement que nous n'avons pas fini de payer. Je m'y arrête un instant, à propos de la proportionnalité, justement.

Le cas de la proportionnalité : un concept en déshérence

Depuis des années, la proportionnalité (mais non l'inverse proportionnalité) fait l'objet, au collège, d'un enseignement à *outrance*, jusqu'à ce que mort scolaire s'ensuive, si l'on peut dire ! Inutile de préciser que la réception dans la culture générale française des contenus de savoir ainsi promus de façon obsédante n'est pas à la hauteur des efforts consentis. Il y a longtemps pourtant que ces efforts sont promis à un échec certain : car ce qui s'enseigne sous le nom de proportionnalité a été détaché de l'ensemble des usages qui en faisaient autrefois le sel en rendant la chose *socialement désirable*. Voici un tableau de valeurs relatif à deux grandeurs liées entre elles par une relation (apparemment) fonctionnelle.

x	2	3,6	5,1	6,7	7,5
y	2,4	4,3	6,1	8	9

Au collège, dans la plupart des classes, la question qu'on va aujourd'hui se poser est : « Est-ce là un "tableau de proportionnalité" ? » Ayant observé qu'on a $\frac{2,4}{2} = 1,2$ mais que $\frac{4,3}{3,6} = 1,19444\dots$, on conclura alors, impavides, que ce tableau « n'est pas de proportionnalité », avant de passer à autre chose – à un autre tableau, qui à son tour sera ou ne sera pas de proportionnalité. *Voilà comment on tue un savoir !* Car, bien entendu, la bonne question à

³ *Le Canard enchaîné*, mercredi 13 septembre 2006, p. 3.

poser – n’y aurait-il que les professeurs de mathématiques pour l’ignorer ? – est celle-ci : peut-on raisonnablement *modéliser* la relation entre x et y par une relation de proportionnalité, et si oui, laquelle ? La réponse à la première question est ici positive (et non pas négative), et l’on peut alors *choisir* d’écrire que l’on a $y \approx 1,2x$, du moins dans la zone que couvre le tableau, l’extrapolation au loin étant chose délicate. Si l’on voulait compléter ce tableau – qu’on peut supposer d’origine expérimentale – en essayant de prédire ce que vaudrait y si x valait 5,8, on calculera que $1,2 \times 5,8 = 6,96$ et on écrira donc que, en ce cas, $y \approx 7$. L’ubiquité de la règle de trois dans la culture classique était évidemment liée à l’emploi de la proportionnalité pour construire des modèles *approchés* en toutes occasions, dont certaines étaient quelquefois risquées. Un exemple d’aujourd’hui : si je sais que le record du monde masculin du 100 mètres plat est d’environ 10 secondes, tandis que celui du 200 mètres est d’environ 20 secondes, je peux tenter d’extrapoler pour me faire une idée de ce que peuvent être les records du monde du 60 mètres et du 400 mètres. *Selon le modèle proportionnel*, ils seront de 6 secondes pour le premier, de 40 secondes pour le deuxième. Et je compterai en fait un peu plus – disons, 10 % de plus – pour l’un et pour l’autre si je « corrige » ce modèle en considérant le phénomène spécifique modélisé.

De tels usages de la proportionnalité étaient au cœur de l’enseignement classique. C’est ainsi qu’un auteur prolifique, Théophile Moreux, abbé de son état, écrivait avant-guerre ⁴ :

Les règles énoncées sont applicables toutes les fois qu’il y a proportionnalité entre des nombres ou des grandeurs. Les cas de ce genre sont nombreux surtout en Géométrie et en Physique. En voici quelques cas.

Deux rectangles de même base ont des surfaces proportionnelles à leurs hauteurs.

Deux circonférences sont proportionnelles à leurs diamètres et à leurs rayons.

Dans le mouvement régulier ou uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps, c’est-à-dire que si le temps est trois fois plus long l’espace parcouru sera trois fois plus grand.

Tout ceci est exact et rigoureusement exact, mais il n’en est pas toujours de même dans la pratique.

On admet en effet qu’un salaire doit être proportionnel au temps consacré par l’ouvrier à faire son travail ; et ceci est une pure convention. En fait, tout le monde sait qu’un ouvrier ne travaille pas toujours avec la même ardeur ; il y a des heures où son activité est plus grande ou plus ralentie.

De même on admet que 3 ouvriers font 3 fois plus de travail qu’un seul, mais les entrepreneurs qui occupent des ouvriers n’ignorent pas cependant que pratiquement la valeur des hommes qu’ils emploient est toujours différente.

On pourrait continuer longtemps sur ce thème ; ce que nous avons dit suffit pour la démonstration.

Dans les mêmes années, les auteurs d’une *Arithmétique* pour les écoles primaires supérieures, A. Marijon et A. Péquignot, soulignent ce fait qu’un modèle linéaire n’est souvent acceptable que dans une plage de valeurs déterminée des variables x et y ⁵ :

Pour des charges qui ne dépassent pas 80 grammes, l’allongement du ressort est proportionnel à la charge. En désignant l’allongement par a , la charge par p , on a : $a = pk$, k étant un coefficient constant. Ce coefficient représente l’allongement correspondant à la charge de 1 gramme. Pour des charges supérieures à 80 grammes, l’allongement est plus grand que celui qui serait calculé par la formule $a = pk$. D’ailleurs pour des charges trop fortes le ressort subirait des déformations permanentes ou se briserait. Nous avons là un exemple de proportionnalité de deux grandeurs qui n’est réalisée que dans de certaines limites.

On comprend ainsi l’*utilité* de la règle de trois. On doit vider un bassin pour le nettoyer ; la hauteur de l’eau est d’environ 1,20 m. Ayant ouvert l’unique conduit qui permet de vider le

⁴ Pour comprendre l’*Arithmétique*, Doin, Paris, 1931, p. 100-101.

⁵ Hatier, Paris, 1928, p. 241-242.

bassin, on observe que, au bout d'un quart d'heure, l'eau a baissé d'à peu près 10 cm. En modélisant la relation entre le temps t pendant lequel l'eau s'écoule et la quantité q d'eau écoulée par un modèle linéaire ($q \propto t$), on peut conclure que l'on pourra revenir pour nettoyer le bassin dans environ $\frac{120-10}{10}$ quarts d'heures, soit 11 quarts heures ou 2 h 45 min. En décidant de ne revenir que 3 heures plus tard, on est sûr de trouver le bassin entièrement vidé.

Mathématiques mixtes & purification épistémologique

Sans paraître y toucher, l'exemple précédent illustre un phénomène historique de grande ampleur. Partons du commencement : à partir de 1600 environ, deux ordres de savoirs mathématiques sont reconnus : des mathématiques *pures*, d'un côté, et ce qu'on appellera longtemps des mathématiques *mixtes* – expression qui sera supplantée au cours du XIX^e siècle par celle de mathématiques *appliquées*. Dans l'article intitulé *MATHEMATIQUE OU MATHEMATIQUES* qu'il rédige pour l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (1751-1772), d'Alembert écrit :

Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle *Mathématiques pures*, considère les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue : dans le premier cas, les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second, Géométrie [...] La seconde classe s'appelle *Mathématiques mixtes* ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers [...]. Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Mécanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c.

L'idée à la base de la notion de mathématiques mixtes est précisée par d'Alembert dans l'article *APPLICATION* de l'*Encyclopédie*, où il prend pour exemple de mathématique mixte la « catoptrique », c'est-à-dire l'optique des miroirs.

Une seule observation ou expérience donne souvent toute une science. Supposez, comme on le sait par l'expérience, que les rayons de lumière se réfléchissent en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion, vous aurez toute la Catoptrique [...]. Cette expérience une fois admise, la Catoptrique devient une science purement géométrique, puisqu'elle se réduit à comparer des angles et des lignes [...]. Il en est de même d'une infinité d'autres.

Le curriculum mathématique demeurera longtemps marqué par la tradition des mathématiques mixtes. Ainsi, il y a quelques décennies encore, la *statique* figurait-elle au programme de mathématiques des classes terminales, avec, notamment, le thème des *machines simples* (levier, treuil, cabestan, bascule du commerce, poulies, palan, moufle, etc.), qui ne disparaîtra des programmes de mathématiques qu'au début des années 1960.

La tradition d'ouverture épistémologique est bien illustrée par le programme de mathématiques du 10 juillet 1925 pour les « classes de mathématiques » (c'est-à-dire pour les classes terminales scientifiques). Ce programme se divise alors en huit domaines. Les quatre premiers domaines (arithmétique, algèbre, trigonométrie, géométrie) relèvent pour l'essentiel des mathématiques *pures*, tout en contenant certains thèmes appliqués traditionnels, relevant en particulier des mathématiques *financières* (intérêts composés, annuités, etc.). Les quatre autres domaines seraient regardés aujourd'hui par nombre de professeurs de mathématiques comme étrangers à leur compétence « naturelle » : *géométrie descriptive et géométrie cotée, cinématique, statique, cosmographie*.

Pourtant ce menu très ouvert va peu à peu se réduire. Les auteurs d'un ouvrage de préparation au baccalauréat du début des années 1940 notent ainsi :

Le programme relatif à la Géométrie Descriptive et à la Géométrie Cotée du Cours de Mathématiques Élémentaires est très restreint et prête peu aux problèmes. En fait, depuis 10 ans, le nombre de problèmes donnés sur ce sujet aux Examens est à peu près nul.

Certaines parties « mixtes » résisteront plus longtemps : la cinématique survit ainsi jusqu'au milieu des années 1980. L'astronomie (ou cosmographie) disparaît dans les années 1960 tout en se survivant dans les classes terminales littéraires, d'où elle ne sera chassée que par les programmes de 1994. La part prise par les professeurs dans cette évolution n'est sans doute pas nulle. Car une certaine liberté de choix et de traitement des contenus leur est laissée. Dans leur manuel d'*Algèbre et géométrie* pour la classe de 5^e publié en 1958, Camille Lebossé et Corentin Hémerly prennent ainsi soin de préciser que, aux termes du programme en vigueur, les notions d'astronomie figurant dans leur ouvrage « constituent un cadre très large et non un programme dont il s'agirait de fixer intégralement tous les chapitres », et que l'enseignement prodigué doit être adapté « au niveau des élèves, aux goûts qu'ils manifestent et aux moyens matériels dont on disposera ». Hier comme aujourd'hui, ce libéralisme scolaire, qui prend la place d'un pacte d'instruction explicitement débattu, favorise les évolutions clandestines, jusqu'au jour où il faut se rendre à l'évidence : l'enseignement correspondant se meurt, l'enseignement correspondant est mort !

