

LA SENSIBILITÉ DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE AUX OSTENSIFS

OBJET D'ETUDE ET PROBLEMATIQUE

Marianna Bosch et Yves Chevallard

1. UN POSTULAT FONDAMENTAL¹

La théorie des situations situe la didactique des mathématiques « dans le cadre d'une science des conditions de la production et de la diffusion des savoirs utiles aux sociétés et aux affaires des hommes » (Brousseau, 1995, p. 4). Un texte antérieur précisait un peu plus la définition : « Nous appelons "Didactique des Mathématiques" la science des conditions spécifiques de diffusion (imposée) des savoirs mathématiques utiles aux membres et aux institutions de l'humanité » (Brousseau, 1994). Si on rappelle que, dans ses débuts, la didactique se proposait d'étudier « les activités qui ont pour objet l'enseignement, évidemment dans ce qu'elles ont de spécifique aux mathématiques » (Brousseau, 1986, p. 35), on voit combien la définition de l'objet d'étude s'est étendue, progressivement, au-delà des pratiques mathématiques scolaires.

Une telle extension s'accorde bien avec le positionnement de la didactique dans le champ de l'anthropologie des savoirs, où celle-ci apparaît comme « l'anthropologie didactique des mathématiques », sous-champ de « l'anthropologie des mathématiques », étude de l'homme « aux prises avec les mathématiques » (Chevallard 1991 et 1992). Là encore, en effet, le cadre de l'École a été dépassé, ou plutôt élargi. Car, partant du constat que *le didactique est partout dense dans le mathématique*, ou, en d'autres termes, que l'activité mathématique suppose toujours une activité d'étude, on a proposé très récemment de concevoir la didactique des mathématiques comme la *science de l'étude et de l'aide à l'étude des (questions de) mathématiques* (Chevallard, Bosch et Gascon, 1997).

Ces élargissements progressifs ne devraient pourtant pas masquer un trait essentiel qui gouverne depuis ses débuts la recherche en didactique des mathématiques. Nous croyons en effet que ce qui fonde et caractérise la didactique en tant que science n'est pas le fait de proposer un projet d'étude scientifique des problèmes d'enseignement des mathématiques. Sa singularité originaire consiste à *prendre comme objet premier à étudier* (et donc à questionner, à modéliser et à problématiser selon les règles de l'activité scientifique), non pas le sujet apprenant ou le sujet enseignant, mais *le savoir mathématique qu'ils sont censés étudier ensemble*, ainsi que l'activité mathématique que leur projet commun d'étude les portera à réaliser. Pour expliquer les faits d'enseignement auxquels elle se voit confrontée, la didactique postule que le « mystère » est *dans les mathématiques*, et non pas *dans les sujets* qui ont à apprendre et enseigner les mathématiques. De là que l'objet d'étude de la didactique ne puisse se trouver enfermé dans les institutions d'enseignement et qu'il ait fallu le situer dans le cadre plus large des pratiques mathématiques dans l'ensemble des institutions de la société².

¹ Une version préliminaire des paragraphes 1 et 2 de cet article a été présentée à la IX^e École d'été de didactique des mathématiques (Houlgate, août 1997). Voir Bosch (1998).

² Gascón (1998) développe cette idée dans ce qu'il présente comme une « reconstruction rationnelle » de l'évolution de la didactique des mathématiques.

Notons que ce principe méthodologique, qui met au premier plan la question de la modélisation de l'activité mathématique, a représenté une véritable innovation dans la recherche en didactique des mathématiques. L'approche classique, en effet, étudiait les problèmes de transmission et d'acquisition de *notions mathématiques supposées données*, c'est-à-dire transparentes, non thématiques par le chercheur. En outre, même les travaux qui, d'une manière ou d'une autre, problématisaient les notions mathématiques à étudier, ne soumettaient pas les modèles adoptés à la mise à l'épreuve caractéristique du travail scientifique. Ou bien la question du savoir mathématique était tenue pour non problématique, ou bien la réponse apportée était prise comme inquestionnable. Tout se passait comme si la problématique se situait essentiellement du côté des sujets apprenants ou enseignants, dans leurs capacités cognitives, leurs conceptions et préconceptions. Le mathématique et le cognitif étaient clairement distingués, selon le même tracé qui distinguerait un extérieur et un intérieur du sujet : le premier étant alors supposé aller de soi, c'est le second que l'on devait seul tenter d'expliquer.