Le phénomène de purification épistémologique et d'exclusion de ce non-mathématique sans lequel le mathématique a du mal à vivre n'est certes pas qu'un fait scolaire : dans la sphère savante, le XIX^e siècle voit en fait l'étiollement des mathématiques mixtes ; les domaines que les mathématiques avaient « colonisés » depuis 1600 environ prennent peu à peu leur indépendance et deviennent des sciences autonomes, qui s'affranchissent de l'allégeance officielle aux mathématiciens. Les « mélanges » physico-mathématiques chers à d'Alembert semblent devenus instables, et leurs composants se séparent. Après 1970, non seulement le curriculum mathématique scolaire va perdre peu à peu tous ses « territoires » pour se réduire au pré carré des mathématiques « pures », mais une idéologie de la *pureté* mathématique s'y installe qui traite le reste du monde et ses besoins mathématiques comme un univers d'opérette, qu'on évoque quelquefois, pour tromper l'austérité de mathématiques confinées, mais qu'on ne prend plus guère au sérieux.

Des mathématiques immotivées

L'année 1970 est celle où je passe l'agrégation de mathématiques. Mon professeur de mathématiques supérieures avait, lui, passé l'agrégation en 1932 (il fut reçu la même année que Charles Pisot, Joanny Commeau, Jean Ville ou Roger Bretagnolle, notamment). Ce n'est pas le temps long, mais presque ! Dans les années qui précèdent 1970, l'enseignement des mathématiques vit des jours de feu : c'est la réforme des mathématiques *modernes*. Je suis lycéen. Je lis le *Bulletin de l'APMEP*, dont je n'approuve pas entièrement l'euphorie modernisatrice. Car je me sens, moi, moderne, sans avoir à le clamer : simple question de génération, bien entendu. En seconde, à la rentrée 1961, j'avais découvert, en marge de l'enseignement officiel, le livre alors récemment paru d'André Lentin et Jacques Rivaud, *Éléments d'algèbre moderne*⁶, qui est alors pour moi une source secrète et presque intarissable d'exotisme mathématique. Comme mes condisciples d'alors, j'étudie le programme, mais avec ce point d'appui extérieur, qui permet une certaine distanciation, non bien sûr une vraie lucidité. Car ce qu'on s'appête à gagner masque ce qu'on s'appête à

⁶ Vuibert, Paris, 1961.

perdre – collectivement s’entend. J’ai dit qu’on ne connaissait plus guère aujourd’hui, dans la classe de mathématiques, les usages extramathématiques les plus classiques des mathématiques étudiées. Or un nouvel effondrement guette. Peu à peu, les usages *intramathématiques* eux-mêmes deviennent méconnus : l’univers mathématique enseigné est désormais largement *immotivé*. C’est là le thème de l’*utilité* des savoirs, de leurs *raisons d’être*, de leur motivation, sur lequel je voudrais m’arrêter maintenant.

Depuis la rentrée 1991 mon labour principal, comme enseignant, a été de former – avec toute une équipe de collègues – les professeurs de mathématiques stagiaires que leur employeur, l’Éducation nationale, confie à l’IUFM de l’académie d’Aix-Marseille. Des dizaines de fois, ces élèves professeurs m’ont ramené à un fait têtue, apparemment indépassable : l’univers mathématique dans lequel ils évoluent est pour eux immotivé, au point que l’idée même de motivation (mathématique) n’y existe guère. Comment en est-on arrivé là ? Je reviens au début des années 1970 : à la rentrée 1971, la réforme touche la classe de 4^e. Dans les premiers mois de 1972, jeune animateur à l’IREM d’Aix-Marseille, j’assure mon premier stage de formation – du recyclage, comme on dit alors. La droite affine est, en 4^e, la grande affaire de ces maîtres sans maîtrise. D’une façon générale, la commotion due à la réforme a fait voler en éclats l’évidence de la matière enseignée. Pourquoi ceci et non pas cela ? Pourquoi cela plutôt que rien ? Telles sont les questions génératrices de la théorie de la *transposition didactique*, qui va émerger dans les années suivantes. Pourquoi, en 4^e, justement, écrire $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ mais non pas, par exemple, lorsque du moins $x \geq 0$, $x^2 - x = (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})$? Pourquoi ces arrangements-là et pas d’autres ? La voie ouverte par le concept de transposition didactique – non sans résistances de la part des tenants de l’ordre établi, c’est-à-dire d’un désordre devenu familier – conduira à développer l’*écologie des savoirs enseignés*. Pourquoi ceci et non cela ? La réponse n’est pas si évidente, même si elle est aujourd’hui relativement simple à énoncer.

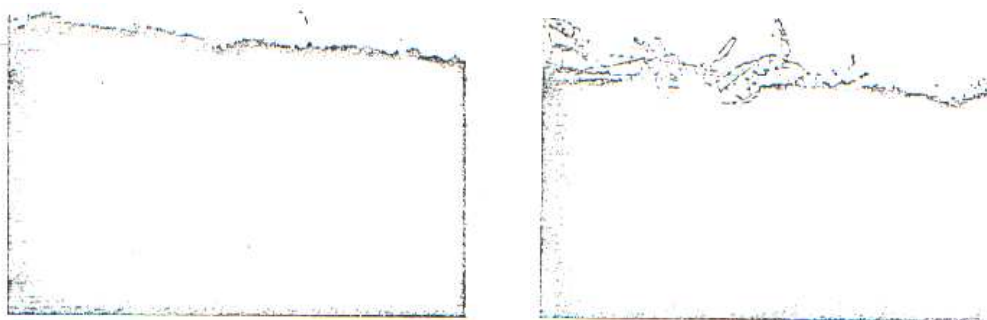
Pourquoi se soucierait-on d’écrire $x^2 - x = (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})$, où $x \geq 0$? La réponse possible est double. Première réponse : parce que l’égalité est utile, dans sa spécificité (il s’agit de cette égalité-là, non de l’égalité plus générale $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$) ; parce qu’elle sert à quelque chose, de l’ordre de la connaissance ou de l’action, ou des deux. Par exemple, elle *montre* que, si $x^2 > x$, c’est-à-dire si $x > 1$, alors $\sqrt{x} < x$, et que, si $0 \leq x < 1$, alors $\sqrt{x} > x$; et c’est pour cela qu’elle peut avoir été produite. Deuxième réponse : parce qu’il s’agit d’un *vestige*, qui avait autrefois une fonction, une utilité, et *n’en a plus*. En vérité, la réponse est triple plutôt que double. Il se peut que la « structure » mathématique examinée n’ait plus d’utilité *du tout*. Mais, maintes fois, un autre schéma apparaît, qu’il convient de souligner : l’immotivation apparente, vécue comme telle par nombre d’élèves et de professeurs, tient à la *séparation*, dans le temps scolaire, de la *structure* et de ses *fonctions* – séparation de *ce que c’est* et de *ce à quoi ça sert*. D’abord, on étudie abstraitement la « machine » ; plus tard, *bien plus tard* en général, *bien trop tard*, au vrai, on en découvrira les usages, si on les rencontre jamais. On étudie aujourd’hui en 3^e l’identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; mais c’est en seconde qu’on aura *peut-être* à la mettre en œuvre pour établir le sens de variation de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ (où $x \in \mathbb{R}_+$), lequel se lit sur l’identité : $x' - x'' = (\sqrt{x'} - \sqrt{x''})(\sqrt{x'} + \sqrt{x''})$. Le corpus mathématique enseigné est ainsi devenu une galerie d’art où les objets qui s’exposent, se visitent, s’étudient ressemblent fort aux « machines » de Jean Tinguely (1925-1991) – qui avaient, elles, le mérite d’avoir été *voulues* comme des structures agissantes mais dénuées de fonctions !

Dans l’enseignement des mathématiques contemporain, rien de tel. Sans doute suppose-t-on que ce qu’on enseigne a ou aura des usages ; mais on ne sait plus lesquels. Pourquoi par

exemple la notion d'angle ? Pourquoi les triangles ? Pourquoi le concours des médianes (ou des hauteurs, etc.) ? Pourquoi les angles saillants et les angles rentrants ? Pourquoi les polynômes ? Pourquoi les fonctions continues ? Pourquoi les droites ? Pourquoi le parallélisme de droites ? Etc. À cela, nulle réponse explicite, claire, fondatrice d'un pacte d'étude. Les savoirs mathématiques sont par force imposés aux élèves (et aux professeurs) sans que la profession rende jamais raison de leur présence dans le curriculum – j'entends ici par profession le vaste collectif des professeurs de mathématiques auxquels s'ajoutent des groupes divers, de formateurs, de chercheurs, de responsables associatifs, etc.

L'argumentaire moderniste de l'art pour l'art

Pour justifier de ne pas répondre à ces questions et pour justifier – mais la chose n'est pas dite ainsi – de ne pas *savoir* y répondre, toute une idéologie s'est mise en place dans la profession, qui semble aujourd'hui en être imprégnée profondément. Cette idéologie repose sur une très courte dogmatique. Le premier précepte en est le *dogme naturaliste* : les machines mathématiques seraient « naturelles ». Seule leur *étude* serait le fait de l'Homme ; et, si l'on enseigne les angles, ou les triangles, etc., ce serait tout simplement parce que, « dans la Nature », *il existe* des angles, des triangles, etc. Il s'agit là, pour le dire sans détour, d'un leurre empiriste : la notion de droite, telle que nous nous sommes accoutumés à nous la représenter, *n'est pas* dans la Nature ; c'est nous qui l'y mettons, par un ajout souverain au « donné » naturel. Si l'on en doute, que l'on observe au microscope le bord d'une feuille de papier du commerce, grossi par exemple 40 fois (ci-dessous, à gauche), puis 100 fois (à droite).



Alors que le dogme naturaliste est présent à la manière du sucre dans le café, le second précepte, le *dogme anti-utilitariste*, est souvent vociféré : on crie à l'envi haro sur l'utilité, on dit haut et fort que les savoirs mathématiques ne sont pas des outils, ou ne sont pas *que* des outils. Et qu'ils *sont*, tout court ; et que leur étude doit être dénuée de toute intention utilitaire ! Le débat serait fort long ; je l'abrège. Le mot d'utilité, le beau mot d'utilité renvoie, certes, à la doctrine de l'utilitarisme, dont il existe au demeurant des versions opposées⁷, mais qui a mauvaise presse en France depuis au moins Durkheim, et que je ne fais nullement mienne. Je reprendrai toutefois ici sans y voir malice – une telle formulation ne peut être qu'ambiguë – la « définition » due à Jeremy Bentham, l'introducteur en anglais du mot *utilitarian* (1781), selon laquelle une action est “*conformable to the principle of utility... when the tendency it has to augment the happiness of the community is greater than any it has to diminish it*”. Ce qui n'en reste pas moins vrai, quoi qu'on pense à propos des doctrines utilitaristes, c'est que le monde bâti par les humains est un monde d'*intentions*, où l'intentionnalité est le premier et le dernier moteur, et où l'intention vise la satisfaction d'un

⁷ Voir par exemple l'article « Anti-utilitarisme » signé par Alain Caillé dans le *Dictionnaire de l'autre économie* sous la direction de Jean-Louis Laville et Antonio David Cattani (Desclée de Brouwer, Paris, 2006).

besoin, en général pour le bonheur du plus grand nombre – mais c'est là, il est vrai, une affaire d'organisation politique de la cité. Que les professeurs aient repris la rhétorique aristocratique du désintéressement, de l'art pour l'art, du sublime, est à mes yeux le fruit amer d'une adaptation opportuniste devant la dépossession épistémologique que j'ai évoquée plus haut – dépossession que cette impérieuse rhétorique a sans doute accélérée en la sanctifiant par avance. Du labeur utile, visant à augmenter le bonheur de chacun et de tous, on passe d'abord au plaisir qu'apporte le labeur lui-même. Sismographe hypersensible aux idéologies qui travaillent les couches populaires ayant réussi une certaine ascension sociale, le philosophe Alain restitue ce mouvement euphorique en une formule bien frappée : « ... le travail utile, note-t-il dans un *Propos* du 6 novembre 1911, est par lui-même un plaisir ; par lui-même, et non par les avantages qu'on en retirera. » Notons donc qu'il s'agit là de *plaisir personnel*, non de bonheur du monde... Mais on doit remonter plus loin encore pour retrouver la racine du mal, jusqu'aux doctrines de « l'art pour l'art », où l'objet du travail n'est plus qu'alibi à l'exercice d'un art supposé transcendant à ses conditions de possibilité autant qu'à l'objet auquel il semble illusoirement s'appliquer. Celui-ci, ses motivations à être, tout cela devient, en un certain sens, *obscène*. Un doctrinaire de l'art pour l'art, Théophile Gautier, futur auteur du *Capitaine Fracasse* (1863), l'écrit sans ambages dans la préface à son roman *Mademoiselle de Maupin* (1835) : « Il n'y a de vraiment beau, souligne-t-il, que ce qui ne peut servir à rien ; tout ce qui est utile est laid, car c'est l'expression de quelque besoin, et ceux de l'homme sont ignobles et dégoûtants, comme sa pauvre et infirme nature. – L'endroit le plus utile d'une maison, ce sont les latrines. » Voilà le manifeste d'une certaine idéologie qui semble imprégner si fort la profession aujourd'hui, et dont je prendrai résolument contre-pied.

Aspiration au sublime ou plomberie mathématique ?

En rupture avec le dogme naturaliste et anti-utilitariste, je pose trois principes. Tout d'abord, toute création humaine est un *ajout* au monde « naturel ». Ensuite, cet ajout a un mobile, un motif, une raison d'être, une utilité. Enfin, du fait qu'il appartient au cercle des œuvres humaines, cet ajout peut légitimement être analysé, mis en débat, abandonné, remplacé, etc. Ce qu'un savoir permet de comprendre et de faire est son *utilité* : l'utilité d'un concept, par exemple, c'est sa capacité à permettre de comprendre et d'agir, à *outiller* la pensée et l'action. Ce que je voudrais souligner maintenant, c'est que le principe de l'art pour l'art est incompatible avec la vie des savoirs. Car on ne connaît pas véritablement un savoir si l'on n'en connaît pas l'utilité et les usages : la doctrine de l'art pour l'art appliquée à la connaissance fabrique de *faux savants*, et de *vrais ignorants* – j'y viens.

À la rentrée 2000, on le sait, un nouveau programme est entré en vigueur en classe de seconde. Événement historique, ce programme réhabilitait – ou du moins tentait de le faire – l'une des illustres victimes de la grande réforme des mathématiques modernes, les « cas d'égalité » des triangles, devenus très normalement, depuis, cas d'*isométrie*. Voici qu'un savoir mathématique inconnu d'une majorité de professeurs faisait tout à coup résurgence, un savoir dont les raisons d'être étaient cependant évidentes pour les plus anciens, qui l'avaient étudié comme collégiens : dans la période pré-réformée, ils s'enseignaient en effet en classe de... 5^e. À l'IUFM d'Aix-Marseille comme sans doute ailleurs, les professeurs stagiaires s'interrogent. « Comment, demande-t-on ainsi, aborder les triangles isométriques et semblables ? À quoi servent vraiment ces notions ? » « Quelles situations problèmes, questionne-t-on encore, peut-on donner pour introduire les triangles isométriques et les triangles semblables ? » Ouvrons des manuels d'avant la Réforme. L'atmosphère n'est pas au sublime mais, plus sainement, à une « plomberie mathématique » de bon aloi. Quelle est

l'utilité des cas d'égalité des triangles ? Un *Traité de géométrie élémentaire* publié en 1885 précise sobrement la chose ; une remarque y explicite ceci :

Utilité des théorèmes précédents. Les cas d'égalité des triangles sont appliqués sans cesse, en géométrie, pour trouver que *deux droites* sont égales, ou que *deux angles* sont égaux.

On notera un vocabulaire que d'aucuns ne supportent plus aujourd'hui : par égalité de deux droites, il faut entendre, bien entendu, égalité des longueurs de segments de droites. Mais la vraie difficulté n'est pas là – l'y voir est une autre erreur postmoderniste. L'auteur cité met en garde son lecteur :

... ce qui fait la difficulté de la méthode, c'est que presque jamais les triangles ne sont tracés. Il faut alors commencer par les imaginer et, pour cela, mener une ou des droites auxiliaires.

Les cas d'isométrie sont des conditions suffisantes d'existence d'une isométrie (dont la nature importe peu) transformant tel triangle en tel autre. Plus humblement, un manuel de collègue d'autrefois indique :

... pour démontrer que deux segments rectilignes sont égaux, on cherche à les faire entrer dans deux triangles dont on établit ensuite l'égalité. On procède souvent de même pour démontrer que deux angles sont égaux.

L'exemple peut-être le plus simple qui soit est dû à Pappus, vers 340, et concerne le théorème appelé *pons asinorum* (pont aux ânes), selon lequel, dans un triangle isocèle ABC où l'on suppose que $AB = AC$, les angles à la base sont égaux : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Il suffit en effet, pour conclure, de considérer les triangles ABC et... ACB, qui se révèlent isométriques en vertu du 2^e et/ou du 3^e cas d'isométrie (un angle égal entre deux côtés égaux, ou les trois côtés égaux). Les cas d'isométrie n'ont *rien de sublime* : ce sont les outils d'une certaine « plomberie » mathématique – laquelle, sans eux, supposerait l'appel à d'autres outils.

Supposons encore qu'on ait établi le théorème de Pythagore ; comment établir sa réciproque ? Voici ce que proposait, dans les années 1950, un manuel de géométrie de collègue : la chose est sans appel.

Réciproque du théorème de Pythagore. Si les trois côtés a, b, c d'un triangle vérifient la relation

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ce triangle est rectangle.

Construisons un angle droit xOy. Portons sur Oy une longueur OM = b et sur Ox une longueur ON = c. Traçons MN. On a :

$$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = b^2 + c^2.$$

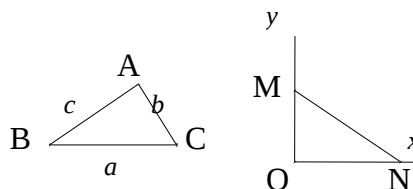
ou : $\overline{MN}^2 = a^2$

Ainsi : $MN = a$.

Dès lors, les triangles OMN et ABC sont égaux comme ayant les trois côtés respectivement égaux.

Par suite : $\angle A = \angle O = 1$ droit,

et le rectangle ABC est rectangle en A.



On ne connaît pas un savoir si on n'en connaît pas les raisons d'être, ou du moins quelques-unes d'entre elles, qui le rendent *désirable*. Considérons encore, ici, la notion mathématique de *parallélogramme*. Pourquoi cette notion ? Pourquoi s'intéresse-t-on à elle au point de l'inscrire au programme d'études du collège (en classe de 5^e toujours) ? Ce qu'il importe de souligner, c'est que, aujourd'hui, ordinairement, la question précédente *n'est pas posée* : il y a le parallélogramme, il a une définition, des propriétés, que l'on visite comme on ferait d'un monument ancien. (Un monument ancien n'a pas d'« utilité » ; ou plutôt, il n'en a *plus* – autre

que muséale ou opportuniste.) C'est là, bien entendu, un point de vue postmoderne, qui n'avait guère cours autrefois, quand les manuels osaient encore poser la question de l'utilité, et y apportaient une réponse simple, fondamentale, sobrement mathématique (et non bêtement esthétisante ou moralisatrice, du genre : « Le parallélogramme, c'est une jolie figure, il est formateur d'en étudier les propriétés, etc. »). Je cite à nouveau le *Traité de géométrie élémentaire* ; au chapitre intitulé *Des parallèles et des parallélogrammes*, l'auteur consacre un paragraphe à indiquer l'*Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes*. Le voici.

Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes. Ces théorèmes servent à en démontrer d'autres qui ont pour objet de prouver :

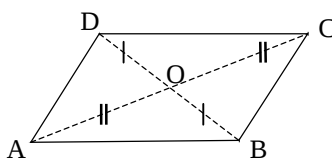
- 1° Que deux droites sont égales ;
- 2° Que deux angles sont égaux ;
- 3° Que deux droites sont parallèles.