Dans ce paradigme autrefois dominant, on peut considérer que le projet qu'inaugure la théorie des situations a créé une *première rupture* en posant *le mathématique comme l'essence des phénomènes didactiques*. La volonté d'élaborer une science de ces phénomènes constitue alors la *seconde rupture*, qui conduit à expliciter les modèles utilisés pour les soumettre à l'épreuve des faits, c'est-à-dire aux lois d'une véritable « épistémologie expérimentale ». C'est en ce sens fort qu'il faut interpréter, à notre avis, la question de la « spécificité » mathématique de la didactique, thème récurrent parmi les chercheurs français et qui n'a pas cessé, jusqu'à ce jour, de susciter des commentaires ³.

Or il nous semble que cette double rupture n'est pas toujours bien interprétée. Ainsi, on est parfois tenté de considérer que, dans la théorie des situations, la notion de *situation fondamentale* sert, avant tout, à décrire et fabriquer des situations d'enseignement, voire d'enseignement *scolaire dans la classe* ⁴. On oublie alors que cette notion constitue – aussi et surtout – l'instrument clé que propose cette théorie pour *caractériser les connaissances mathématiques*, qu'il s'agisse de connaissances pratiquées ou de connaissances à enseigner, qu'elles soient explicites et reconnues comme un savoir mathématique ou qu'elles restent implicites et ne puissent apparaître qu'en acte. Pour analyser l'enseignement et l'apprentissage d'une notion mathématique, la théorie des situations pose d'abord le problème de sa *description*, problème auquel il faut alors répondre en termes de situations fondamentales. L'hypothèse (forte) de l'existence d'une situation fondamentale spécifique de chaque connaissance mathématique n'est pas ici un aveu d'optimisme qui guiderait l'ingénieur didacticien, mais *la définition même de la connaissance mathématique* que nous

³ Arsac (1996) exprime très clairement le point de vue le plus répandu, selon lequel la portée générale de certaines notions de didactique (par exemple celle de contrat, de situation ou de transposition) ne contredirait pas la spécificité de la didactique, étant donné que ces notions ont besoin de se préciser et de se particulariser pour s'adapter aux différents domaines de savoir étudiés. Dans Chevallard (1991a), la prégnance du thème de la spécificité mathématique dans la communauté didacticienne est attribuée à l'absence d'une filiation épistémologique initiale de la didactique, problème originaire qui, comme nous l'avons dit, trouverait une solution dans le champ de l'anthropologie de la connaissance.

⁴ Legrand (1996) écrit ainsi : « Cette théorie postule donc que, pour chaque notion mathématique à enseigner à un niveau donné, il existe une situation ou un groupe restreint de situations susceptibles d'introduire assez rapidement la notion en classe dans une véritable dimension épistémologique » (p. 228).

propose cette théorie. On décrit une connaissance en termes de situation ; une connaissance *est* une situation ⁵.

Nous avons ici un principe théorique fondé sur un *modèle général des mathématiques* selon lequel les connaissances mathématiques peuvent se décrire à l'aide de situations fondamentales (définissables, à leur tour, comme des jeux formels). Ce modèle général doit alors permettre de construire des *modèles locaux* des différents contenus mathématiques à enseigner afin de mettre en évidence les conditions de construction et diffusion des connaissances qui leur sont associées ⁶.

Soulignons enfin que, par rapport au point de vue classique sur le savoir mathématique, la théorie des situations apporte encore une *nouvelle rupture* épistémologique fondamentale. Elle suppose en effet que *les connaissances mathématiques ne peuvent s'appréhender qu'à travers les activités qu'elles permettent de réaliser, et donc les problèmes qu'elles permettent de résoudre*. Les mathématiques ne sont pas simplement un système conceptuel, logiquement consistant et producteur de démonstrations : elles sont en premier lieu une *activité* qui se réalise *en situation* et *contre un milieu*. Il s'agit, de plus, d'une activité *structurée*, dont on peut dégager différentes phases – action, formulation et validation, auxquelles se rajoutent dévolution et institutionnalisation ⁷.