Que dit le manuel des années 1950 déjà cité à propos des cas d'égalité ? Son propos est des plus explicites – le dernier de la classe même doit comprendre !

Application. Si un quadrilatère convexe possède l'une quelconque de ces propriétés nous pouvons affirmer

- 1° qu'il est un parallélogramme ;
- 2° qu'il possède par suite toutes les propriétés ci-dessus.

Exemple. Au cours d'un problème nous arrivons, par exemple, à prouver que le quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

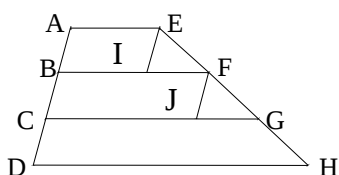
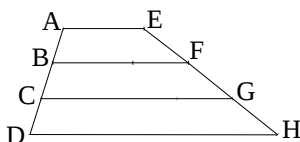


Immédiatement nous tirons de ce fait les conséquences suivantes :

- 1° ABCD est un parallélogramme
- 2° Par suite : AD et BC sont égaux et parallèles ; AB et DC sont égaux et parallèles ; $\hat{A} = \hat{C}$; $\hat{B} = \hat{D}$.

L'approfondissement des raisons d'être d'un savoir mathématique donné conduit ainsi à mettre au jour des raisons d'être attachées à un certain type de « plomberie mathématique » – et pour cela entièrement étrangères au dilettantisme culturel caractéristique de l'abord monumentaliste des savoirs. Cette humble pratique artisanale des mathématiques n'est nulle part plus apparente que dans ce qui était, traditionnellement, la toute première utilisation des propriétés du parallélogramme – *pour démontrer un théorème* parmi les plus connus, comme on le voit ci-après.

Théorème 1. Si les droites (AE), (BF), (CG), (DH), ..., sont parallèles, et si $AB = BC = CD = \dots$, alors on a aussi $EF = FG = GH = \dots$



La démonstration, usuellement, procédait de la façon suivante. On considère d'abord les points I et J, où (EI) et (FJ) sont parallèles à (AB). Les quadrilatères AEIB et BFJC sont donc des parallélogrammes ; il en résulte que l'on a d'une part $EI = AB$, d'autre part $FJ = BC$, en sorte que, puisque $AB = BC$, on a $EI = FJ$. On considère alors les triangles EIF et FJG. On a EI

= FJ et, pour des raisons de parallélisme, $\hat{E} = \hat{F}$ et $\hat{I} = \hat{J}$; d'après le « 1^{er} cas d'égalité des triangles », EIF et FJG sont donc « égaux » (= isométriques), en sorte que EF = FG, CQFD.

Un symptôme anti-moderne

La naturalisation des œuvres humaines – qui en fait des monuments à visiter, à honorer, à vénérer même pour certains et, bien sûr, à *fuir* pour d'autres – est corrélatif de l'*oubli* de leurs raisons d'être, et même de la *question* de leurs raisons d'être. L'absence de questionnement des œuvres – et en particulier des savoirs – sur leurs raisons d'être ne permet qu'une entrée *fictive* dans la culture, et fait des œuvres des *idoles* (du grec *eidos*, forme) que d'aucuns vénèrent non sans agressivité à l'encontre de ceux qui se refusent à ce rite absurde. L'idolâtrie, le fétichisme des œuvres et des savoirs a, en quelques décennies, créé un paysage scolaire ravagé, où l'on étudie des œuvres « privées de sens », comme on dit, qui ne seraient plus désirables qu'en elles-mêmes – en soi et pour soi – et non pour ce qu'elles permettraient de comprendre et de faire en le comprenant. Il ne faudrait pas croire que le souvenir de l'ordre ancien que j'ai tenté de ranimer soit en aucune façon une apologie du retour au passé, telle que celle-ci fleurit en certains écrits qu'on dit influents en haut lieu mais dont les relents ultras ne font guère de doute. L'incompréhension postmoderne des œuvres va de pair, en ce cas, avec un retour d'affection idéologico-sectaire pour des œuvres du passé regardées comme des bibelots dont les formes surannées rassurent ceux qu'effraient les audaces de la modernité, mais qui sont aussi des œuvres *qu'on ne comprend plus vraiment*.

Ainsi en va-t-il à propos du *calcul mental*, dont les raisons d'être anciennes sont ignorées des idolâtres des savoirs, au profit d'une dévotion toute formelle et politiquement orientée. Considérons le problème suivant : « Trois objets d'une certaine sorte ont coûté 13,50 € ; combien coûteront cinq objets de cette sorte ? » La technique diffusée par l'école primaire pour accomplir la tâche demandée était autrefois, à l'instar de toute l'arithmétique, essentiellement *orale* – elle était censée pouvoir se passer, dans l'usage, de tout recours à l'écrit. En l'espèce, le petit *discours* à faire, dont le patron était appris *par cœur*, était à peu près le suivant : « Un objet coûtera trois fois moins, soit $\frac{13,50}{3} = 4,50$ €, et cinq objets coûteront cinq fois plus soit $5 \times 4,50 = 22,50$ €. » On voit ici que le fait de pouvoir « calculer de tête » était alors *fonctionnel* – car il ne fallait pas que la récitation performative du petit discours arithmétique, appris par cœur comme un tout, s'interrompît ! Oralité du travail arithmétique ordinaire : telle était alors une *raison d'être essentielle* du calcul mental.

Voici maintenant un exemple « authentique » de travail arithmétique, tiré du *Cours abrégé d'arithmétique* de Carlo Bourlet, paru chez Hachette en 1922. Le problème proposé est celui-ci :

Dans quelle proportion faut-il mélanger du blé à 16 francs l'hectolitre avec du blé à 20 francs l'hectolitre pour obtenir du blé à 17 francs l'hectolitre ?

Arrêtons-nous d'abord sur la solution usant de la « technologie » *algébrique* – qu'Alain avait en horreur ! Elle consiste essentiellement en un petit travail *écrit* (même s'il peut s'oraliser).

Soit x la proportion de blé à 16 F/hl ; la proportion y de blé à 20 F/hl est donc $y = 1 - x$ et on doit avoir :

$$\begin{aligned} 16x + 20(1 - x) &= 17 \\ \Leftrightarrow 20 - 4x &= 17 \\ \Leftrightarrow 4x &= 20 - 17 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

On a donc $x = \frac{3}{4}$ et $y = \frac{1}{4}$.

Mais voici maintenant la solution « arithmétique » *d'autrefois*, que donne Bourlet, où le calcul mental (y compris *pour simplifier des fractions*) était un « ingrédient » indispensable du travail discursif (et « mental ») requis.

Cherchons, par exemple, combien dans 100 hectolitres du mélange il devra y avoir d'hectolitres de chaque espèce.

Les 100 hectolitres du mélange coûtent $100 \times 17 = 1700$ francs. Prenons d'abord 100 hectolitres de blé à 16 francs ; ils coûtent $100 \times 16 = 1600$ francs. Remplaçons-y 1 hectolitre par 1 hectolitre de blé à 20 francs. Le prix du mélange augmentera de $20 - 16 = 4$ francs. Ainsi, chaque fois que nous remplaçons 1 hectolitre de blé à 16 francs par 1 hectolitre de blé à 20 francs, le prix du mélange augmente de 4 francs. Pour que les 100 hectolitres qui valent 1600 francs coûtent 1700 francs, il faut que le prix augmente de $1700 - 1600 = 100$ francs. Il faudra donc remplacer autant d'hectolitres de blé à 16 francs par du blé à 20 francs que 4 est contenu dans 100 : soit $\frac{100}{4} = 25$. Les 100 hectolitres devront donc

contenir 25 hectolitres de blé à 20 francs et, par suite, $100 - 25 = 75$ hectolitres de blé à 16 francs. On devra donc mélanger les deux blés dans la proportion de 75 hectolitres de blé à 16 francs pour 25 hectolitres de blé à 20 francs, ou, comme $\frac{75}{25} = \frac{3}{1}$, dans la proportion de 3 hectolitres de blé à 16 francs pour 1 hectolitre de blé à 20 francs.

On saisit la fonctionnalité ancienne du calcul mental, qui oblige par exemple à s'entraîner à simplifier des fractions ou à effectuer toute autre opération *dès lors que de telles opérations devront être effectivement réalisées*. À cela s'oppose le formalisme d'une certaine pratique contemporaine, où les opérations travaillées, parce qu'elles ne sont pas motivées par leur utilité, sont choisies *sans véritables raisons de l'être*. La vénération d'œuvres du passé hors des problématiques fonctionnelles qui leur donnaient sens se dégrade alors en une propagande bavarde, étrangère à toute vie mathématique authentique – d'hier comme d'aujourd'hui –, au détriment des générations montantes.

Rénover le curriculum mathématique

Dans l'annexe au décret instituant le *socle commun des connaissances et des compétences* (JO n° 160 du 12 juillet 2006), à propos des « principaux éléments de mathématiques » qui composent ce « socle », on lit cette phrase : « Dans chacun des domaines que sont le calcul, la géométrie et la gestion des données, les mathématiques fournissent des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne. » Le but est louable ; mais l'idée qu'il concrétise a été perdue de vue depuis longtemps. Aussi il convient aujourd'hui de reprendre le curriculum mathématique avec deux types de questions en tête, dont je n'examinerai d'abord que la première : « Pour chacun des savoirs mathématiques enseignés, quelle est son utilité, quels sont ses emplois et quelle est sa pertinence pour le citoyen d'*aujourd'hui* sinon de demain ? »

Considérons à titre d'exemple la simple « règle de trois », dont nos idolâtres réactionnaires sont tellement nostalgiques. Et reprenons le petit problème vu plus haut : « Trois objets d'une certaine sorte ont coûté 13,50 € ; combien coûteront cinq objets de cette sorte ? » Un curriculum *rénové* peut d'abord prendre acte d'une création essentielle au bonheur de l'humanité : celle du concept de *fraction*, qui généralise la notion de nombre *entier*. C'est là, certes, une invention déjà ancienne, mais dont certains emplois bénéfiques demeurent terriblement absents de la culture scolaire comme de la culture extrascolaire. Le concept de fraction, en effet, permet de passer de la notion commune de nombre entier de « fois » à la notion révolutionnaire de nombre *fractionnaire* de « fois ». En quoi est-ce utile au bonheur commun ? En ceci qu'il devient possible de *dire* maintenant : « Si trois de ces objets ont coûté

13,50 €, cinq objets coûteront $\frac{5}{3}$ fois plus, soit $\frac{5}{3} \times 13,50 \text{ €} = \dots$ » Bien entendu, pour « effectuer » l'opération $\frac{5}{3} \times 13,50$, il faudra bien prendre acte du fait que, *aujourd'hui*, les calculs que l'état de la société et de ses découvertes imposaient avant-hier de faire « de tête » se font désormais à l'aide d'une calculatrice : celle de mon téléphone portable m'indique que $(5 \times 13,50) \div 3 = 22,5$. La notion de nombre fractionnaire et l'usage d'une calculatrice simple donnent une puissance de pensée et d'action bien supérieure à ce qu'elle était traditionnellement : si 98 exemplaires d'un certain article ont coûté 441 €, 135 exemplaires de plus coûteront (sauf remise de la part du vendeur...) $\frac{135}{98}$ fois plus, soit $\frac{135}{98} \times 441 \text{ €} = \frac{135 \times 441}{98} \text{ €}$, soit encore, d'après mon téléphone portable, 607,5 €.

Il est ainsi des savoirs à rénover. Voici un cas plus difficile. Un professeur stagiaire qui a la responsabilité d'une classe de 4^e en mathématiques s'interroge sur les raisons d'être d'un sujet d'étude qui, dans le programme de cette classe, vient se nicher dans le thème des *quotients de nombres décimaux* (relatifs) : la question de l'inverse d'un nombre (non nul). Pourquoi donc la notion d'inverse d'un nombre ? Rend-elle des services du style de ceux que rend la notion de nombre fractionnaire par exemple ? Pour y voir plus clair, on peut remonter dans un passé où cette raison d'être était *beaucoup plus explicite*. Le livre de Camille Lebossé et Corentin Hémerly pour les classes de 5^e déjà cité présente par exemple les développements ci-après.

Quotient exact de deux nombres entiers ou fractionnaires

Pour calculer le quotient exact de deux nombres entiers ou fractionnaires a et b , on peut écrire a et b sous forme de fractions et se ramener ainsi au produit de a par l'inverse de b .

EXEMPLES :

$$7 : 9 = \frac{7}{1} : \frac{9}{1} = 7 \times \frac{1}{9} ; 12 : \frac{3}{5} = \frac{12}{1} : \frac{3}{5} = \frac{12}{1} \times \frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} ; 3\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{11}{3} \times \frac{5}{4} = 3\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$$

Pour diviser un nombre a par un nombre b , il suffit de multiplier a par l'inverse de b .

On remplace ainsi une division par une multiplication. [...]

Conclusion : l'attention traditionnellement portée à la notion d'inverse d'un nombre est due au souhait de *remplacer une division par une multiplication*. Est-ce là la raison d'être de cette notion ? On jugera peut-être que, si la réponse à cette dernière question était positive, la chose serait décevante ! Ici, en effet, nulle prétention héroïque, chère aux fétichistes des savoirs ! Or la réponse est bien celle-là : elle est tout bonnement liée à un *besoin*, le besoin de remplacer un calcul « difficile » par un calcul plus facile, un calcul « long » par un calcul « rapide » – notamment quand on travaille « de tête ». La consultation d'autres ouvrages inscrits dans la même tradition confirme cette réponse. Une *Algèbre* pour les concours administratifs due à R. Cluzel et H. Court et publiée chez Delagrave en 1951 ne dit pas autre chose. « *Diviser par b revient à multiplier par son inverse $\frac{1}{b}$* » indiquent les auteurs, qui encadrent l'égalité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ avant d'ajouter : « Cette propriété est souvent utilisée dans les calculs. On remplace ainsi une division par une multiplication. » C'est ainsi que, précisent-ils, pour diviser par π , on multiplie par $\frac{1}{\pi}$, soit approximativement par 0,318 ; ainsi a-t-on : $\frac{38}{\pi} = 38 \times \frac{1}{\pi} \approx 38 \times 0,318$

≈ 12,084. À titre d'exercices, les auteurs proposent de calculer l'inverse de 0,375 puis de calculer $243 : 0,375$, ou de calculer l'inverse de 0,625 et de calculer alors $168,32 : 0,625$, etc. Plomberie mathématique, à nouveau ! La technique indiquée est liée à toute une organisation qui inclut notamment la disponibilité de tables d'*inverses*, lesquelles apparaissent dès la civilisation mésopotamienne il y a de cela quelque 4 000 ans (en base 60 : 3 inverse 20, 4 inverse 15, 5 inverse 12, 6 inverse 10, 8 inverse 7.30, etc.). Tout cela est plus que digne d'être révééré, sans doute. Mais une longue période de plusieurs millénaires de disette numérique a désormais pris fin : la calculatrice de mon ordinateur me donne d'un clic l'égalité

$$\frac{38}{\pi} = 12,09577567498404551843516601631...,$$

ce qu'on pourra comparer avec le résultat annoncé plus haut. Bien entendu, il existe toujours, pour faire se survivre une « œuvre » humaine dépassée, la tentation – à laquelle il faut savoir résister – de lui trouver des emplois *opportunistes*. On pourra ainsi demander aux élèves de retrouver la valeur d'un quotient dans le calcul duquel on a par erreur interverti le diviseur et le dividende – problème opportuniste, fruit d'un effort émouvant qui ne mérite pas d'être davantage commenté ici. Le programme actuel de la 5^e est là-dessus ambigu : il demande que les élèves sachent que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ et enjoint qu'un travail soit « conduit sur la notion d'inverse

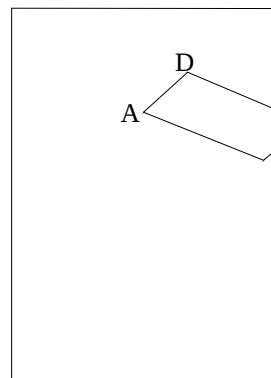
d'un nombre non nul, les notations x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ et l'usage de calculatrices avec la touche correspondante », ajoutant alors *in fine* : « À cette occasion, on remarquera que diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse. » On tient là, exemplairement, les symptômes d'une organisation mathématique dont la niche écologique est aujourd'hui devenu introuvable, et qui est donc promise à disparaître, n'était la terrible hystérésis curriculaire à laquelle notre propre indécision accorde des droits exorbitants.

La notion de parcours d'étude et de recherche (PER)

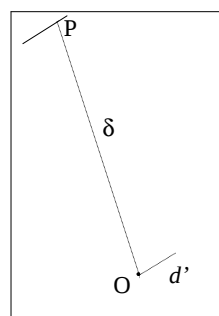
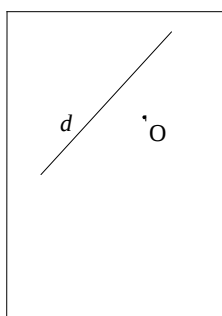
La rénovation du curriculum mathématique doit aujourd'hui partir d'un état du système d'enseignement dont le portrait a été depuis longtemps brossé, mais en quelque sorte en négatif, par la théorie des situations didactiques à laquelle le nom de Guy Brousseau est attaché. Des « œuvres » mathématiques dont la liste est fixée par la tradition – même si celle-ci est périodiquement réinventée – sont présentées de façon essentiellement formelle, et non pas fonctionnelle. De là une première direction du travail rénovateur aujourd'hui vital : pour chaque « composant » du corpus que l'on prétend enseigner, *la profession* – et non chaque professeur agissant comme s'il était seul au monde – doit pouvoir exciper de *raisons d'être* qui soient à la fois *authentiques au plan épistémologique et social, cohérentes au plan curriculaire*, et susceptibles d'être rencontrées, reçues, vécues, intégrées par les élèves du niveau d'études visé à travers des situations didactiques appropriées. Telle est la problématique évoquée plus haut, dont, entre mille autres, témoigne l'humble question sur les « situations problèmes pour introduire les triangles isométriques ». Ici, les œuvres à étudier sont proposées par une puissance extérieure, dont le principe de choix n'est pas connu. Dans une perspective de rénovation, la profession doit se borner alors à déclarer possible leur enseignement ou à en rejeter l'idée même en vertu du triple critère que je viens d'énoncer. Dans un livre paru il y a maintenant plus d'un quart de siècle⁸, je citais à cet égard cette formule si juste d'un pédagogue britannique, selon lequel *the good teacher is known by the number of subjects that he declines to teach* : appliquée à la *profession* tout entière, et non au professeur individuel, elle indique une exigence sur laquelle nous ne devons pas céder.

⁸ Yves Chevallard, *La transposition didactique*, La Pensée sauvage, Grenoble, 2^e édition 1991.