En ce sens, la notion de *transposition didactique* doit être interprétée comme développant la double rupture épistémologique provoquée par la théorie des situations ⁸. Car son apport principal n'a pas été seulement de mettre en évidence la *distance* qui sépare le savoir savant du savoir enseigné, et donc les transformations nécessaires que doit subir tout objet mathématique pour pouvoir être enseigné. Ce que montre surtout la notion de transposition didactique, c'est que *le savoir mathématique* (qu'il soit « savant », « enseigné », « à enseigner ») *est à l'origine de toute problématique didactique*. Il s'ensuit alors que ce savoir ne peut être pris comme un donné inquestionnable et que les recherches en didactique des mathématiques vont être conditionnées par le type de modélisation des mathématiques auquel on a recours – postulat fondamental qui était loin d'être évident vers 1980, mais qui, aujourd'hui, commence à être bien accepté.

Le travail que nous présentons ici se situe dans cette problématique première de modélisation des connaissances mathématiques. Il prétend, plus précisément, y situer les moyens écrits, graphiques, oraux, gestuels et matériels qui instrumentent l'activité mathématique et en conditionnent le développement. Mais, avant d'entrer au cœur du sujet qui nous occupe, nous rappellerons les éléments de base du modèle général d'activité mathématique que propose l'approche anthropologique.

⁵ Plus exactement : « Le principe méthodologique fondamental de la théorie des situations [...] consiste [...] à définir une connaissance par une "situation", c'est-à-dire par un automate qui modélise les problèmes que cette connaissance seule permet de résoudre de façon optimale. » (Brousseau 1994).

⁶ Des exemples de tels modèles locaux apparaissent dans la plupart des travaux issus de la théorie des situations. Un cas prototypique à cet égard est celui du comptage, abordé par Joël Briand (1993) et repris comme illustration dans Brousseau (1996). Cette étude montre combien la définition de l'activité de comptage (qui inclut, en particulier, l'énumération de collections) que propose la théorie des situations diffère des modèles mathématique et psychologique de la construction du nombre naturel, et comment la prise en compte de ces différences peut influencer dans l'organisation et la gestion des processus didactiques.

⁷ Voir Brousseau (1986).

⁸ Voir Chevallard (1985) et (1991a).

2. LA MODÉLISATION ANTHROPOLOGIQUE DU MATHÉMATIQUE

Même si l'approche anthropologique naît du mouvement même qu'inaugure la théorie des situations, les instruments qu'elle propose pour modéliser l'activité mathématique ne sont apparus que lentement, selon une progression freinée sans doute par le besoin de mettre d'abord en évidence la fragmentation institutionnelle de la connaissance. Une rapide rétrospective nous permettra de signaler les traits principaux de cette évolution qui, dans ses derniers développements, a su construire des instruments clairement opératoires pour une analyse des pratiques sociales « à mathématiques ».

Au point de départ, la théorie de la transposition didactique situe le savoir mathématique au point de mire en s'inscrivant d'emblée dans un projet d'*analyse épistémologique du régime didactique du savoir*. Mais la première modélisation proposée pour analyser les composantes de ce savoir reste assez sommaire : elle s'énonce en termes d'*objets de savoir*, lesquels se divisent simplement en objets *mathématiques*, *protomathématiques* et *paramathématiques*⁹.

La *problématique écologique* viendra élargir le champ d'analyse et permettra d'aborder les contraintes qui se créent entre les différents objets de savoir à enseigner. La description du savoir mathématique qui en résulte ne lui suppose toujours pas une structure préalable et continue de s'exprimer en termes des objets qui le composent. Mais ces objets entretiennent maintenant des *interrelations* hiérarchiques permettant d'entrevoir des *structures écologiques objectives*¹⁰.

Les développements ultérieurs¹¹, qui inscrivent définitivement la didactique dans le terrain de l'anthropologie de la connaissance (ou anthropologie cognitive), affinent l'axiomatique de la théorisation en enrichissant notablement le domaine de réalité que celle-ci ambitionne de prendre en compte. Le point de départ reste inchangé : *tout est objet*. Mais on distingue désormais des types d'objets particuliers : les *institutions*, les *individus* et les *positions* qu'occupent les individus dans les institutions. En venant occuper ces positions, les individus deviennent les *sujets* des institutions – sujets actifs qui contribuent à faire vivre les institutions par le fait même de leur être assujettis.