Pourtant, quand on tente de la mettre en œuvre, la solution ainsi avancée au problème du dépérissement curriculaire n'est qu'à moitié satisfaisante. En pratique, pour chaque savoir mathématique à enseigner, il convient de créer une ou plusieurs *activités d'étude et de recherche* (AER) qui « forcent » ce savoir, en ce sens que, étant donné la culture et le savoir-faire mathématico-didactiques des élèves considérés, l'attaque du *problème* générateur de l'AER conduise la classe, avec une forte probabilité, à rencontrer les éléments du savoir visé. Voici un exemple. Dans une classe de 5^e, la professeure impulse et dirige l'étude du parallélogramme ; au moment où nous l'observons, elle souhaite plus précisément faire rencontrer à ses élèves la propriété qu'ont les diagonales de se couper en leur milieu. Elle leur propose pour cela le problème suivant, dont l'énoncé se réfère à la figure ci-contre : « Le sommet C du parallélogramme ABCD est sorti des limites de la feuille. Tracer la partie visible de la droite (AC). »

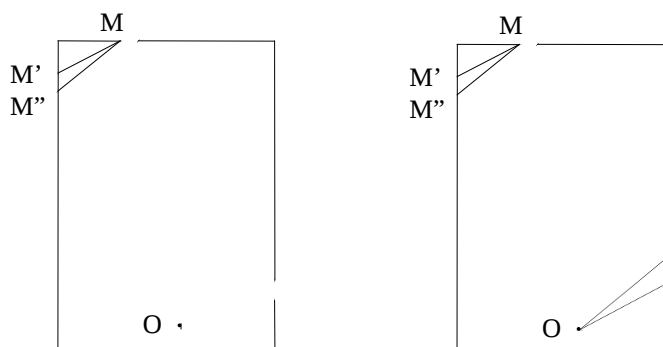


L'activité d'étude et de recherche ainsi lancée conduit la classe à dégager, dans la séance même, une solution complète appuyée sur la *conjecture* que la diagonale cherchée passerait par le milieu de l'autre, ainsi qu'à ouvrir une autre voie de solution, non examinée dans la séance (mais sur laquelle la classe travaillera ultérieurement), consistant à opérer sur la figure donnée une symétrie bien choisie qui ramènerait le parallélogramme « tronqué » dans le cadre de la feuille. On aperçoit peut-être la difficulté que j'évoquais. Car outre le parallélogramme et ses diagonales, la professeure aura, en vertu du programme de 5^e, à faire reconnaître par la classe, entre autres choses, que l'égalité des angles alternes-internes formés par deux droites et une sécante commune implique le parallélisme des deux droites en question ; et elle devra pour cela disposer d'un *problème* autour duquel elle fera vivre une AER « forçant » la rencontre avec le « fait spatial » dont il s'agit de provoquer la reconnaissance. Pour cela, en l'espèce, les figures ci-après suggèrent une idée : pour tracer à l'aide d'une règle et d'un compas du commerce la parallèle à une droite d passant par un point O « proche » de d sur la feuille de travail (figure de gauche), les élèves sont munis d'une ou plusieurs techniques ; mais comment faire pour tracer cette même parallèle d' lorsque O s'éloigne de d (figure du centre) ? La clé de la solution consiste à tracer une sécante δ à d passant par O et à reproduire convenablement en O l'angle de δ avec d .



Le problème est indéfiniment recommencé. Dans la technologie des AER, de plus, les choses ne s'arrêtent pas là : il convient en principe de faire voir d'où un tel problème peut surgir, quel *projet de connaissance et d'action* peut conduire à rencontrer le problème proposé. Dans le cas que l'on vient d'évoquer, on peut par exemple penser à ceci. La figure ci-dessous à gauche représente une pièce munie de deux fenêtres, en haut (sur la figure) et en bas à gauche. On a repéré que, au cours de la matinée, la direction du soleil varie au fil de l'heure, la

direction « initiale » étant donnée par (MM') , la direction finale par (MM'') ; un objet a été placé en O . La question que l'on se pose est alors la suivante : le point O aura-t-il été au cours de la matinée exposé au soleil ? La réponse, en l'espèce, apparaît sur la figure de droite.



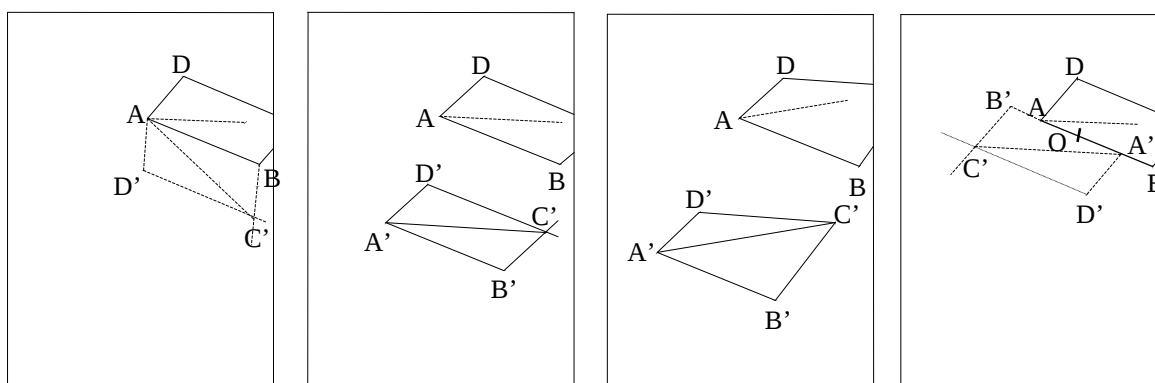
Je note ici ce qui est une faiblesse grave de la profession aujourd'hui : on ne sait pas y indiquer – par exemple aux « entrants » dans la profession –, pour chacun des savoirs à enseigner, un ensemble d'AER engendrant ce savoir sous des conditions didactiques voisines de celles prévalant (ou pouvant prévaloir) dans un type donné de classes. Il y a là un patrimoine professionnel à *construire*, ardente obligation dont le souci semble aujourd'hui trop étranger à la profession – qui abandonne donc ses membres à leur « génie » personnel, signe éclatant que, sur ce point comme sur d'autres, *la profession n'existe guère*.

En quoi la mise en œuvre, non pas d'une AER, ou plutôt d'une suite d'AER isolées, mais au contraire d'une *succession organique* d'AER, ce qu'on appellera un PER, un *parcours* d'étude et de recherche, va-t-elle venir changer les choses ? L'atomisation de l'étude en AER successives, déconnectées les unes des autres, qui apparaissent souvent comme autant de points isolés dans la chronique de la classe, et dont tant la conception que la réalisation se font chaque fois à nouveaux frais est un facteur sévère de limitation de la diffusion du nouveau paradigme didactique fondé sur la notion d'AER. La dynamique de l'étude que le professeur doit nourrir, impulser, réguler doit être régulièrement relancée par l'introduction d'une AER nouvelle, souvent sans lien avec celles qui l'ont précédées – non plus d'ailleurs qu'avec celles qui suivront. Cette structure faiblement intégrée de la suite des AER organisant l'étude pose problème : l'expérience montre en effet que cette ossature didactique est relativement fragile parce que l'introduction *ex abrupto* d'une AER nouvelle se fait alors, en règle générale, sans *motivation mathématique* suffisante, et en particulier sans véritable raison autre que la volonté du professeur – ou même de la classe, quand celle-ci a voix au chapitre en la matière – de lancer l'étude de tel ou tel bloc thématique.

Comment obvier à ce défaut constitutionnel du paradigme néoclassique, qui conserve le défilé immotivé des œuvres mais s'efforce de fonctionnaliser – et donc de remotiver – l'étude de chacune d'elles ? Comme souvent, alors même qu'on a pu définir l'enseignement comme une genèse « artificielle » des connaissances – assumée et revendiquée comme telle –, la solution peut être trouvée dans la genèse « naturelle » des connaissances, telle qu'elle peut s'observer dans les sciences et ailleurs, et telle aussi que d'aucuns ont tenté, au cours des dernières décennies, de l'acclimater dans l'enseignement secondaire et supérieur au travers des dispositifs qui ont nom *projets* (en DEUG par exemple), *TER* (en maîtrise), *TIPE* (en CPGE), *TPE* (en 1^{re} et, fugacement, en Terminale), *IDD* (au cycle central du collège), etc.

Alors que, dans une AER, on s'efforce d'étudier une question *ad hoc* Q_j , censée engendrer un savoir mathématique S_j déterminé, extrait d'une suite préprogrammée de savoirs $(S_i)_{i \in I}$, dans

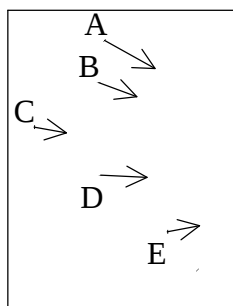
la genèse « naturelle » des connaissances, et donc dans ce qu'on formalisera ici sous le nom de PER, les choses vont, si l'on peut dire, à l'envers : au lieu de *partir* d'un savoir S_i , on part – très normalement – d'une question *inaugurale* Q , dont l'étude conduit à étudier des questions dérivées Q_k , en fonction des *besoins de connaissance engendrés par l'étude* de Q et en fonction aussi *des décisions prises par le collectif d'étude* (la classe, l'équipe de TPE en classe de première, etc.) sous l'autorité de son ou de ses « directeurs d'étude » (professeurs, etc.). Le *paramètre clé* est ici la question génératrice Q , qui détermine en grande partie les questions engendrées Q_k et, par voie de conséquence, les savoirs S_i sollicités (et, *pour cela*, étudiés). Avant d'aller plus loin, illustrons le schéma général qui « définit » la notion de PER. La question Q peut bien être, certes, une question particulière, telle celle relative aux diagonales d'un parallélogramme ; rien en cela d'anti-naturel ! En vérité, le travail d'étude et de recherche que cette question *peut* engendrer est en fait souvent beaucoup plus important, beaucoup plus étendu que ce à quoi on se restreint ordinairement dans les classes travaillant même par AER. Dans le problème du parallélogramme tronqué, ainsi, et comme on l'a vu, il est possible d'envisager une symétrie axiale (ci-dessous à gauche) ou centrale (en en choisissant adéquatement le centre), ou encore d'user (en 4^e) d'une translation (ci-dessous au centre gauche), techniques qui ont une *portée* plus large que celle fondée sur la seule propriété des diagonales du parallélogramme (ci-dessous au centre droit). En outre, il est possible, voire nécessaire, d'étudier chaque fois les cas d'impossibilité : comment faire par exemple, si l'on a décidé d'user d'une symétrie centrale par rapport au point A , lorsque la figure transformée est elle-même tronquée (voir la figure à droite) ? Etc.



Pourquoi cette genèse « naturelle » des connaissances est-elle spontanément absente des classes ? Pour deux raisons principales, semble-t-il. Tout d'abord, il y a l'obsession d'œuvres mathématiques patinées et sanctifiées par le temps, qui ne sont plus regardées comme des moyens de produire des réponses à des questions – ce qui fait pourtant la vie des savoirs ! Cette obsession est très profondément ancrée dans la vieille tradition d'enseignement. On y enseigne des œuvres *faites*, valorisées *pour elles-mêmes* – les diagonales qui se coupent en leur milieu, etc. –, non les *problèmes* que ces savoirs permettraient de résoudre ou dont ils pourraient naître à nouveau dans le travail de la classe. Pour cette raison, les questions étudiées – ici : comment tracer la diagonale dans le parallélogramme tronqué ? – *ne sont en général pas prises au sérieux*. Elles ne sont qu'un *alibi*, auquel du reste on ne croît guère, en sorte que les réponses qu'on leur apportera peut-être semblent, elles, tout à fait dénuées de valeur. Le problème du parallélogramme tronqué, dans cette tradition, sert au mieux à faire rencontrer la propriété des diagonales, qui seule importe, qui sera seule répertoriée. À la limite, l'activité d'étude et de recherche que ce problème engendre, et que j'ai évoquée plus haut, pourrait s'arrêter dès lors que la conjecture visée a émergé – le problème n'est qu'un échafaudage provisoire, qui permet de construire la seule chose qui compte, et qu'on regarde comme se légitimant elle-même !