La *connaissance* – et le *savoir* comme une certaine *forme d'organisation de connaissances* – entre alors en scène avec la notion de *rapport* : un objet existe s'il existe un rapport à cet objet, c'est-à-dire si un sujet ou une institution le « (re)connaît » en tant qu'objet. Étant donné un objet (par exemple un objet de savoir) et une institution, la notion de rapport renvoie aux *pratiques sociales qui se réalisent dans l'institution et qui mettent en jeu l'objet* en question, soit donc à « ce qui se fait dans l'institution avec cet objet ». *Connaître* un objet c'est *avoir à faire avec* – et souvent *avoir affaire à* – cet objet.

Le *savoir mathématique*, en tant que forme particulière de connaissance, est donc le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne ou, plus généralement, se transpose dans des institutions. Mais le mathématique reste encore un

⁹ Voir Chevallard et Johsua (1982).

¹⁰ Voir Artaud (1998).

¹¹ Chevallard (1989), (1991a) et (1992).

terme primitif, *hypostase* de certaines pratiques institutionnelles – les *pratiques sociales à mathématiques*. Ce qui fait défaut, c'est l'élaboration d'une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles qui en permette la description et l'étude des conditions de réalisation.

Les derniers développements de la théorisation viennent combler ce manque. La notion clé qui apparaît alors est celle d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie*. Nous ne pouvons pas reprendre ici, avec tout le détail que cela mériterait, l'ensemble notionnel qui instrumente ce niveau de modélisation et qui a été présenté dans des textes récents¹². Mais nous indiquerons les notions de base de la construction ainsi que le contenu sémantique minimal pour pouvoir expliciter, dans le cadre théorique considéré, la problématique générale dans laquelle nous nous situons.

Aux termes premiers de l'anthropologie cognitive que nous avons rappelés plus haut viennent ici s'ajouter les notions de (*type de*) *tâche*, (*type de*) *technique*, *technologie* et *théorie*. Ces notions vont permettre de modéliser les pratiques sociales en général et l'activité mathématique en particulier. On part pour cela d'un premier postulat selon lequel *toute pratique institutionnelle se laisse analyser, de différents points de vue et de différentes façons, en un système de tâches* relativement bien circonscrites, qui se découpent dans le flux de la pratique. Le problème de la délimitation des tâches dans une pratique institutionnelle donnée reste ouvert et variera selon que l'on adopte le point de vue de l'institution où se déroule la pratique ou bien celui d'une institution extérieure d'où l'on observe l'activité et pour la décrire dans un but précis. La sémantique du mot reste donc ouverte et englobe des activités culturellement aussi diverses que le fait de jouer une pièce de Mozart au piano, de calculer le produit de deux entiers, de fermer une porte, de prendre le bus, de saluer quelqu'un, de dériver une fonction, de résoudre un problème de proportionnalité, de faire un cours de grec ancien, de corriger des copies de contrepoint, de danser un tango, etc. Tout pourtant n'est pas tâche : il existe en toute institution de l'activité non analysée en *types* de tâches, et dont la mention au moyen de verbes d'action d'acception très large (par exemple « calculer », « démontrer », etc.) laisse le contenu mal défini – on parle alors de *genre* de tâches.

La notion de tâche va se trouver restreinte, en effet, par le deuxième postulat, qui suppose que *l'accomplissement de toute tâche résulte de la mise en œuvre d'une technique*. Là aussi il faut entendre le terme de *technique* en un sens très large, comme une « manière de faire » particulière, et non selon l'acception courante de procédé structuré et méthodique, voire algorithmique – ce qui n'est qu'un cas très particulier de technique. Il existe en effet des techniques pour résoudre les équations du second et du troisième degrés, mais aussi pour faire des démonstrations par récurrence, pour ouvrir les portes, pour se procurer un renseignement par téléphone (ou sur l'Internet), pour lire le journal, pour écrire un article de recherche, pour revoir sa leçon, pour faire taire les élèves en début de séance, etc. Nous mettons ainsi en œuvre, quotidiennement, un grand nombre de techniques, avec un succès plus ou moins grand, car toute technique a une portée limitée en ce qu'elle nous permet d'agir dans certains cas et pas dans d'autres (telle équation ne se laisse pas factoriser, la poignée de cette porte marche à l'envers, aujourd'hui les élèves sont très bavards, etc.). La vie institutionnelle est donc faite d'un large éventail de tâches accomplies selon des « manières de faire » institutionnalisées, loi d'airain qui tend à identifier tout type de tâches à la technique normalement utilisée dans l'institution pour accomplir les tâches de ce type.

¹² Voir Chevallard (1996), Chevallard (1997), Chevallard, Bosch et Gascón (1997).

Le lien avec la notion de rapport peut maintenant être établi : le rapport institutionnel à un objet, pour une position institutionnelle donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position. C'est ainsi l'accomplissement des différentes tâches que la personne se voit conduite à réaliser tout au long de sa vie dans les différentes institutions dont elle est le sujet successivement ou simultanément qui conduira à faire émerger son *rapport personnel* à l'objet considéré.

Pourtant, de ces couples « amalgamés » de types de tâches et de techniques institutionnelles qui conforment les rapports institutionnels et personnels, il ne va plus rester, du point de vue de l'institution, qu'une description réductrice formulée en termes de « connaissances » et « savoir-faire ». Cette réduction, généralement suffisante pour décrire et gérer la vie institutionnelle, s'explique aussi par un *phénomène général de naturalisation* des couples tâches/techniques, phénomène qui nous fait vivre comme naturelles – ne supposant donc aucune technique particulière – les tâches qui s'accomplissent normalement dans une institution. La plupart des tâches institutionnelles sont, en effet, des tâches *routinières* : la technique utilisée pour les accomplir, bien qu'ayant été construite un jour, a été *routinisée*, au point de ne plus apparaître comme telle – utiliser cette technique pour accomplir une telle tâche va désormais de soi et ne pose plus aucun problème.

Ce nonobstant, dans toute routine institutionnelle apparaissent des types de tâches *problématiques*, pour l'accomplissement desquelles il n'existe pas de technique appropriée, soit parce que le type de tâches est nouveau (pour le sujet ou pour l'institution), soit parce que la technique habituellement employée échoue. Se pose alors le problème de la construction d'une technique adéquate par adaptation d'une technique ancienne ou par création d'une technique inédite – à moins que le problème soit simplement nié et que l'on prolonge indéfiniment le dysfonctionnement apparu, au point de le naturaliser.

Une évolution – et souvent même un *progrès* – apparaît lorsque, devant la situation où un type de tâches se révèle problématique, on décide, non de refouler la problématicité de la tâche – situation anthropologiquement la plus fréquente –, mais d'*étudier* le problème dans le but de construire la technique manquante. On part ainsi d'un type de tâches problématiques – par exemple « Comment résoudre une équation du second degré ? », « Comment mesurer le temps ? », « Comment compter le nombre de personnes dans une foule ? », « Comment introduire la notion de nombre décimal ? ». Le cas échéant, on arrive, après un processus d'étude plus ou moins long, à produire des techniques permettant de fournir des réponses aux questions initialement posées. Un nouveau « savoir-faire » est construit, que l'on doit encore organiser pour lui assurer un fonctionnement régulier dans l'institution.

Le troisième postulat anthropologique concerne alors l'*écologie des tâches et des techniques*, c'est-à-dire les conditions et contraintes qui en permettent la production et l'utilisation dans des institutions. On suppose que, pour pouvoir exister dans une institution, une technique doit apparaître comme un tant soit peu *compréhensible*, lisible et *justifiée*. Il s'agit là d'une contrainte institutionnelle minimale pour permettre le contrôle et garantir l'efficacité des tâches accomplies, qui sont généralement des tâches *coopératives*, supposant la collaboration de plusieurs acteurs. Cette contrainte écologique implique alors l'existence d'un discours descriptif et justificatif des tâches et techniques qu'on appelle la *technologie* de la technique. Le postulat annoncé suppose en outre que toute technologie a besoin à son tour d'une

justification, que l'on appelle la *théorie* de la technique, et qui en constitue le fondement ultime ¹³.

La distinction technique/technologie/théorie est fonctionnelle et doit toujours être référée au type de tâches que l'on prend comme point de référence. Ainsi, la détermination du signe du discriminant d'une équation du second degré peut être un élément d'une technique de résolution de ce type d'équations, mais il peut tout aussi bien s'agir d'un ingrédient technologique visant à expliquer et justifier un type de techniques plus élémentaires fondées sur l'écriture et la factorisation d'une différence de deux carrés. Inversement, ce qui, à un moment donné ou dans une institution donnée, apparaît comme la justification d'une certaine technique, peut aussi être considéré, ailleurs ou à un autre moment, comme une tâche en elle-même (la tâche consistant à justifier une technique), qui suppose la mise en œuvre d'une technique particulière et l'élaboration d'un environnement technologico-théorique adéquat.