Il est pourtant une *seconde raison* au dépérissement actuel de l'enseignement des mathématiques. Le catalogue des œuvres enseignées, sortes de trous noirs qui ne tolèrent quasiment rien autour d'eux, est étrangement sélectif dans sa composition. Dans l'organisation des mathématiques à enseigner, il y a plusieurs niveaux. Tout d'abord, tout en bas de l'échelle, il y a le niveau des *sujets d'étude* : comment, par exemple, calculer la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont on connaît les mesures des côtés de l'angle droit ? Puis, juste au-dessus, il y a les *thèmes d'études*, désignés en général par l'un de leurs éléments « actifs », réputé emblématique : ce sera le théorème de Pythagore, ici. Ensuite, il y a les *secteurs études* – par exemple le secteur des figures planes élémentaires. Enfin, il y a les grands *domaines d'études*, celui de la géométrie par exemple. Or le choix des œuvres à enseigner se limite presque exclusivement au répertoire classique des thèmes « bien connus » (le parallélogramme, le triangle rectangle, etc.). Et un professeur serait bien en peine aujourd'hui de faire travailler sa classe sur un *secteur* (par exemple celui des figures planes élémentaires) sans décomposer celui-ci en une succession de thèmes prédécoupés (le parallélogramme, le triangle rectangle, etc.).

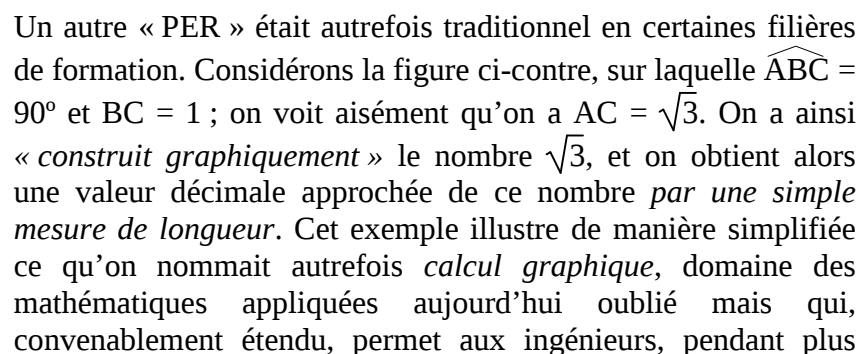
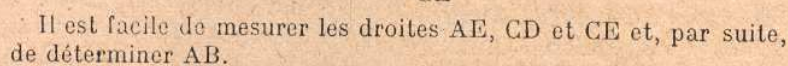
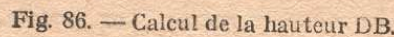
La notion de PER permet de se placer à un autre niveau dans l'étude d'un corpus mathématique donné. Les questions particulières évoquées jusqu'ici relèvent par exemple toutes d'une *même grande question*, celle de la construction de certains éléments d'une figure que l'on sait être déterminée par les données graphiques fournies, mais dont certains des éléments classiquement utilisés ne sont pourtant pas accessibles, situation dont la figure ci-contre propose un autre exemple : un illustrateur a dessiné deux personnages A et C, qui regardent un certain point P au loin ; il veut situer le regard d'autres personnages, B, D, E, qui doivent aussi regarder P. Comment peut-il faire, étant entendu que le point P se trouve hors de la feuille où il dessine ?



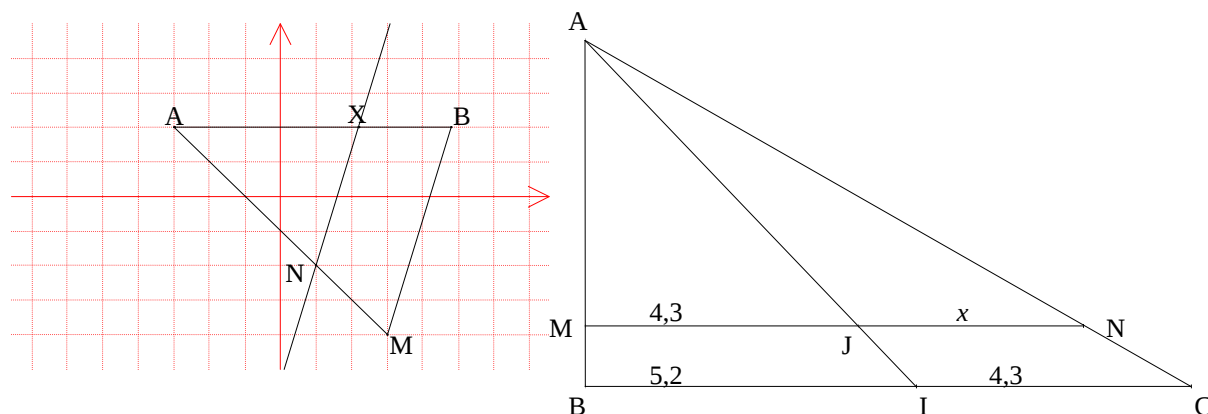
On imagine que le nombre de questions particulières qui peuvent relancer le parcours d'étude et de recherche amorcé par l'une de ces questions est *potentiellement immense*. Le bénéfice est double : la motivation mathématique du problème étudié, sans doute chaque fois spécifique, relève pourtant d'un schéma commun un grand nombre de fois mis en jeu, qui devient vite familier ; l'investissement cognitif, qui peut être important lorsqu'il s'agit d'appréhender pour la première fois le genre de difficulté à étudier, est chaque fois plus réduit, ce qui permet dès lors de se centrer sur la spécificité du problème à résoudre. L'idée essentielle est alors celle de « saturer » un domaine ou même un ensemble de domaines mathématiques à l'aide d'un *petit nombre* de PER. Telle est l'une des clés de la rénovation curriculaire à laquelle je travaille de concert avec un certain nombre de gens de la profession – *chercheurs compris*. Dans le domaine numérique, par exemple, au collège, un PER autour de la question « Comment peut-on calculer sur des nombres qui s'écrivent avec beaucoup de décimales ? » pourra ainsi couvrir, quoique de façon non systématique (il ne s'agit pas de reproduire le défilé formel des œuvres, propre à la tradition ancienne), une large part des secteurs, thèmes et sujets du domaine numérique.

Retour au futur

À bien y réfléchir, au reste, on découvre que l'ancienne tradition elle-même avait ses PER... En géométrie, le curriculum ancien proposait une liste de problèmes autour du thème des *distances inaccessibles* – que l'on peut calculer (à l'aide de la trigonométrie) ou mesurer sur



d'un siècle à partir de 1860, d'effectuer graphiquement des calculs en tous genres (évaluation de fonctions, calcul d'intégrales, résolution de systèmes d'équations, etc.). En 4^e, notamment, on peut se proposer un parcours d'étude et de recherche portant sur la question de la construction d'un « calculateur graphique », c'est-à-dire visant à développer un ensemble d'*algorithmes géométriques* permettant d'effectuer graphiquement les principaux types de calculs rencontrés à ce niveau. Sur les figures ci-après, on a ainsi construit, sur papier quadrillé, le nombre $AX = \frac{2}{3} \times 7,8$, puis, sur papier blanc, le nombre $x = \frac{4,3^2}{5,2}$.



À partir du calculateur graphique peu à peu construit, on pourra fabriquer un calculateur *électronique* en utilisant un logiciel de géométrie dynamique tel Géoplan : il suffit pour cela d'exécuter sur Géoplan l'algorithme géométrique trouvé, puis de demander au logiciel de mesurer la distance voulue. Mais on notera surtout que l'étude de la question génératrice du PER – comment calculer graphiquement ? – engendre nombre de questions qu'il peut être pertinent d'étudier en 4^e (ou en d'autres classes). Ainsi apparaît-il « naturel », dans ce PER, de se demander quels entiers naturels n s'écrivent comme une *somme* de deux carrés d'entiers ($n = x^2 + y^2$) : si par exemple on cherche à « construire » le nombre $\sqrt{202}$, on observera que $202 = 11^2 + 9^2$ et il suffira alors de mesurer, sur une feuille de papier d'écolier, la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 11 cm et 9 cm. On justifierait de semblable façon le fait de s'interroger sur la nature des entiers n qui s'écrivent comme une *différence* de carrés d'entiers ($n = x^2 - y^2$). Cette dernière question peut être étudiée en 3^e : on montre aisément que les entiers en question sont les entiers impairs et les entiers multiples de 4. La première, en revanche, ne peut guère être étudiée très avant à ce niveau : on démontre en effet que les entiers cherchés sont ceux dans la décomposition en facteurs premiers desquels les facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 sont affectés d'un exposant *pair*. Mais ce n'est pas là une raison pour ne pas *poser la question*, et l'étudier quelque peu, si elle se présente. Bien entendu, le fait de prendre la décision de lancer la classe dans l'étude de telle question engendrée par l'étude de la question à l'origine du PER, ou le fait, cette étude amorcée, de l'interrompre à tel moment, incombe en dernier ressort au professeur, agissant en tant que directeur d'étude.

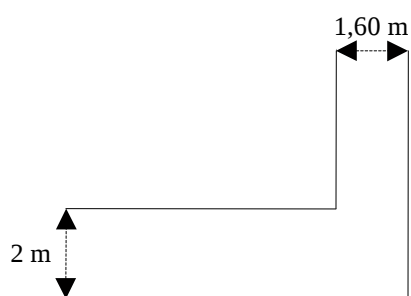
Une révolution épistémologique ?