Un complexe de techniques, de technologies et de théories organisées autour d'un type de tâches forme une *organisation praxéologique* (ou *praxéologie*) *ponctuelle*. L'amalgamation de plusieurs praxéologies ponctuelles créera une praxéologie *locale*, ou *régionale* ou *globale*, selon que l'élément amalgamant est, respectivement, la technologie, la théorie ou la position institutionnelle considérée. Si nous considérons, par exemple, l'enseignement des mathématiques au collège (en France), on pourra parler d'une organisation praxéologique *ponctuelle* autour de la résolution de tel type de problèmes de proportionnalité – organisation qui viendrait répondre à la question « Comment résoudre un problème de ce type ? » –, d'une organisation *locale* autour de la résolution de différents types de problèmes de proportionnalité (c'est-à-dire du *thème* de la proportionnalité), enfin d'une organisation *régionale* autour par exemple de la notion de fonction numérique (qui correspond à tout un *secteur* des mathématiques enseignées au secondaire).

La notion de *savoir* peut maintenant être reliée à ces nouveaux termes : un savoir renvoie à une *organisation praxéologique* particulière, douée d'une certaine « générativité » lui permettant de fonctionner comme appareil de production de connaissances, c'est-à-dire de nouvelles praxéologies. Cette vision des choses élargit le point de vue usuel qui tend à ne regarder comme un savoir que le couple technologie/théorie de l'organisation complète, lequel permet en effet, généralement, d'engendrer (ou de reconstruire) l'ensemble des techniques de la praxéologie, c'est-à-dire le « savoir-faire » correspondant. On se rappellera cependant que, génétiquement, ce sont fréquemment les *besoins de la pratique*, c'est-à-dire les *besoins de techniques*, qui sont à l'origine des praxéologies.

C'est donc en ces termes que l'approche anthropologique répond à la question de la modélisation des pratiques sociales, de leurs composants, de leur évolution et de leurs produits. Pour ce qui est des mathématiques, considérées comme activité humaine structurée en organisations praxéologiques, on pourra dire qu'elles naissent de la problématisation de certains *types de tâches*, dès lors regardées comme des *types de problèmes* dont l'étude donne lieu à la construction d'*organisations praxéologiques locales*. L'articulation de certaines de ces praxéologies autour d'une technologie commune permet de former des *organisations régionales* qui, à leur tour, s'articulent en des organisations plus larges jusqu'à constituer ce

¹³ On trouve des analyses détaillées de ces systèmes à quatre composantes (formés par un type de tâches, des techniques permettant de les accomplir, le discours technologique associé et son fondement théorique) dans les travaux les plus récents de l'approche anthropologique. Le lecteur qui rencontre ici ces notions pour la première fois les trouvera mieux développées dans Chevallard (1997) et dans Chevallard, Bosch et Gascón (1997).

qu'on appellera, globalement, « le savoir mathématique ». La *description* de ces organisations et l'étude de leur *écologie institutionnelle* ¹⁴ sont au cœur du programme d'étude de la didactique des mathématiques.

3. UN DOUBLE QUESTIONNEMENT ET UNE DICHOTOMIE FONDAMENTALE

Nous avons dit que, en un premier temps, l'approche anthropologique modélise le savoir mathématique en termes d'objets et d'interrelations entre objets. De cette vision volontairement unitaire de l'univers mathématique où « tout est objet », a surgi un premier questionnement sur la *nature* des objets et, en particulier, de ces objets mathématiques que l'on appelle normalement des « concepts » ou « notions ». De quoi donc est fait le *concept* de « primitive d'une fonction » ? De quoi se compose-t-il ? Comment peut-on en décrire les composants ? Ce questionnement, ainsi qu'un premier élément de réponse, s'était exprimé d'abord dans les termes suivants ¹⁵ :

Si nous partons à la recherche de l'objet « primitive d'une fonction », ce que nous allons trouver n'est jamais l'objet lui-même – « en soi et pour soi » – mais des activités humaines où seront mis en jeu d'autres objets. Nous trouverons par exemple des *déclarations* sur l'objet cherché, qu'on rangera sous la rubrique « définition » ou « théorème » [...], déclarations qui sont elles-mêmes des activités consistant à donner une définition ou à énoncer un théorème. Nous trouverons aussi des *écritures* de cet objet, tel le *nom* de l'objet ou d'autres objets graphiques corrélés, soit des activités où l'on écrira, lira, entendra ou prononcera ces « objets ». [...] Semblablement, on découvrira que l'objet « méthode du pivot de Gauss » n'existe qu'à travers la manipulation de certains objets dans le cadre de certaines pratiques où nous trouvons des acteurs qui manipulent certains graphismes, en faisant certains gestes et en prononçant certaines phrases – en un discours oral ou écrit. Mais on ne mettra jamais la main sur l'objet lui-même. Ainsi donc, quand on cherche ce que peut-être un tel objet, on découvre qu'il se compose d'autres objets, de nature toujours matérielle, en particulier sonore (discursive), gestuelle, scripturale (graphique), et de beaucoup de « vide » autour.

Rappelons que, au point de départ de la théorisation, un objet existe dès lors qu'existent des institutions et des personnes qui entretiennent des *rappports* à cet objet. La question de la « nature » de l'objet renvoie ainsi au *problème de la description des pratiques institutionnelles où l'objet est engagé*, problème auquel il faut répondre en termes d'*organisations praxéologiques*. On ne se demande plus alors ce qu'est la « primitive d'une fonction », mais ce que sont les types de tâches et les techniques qui composent les praxéologies institutionnelles où est censée intervenir la notion de primitive, et quels éléments technologiques et théoriques viennent décrire et justifier ces pratiques, en organisant un « discours » sur cet objet. Les concepts mathématiques peuvent ainsi être considérés comme des émergents de ces praxéologies, et les rapports institutionnels à ces objets comme façonnés par les complexes praxéologiques existant à un moment donné dans l'institution considérée.

On voit alors que la question de la nature des objets se présente sous un nouveau jour. Nous avons dit plus haut que la trichotomie technique/technologie/théorie était uniquement *fonctionnelle* et qu'elle n'affectait pas l'*essence* de ce qui pouvait être désigné par ces trois termes. Il en découle que la distinction entre types de tâches, techniques, technologies et théories, si elle crée bien une différenciation dans l'organisation du savoir mathématique, ne détermine pas pour autant la *nature* de ces composants. De quoi sont faits les ingrédients qui

¹⁴ L'*écologie* d'une organisation praxéologique s'attache aux conditions qui pèsent sur sa construction et sa « vie » normalisée aussi bien dans les institutions d'enseignement que dans celles de production, d'utilisation ou de transposition. Voir Artaud (1998).

¹⁵ Chevallard (1991b).

composent une technique, une technologie, une théorie ? Comment, en quels termes, pouvons-nous décrire la mise en œuvre d'une technique ? Selon quels critères et à quels indices pourrions-nous constater cette mise en œuvre dans une situation particulière ? Comment distinguer une technique d'une autre ? Y aurait-il des invariants qui seraient, en quelque sorte, transinstitutionnels ?

Ce premier questionnement – que nous avons présenté dans son aspect théorique mais dont il ne faut pas cacher le versant méthodologique – ne saurait prendre toute sa pertinence s'il ne venait pas coïncider avec une autre problématique qui, elle, surgit de la réalité même que la didactique se propose d'étudier, c'est-à-dire des conditions de déroulement de l'activité mathématique et des contraintes qui régissent son apprentissage et son enseignement.

Notre questionnement admet une présentation en des termes beaucoup plus naïfs. Il part du constat que la culture occidentale établit, parmi l'éventail des pratiques humaines, une opposition structurelle entre les activités considérées comme « manuelles » et les activités dites « intellectuelles ». Cette opposition n'est pas neutre. L'axiologie culturelle occidentale donne le primat aux activités « de l'esprit » (*mind* en anglais, *mente* en espagnol) sur le travail « de la main », c'est-à-dire le travail qui met en jeu le corps – à l'exception de ces « parties du corps » qui sont localisées « dans la tête »...