Hormis l'exemple du PER « topographique » peut-être, ce qui a été évoqué jusqu'ici en matière de PER reste à *l'intérieur* des mathématiques. La rénovation de l'enseignement des mathématiques suppose davantage : la reconquête des *usages extramathématiques* des mathématiques. Pour cela, la profession doit redevenir attentive aux *besoins mathématiques* du monde autour de nous – attitude que les trente dernières années ont tendu à bouter hors de

notre culture commune. Le déploiement de cette problématique retrouvée ne bute pas que sur l'obstacle d'un désapprentissage collectif maintenant accompli. Nombre de disciplines enseignées, en effet, ont appris à *minimiser* leur consommation de mathématiques, et à satisfaire *par elles-mêmes* leurs besoins en la matière, regardant en conséquence avec suspicion l'intrusion mathématicienne dans leur « terroir » – que, au reste, les professeurs de mathématiques d'aujourd'hui font souvent profession d'ignorer.

En attendant l'évolution à venir, dont j'ai tenté d'esquisser les contours, un mouvement planétaire a poussé en avant l'ajout au curriculum existant d'une composante neuve, celle de la *modélisation mathématique*, qui tente de conquérir (ou de reconquérir) aux mathématiques des territoires en déshérence disciplinaire. Mais, au moins dans le cas français, cette stratégie de reconquête « par la périphérie » ne parvient pas à bousculer une situation bloquée, dont le dépérissement se poursuit. Cette reconquête d'un régime épistémologique authentique, fondé sur la fonctionnalité des mathématiques, ne semble en effet pouvoir être réalisée qu'à partir de deux principes fondamentaux. Le premier consiste à lancer des PER qui ne s'enferment pas dans les mathématiques, comme il en va dans l'étude autrefois classique répondant à la question « Comment déterminer la distance entre deux points, accessibles ou non, de l'espace "topographique" ? », ou encore avec l'étude de la *statique des forces* – quelle force exercer pour vaincre telle résistance donnée ? De tels PER, qui apparaissaient autrefois relever strictement de la classe de mathématiques, ont vu leur statut changer au fil des décennies, le point de vue sur leur objet se modifiant de deux façons souvent concomitantes qui s'expriment par l'un ou l'autre de ces interdits : « On n'a pas à étudier ça en maths », ou : « Ça s'étudie ailleurs, dans d'autres disciplines ».

D'une façon générale, on peut alors rechercher des PER dont la légitimité dans la classe de mathématiques soit *a priori* peu contestable (même si l'on sait que le passage du temps peut changer les choses) parce que leur objet apparaît d'emblée « mathématique » et qu'aucune autre discipline co-enseignée n'en revendique la jouissance exclusive. En géométrie, on l'a vu, on peut lancer un PER visant à répondre à la question suivante : « Comment déterminer



tel ou tel élément d'une figure tracée sur une feuille dont certains éléments utiles tombent hors de la feuille ? » Au croisement des travaux géométriques et des travaux numériques, on peut de même envisager la question suivante : « Quelle est la taille maximale d'un objet que l'on peut transporter dans un édifice comportant couloirs, escalier, etc. ? » Par exemple, quelle est la longueur maximale d'une échelle que l'on veut transporter horizontalement dans le couloir schématisé ci-contre ?

En pratique, des PER ont été aussi réalisés (et étudiés) qui s'insinuaient dans des « interstices » du maillage disciplinaire de l'enseignement scolaire, c'est-à-dire qui opéraient une sortie hors du *terroir* mathématique sans toutefois empiéter sur le territoire de disciplines co-enseignées. Ainsi en va-t-il avec les questions suivantes : « Comment déterminer le coût de l'utilisation d'un téléphone mobile en fonction de l'usage qu'on en fait ? » ; « Comment établir un plan d'épargne en fonction des revenus disponibles et de l'épargne à constituer ? » D'une façon plus générale, il faudra bien que la rénovation du curriculum secondaire prenne en charge sincèrement, authentiquement, cette question essentielle, la deuxième des deux questions annoncées plus haut : pour chaque grand type de situations problématiques que peut vivre le citoyen d'aujourd'hui (celui que l'historien Lucien Febvre nommait « l'homme non spécialisé »), *quels sont les éléments de savoir utiles* ? Et, parmi ces éléments de savoir, quels

sont les éléments de *mathématiques* utiles ? C'est à sa capacité à prendre en charge cette interrogation essentielle pour chacun et vitale pour le futur de l'enseignement des mathématiques que la profession mesurera son rôle dans la révolution épistémologique aujourd'hui indispensable, à l'école comme ailleurs dans la société.

Du pessimisme de l'intelligence à l'optimisme de la volonté

Il est temps de conclure. La formule qui donne son titre à cette conclusion – il faut allier le pessimisme de l'intelligence à l'optimisme de la volonté – est souvent attribuée à Antonio Gramsci, qui l'aurait empruntée à Romain Rolland. Elle n'est pas indigne, je crois, du grand dessein qui devrait mobiliser nos énergies et nos talents, et que je déclinerai maintenant en quelques points.

1. L'état de l'enseignement secondaire des mathématiques est aujourd'hui calamiteux. Quelques symptômes plus ou moins dissonants résument cette situation de nécrose : monumentalisme, formalisme, inauthenticité épistémologique, oubli du monde et péjoration de ses « besoins », illusion lyrique, fantasme d'insularité et recherche de la pureté, fuite dans l'insignifiance ludique et la puérilité, foi naïve en une rédemption logicielle « mutualisée »... J'en passe. Rien ne serait plus dangereux que de croire aux situations scolairement établies. L'enseignement du latin et du grec tenait, naguère encore, le haut du pavé. Son avenir était certain ; sa brutale déroute, sa débâcle presque complète en quelques décennies devaient paraître impensables aux lauréats de l'agrégation de lettres classiques de 1965 : elles sont aujourd'hui accomplies.

2. Contre un funeste destin qui n'est plus improbable, les forces vives au service de l'enseignement des mathématiques doivent se retrouver en une *profession* qu'il reste historiquement à créer, et qui doit se constituer en refusant les tentations poujadistes ou élitistes au mauvais sens du terme qui taraudent les corporations à rassembler : professeurs, formateurs, chercheurs, responsables institutionnels de tout rang, etc. Le devoir vital de cette profession, comme il en va pour toute profession digne de ce nom, sera alors d'identifier et de s'employer à résoudre, en dépassant l'individualisme traditionnel qui dissimule mal l'abandon de chacun à soi-même, les grands et les petits *problèmes de la profession*, en commençant par les grands problèmes.

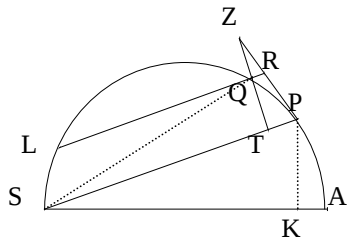
3. Le premier grand problème que doit affronter la profession a pour symptôme principal l'effroi devant l'usage – mathématique et surtout extramathématique – des connaissances mathématiques enseignées, possibilité que d'aucuns regardent aujourd'hui comme le signe d'un état ancillaire insupportable, comme une « instrumentalisation » dénaturante à refuser avec horreur. Cette catatonie épistémologique doit céder demain à un travail de la profession centré sur le beau, le profond concept *d'utilité* et sur son articulation avec le principe républicain de l'instruction, où les savoirs se justifient et se construisent non tant comme des œuvres admirables en elles-mêmes que comme des *outils de connaissance et d'action*, permettant de *comprendre* les situations du monde mathématique et extramathématique et d'*agir* en leur sein de façon à la fois intelligente et intelligible.

4. La constitution d'une profession et la conversion épistémologique et morale qui en est indissociable supposent le renoncement à l'illusion lyrique qui fait des mathématiques un savoir transcendant au monde social, consubstantiellement étranger à toute autre réalité que lui-même. Contre l'idéologie du sublime, il faut donc réapprendre collectivement les mathématiques comme humble artisanat, ordonné à des objectifs précis et socialement

désirables, articulé à des situations du monde déterminées. L'expérience mathématique doit retrouver sa signification immanente, plus proche de l'art du plombier que des rodomontades du montreur d'ours – personnage que l'on sait aujourd'hui condamné. En doute-t-on encore ? Allons-y donc d'un dernier exemple : celui de Newton, orfèvre en matière de plomberie mathématique, qui, dans un travail intitulé *Du mouvement des corps* (1684), prodrome à ses *Principia*, exerce son art comme le lecteur, pour son bonheur, pourra le découvrir par lui-même en examinant à ses dépens l'échantillon que voici ⁹.

Un corps tourne sur la circonférence d'un cercle. Trouver la loi de la force centripète qui tend vers un point de la circonférence.

Soit SPQA la circonférence du cercle, et S le centre de la force centripète ; P le corps porté sur la circonférence, Q la position prochaine vers laquelle il se mouvra.



Sur le diamètre SA et sur SP abaissez les perpendiculaires PK, QT ; par le point Q tracez LR parallèle à SP et rencontrant le cercle en L et la tangente PR en R. Que TQ et PR se rejoignent en Z. À cause de la similitude des triangles ZQR, ZTP, SPA, on aura l'égalité des rapports de RP^q (c'est-à-dire QRL) à QT^q et de SA^q à SP^q . Donc $\frac{QRL \times SP^q}{SA^q} =$

QT^q . Multiplions ces deux termes égaux par $\frac{SP^q}{QR}$; comme les points P

et Q se rejoignent, écrivons SP au lieu de RL, on aura $\frac{SP^{qc}}{SA^q} = \frac{QT^q \times SP^q}{QR}$. Donc la force centripète est

inversement comme $\frac{SP^{qc}}{SA^q}$, c'est-à-dire (puisque SA^q est donné) comme le quadrato-cube de la distance SP.

5. Les mathématiques enseignées doivent aujourd'hui réapprendre à se rendre socialement désirables, et culturellement avenantes. Autour de nous, les besoins mathématiques, qu'ils soient modestes ou plus sophistiqués, sont, en puissance, innombrables. Mais devant l'état de guerre épistémologique qui ravage nos enseignements, nombreux sont ceux qui ont appris à minimiser leurs besoins mathématiques, qu'ils tentent alors de satisfaire par leurs propres moyens, quand ils ne les ignorent pas au point de nuire ainsi à leurs plus chers desseins. Ce désenchantement mathématique qui empoisonne tout une culture, il nous revient de lui donner congé.

⁹ Isaac Newton, *De la gravitation*, Gallimard, 1995, p. 165.