Il va sans dire que les mathématiques sont rangées spontanément dans le premier type d'activités : on y travaillerait surtout « avec la tête », à l'aide d'outils notionnels, de raisonnements, d'idées, d'intuitions, et de très peu d'éléments matériels. De fait, le peu d'instruments matériels utilisés (papier et crayon, tableau et craie, règle et compas, machine à calculer, ordinateur) sont généralement considérés comme de simples *supports*, des *aides* parfois indispensables, mais qui ne sauraient en aucun cas faire partie de l'activité elle-même. Les autres objets, sinon matériels, du moins *sensibles*, qu'active le mathématicien (écritures, formalismes, graphismes, mots, discours, etc.) peuvent parfois jouir d'une certaine spécificité : ils ne sont pourtant supposés intervenir dans son activité qu'en tant que *signes*, occupant la place d'autres objets qu'ils *représenteraient*.

On comprend alors que les mathématiques ne nous apparaissent pas spontanément comme une *activité* au sens propre, économique, du mot, c'est-à-dire comme un agir où interviennent des acteurs et des objets matériels – instruments qui prolongent le corps pour en augmenter la capacité (en force, en précision, etc.), ou éléments externes *contre* lesquels l'action se réalise. La conceptualisation courante de l'activité mathématique tend à refouler les outils *matériels* que celle-ci engage et, si elle prend en compte ces objets sensibles particuliers que sont les discours, écritures et graphismes, c'est pour se centrer, non sur ces objets eux-mêmes (et les façons de les manipuler), mais sur ce à quoi ils sont censés renvoyer, ce qu'ils « représentent » ou « signifient », bref : leur « sens ». Pour faire des mathématiques on a besoin de discours, de figures et de symboles, mais *ce qui est important serait au-delà des mots et des écritures*. Le point de vue dominant peut à ce titre être considéré comme idéaliste au sens où il semble ne tenir compte que d'un aspect seulement de l'activité mathématique concrètement observable : sa fonction signifiante, productrice de concepts.

Mettant à distance cette vision commune, il convient au contraire d'examiner la manière dont *l'activité mathématique est conditionnée par les instruments matériels, visuels, sonores et tactiles qu'elle met en jeu*. On sait que l'absence d'un concept peut bloquer l'évolution de la « pensée » mathématique, aussi bien au niveau historique d'une communauté qu'au niveau individuel du chercheur ou de l'élève. Or on peut se demander jusqu'à quel point cette

absence serait seulement l'absence d'une idéalité, d'une façon de « penser » ou de « concevoir » le monde, et non celle d'un complexe d'outils de travail, la plupart de nature matérielle, dont la disponibilité – ou, au contraire, l'absence – pourrait modifier de façon « catastrophique » le déroulement de l'activité. Nous croyons en effet que l'analyse didactique du développement du savoir mathématique – saisi dans la durée historique, dans l'histoire de vie d'une personne, ou dans la vie d'une classe – ne peut considérer comme secondaire cette dimension de l'activité, en lui assignant une pure fonction instrumentale dans la construction des concepts.

Le double questionnement que nous venons d'explicitier – le problème de la « nature » des objets mathématiques et celui de leur « fonction » dans l'activité mathématique – nous a conduit à établir une dichotomie fondamentale en distinguant deux types d'objets : les objets *ostensifs*, d'une part, les objets *non ostensifs*, d'autre part. Nous parlerons d'*objet ostensif* – du latin *ostendere*, « montrer, présenter avec insistance » – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est-il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes. Les objets *non ostensifs* sont alors tous ces « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être *évoqués* ou *invoqués* par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). Ainsi les objets « fonction » et « primitive d'une fonction » sont-ils des objets non ostensifs que nous avons appris à identifier et à activer par le moyen de certaines expressions, écritures et graphismes particuliers mis en jeu dans des pratiques et situations tout autant particulières.

La distinction ostensif/non-ostensif ne reprend nullement la dichotomie corps/esprit ou action/pensée chère à la culture occidentale : les objets non ostensifs ne doivent pas être entendus comme des entités « mentales », personnelles et individuelles, qui existeraient uniquement « dans nos têtes » ou dans notre esprit. Ostensifs et non-ostensifs sont toujours des objets *institutionnels* dont l'existence ne dépend que très rarement de l'activité d'une seule personne. Comme on le verra maintenant, les objets ostensifs et les objets non ostensifs sont unis par une dialectique qui considère les seconds comme des émergents de la manipulation des premiers et, en même temps, comme des moyens de guidage et de contrôle de cette manipulation.

4. LA DIALECTIQUE DE L'OSTENSIF ET DU NON-OSTENSIF

La terminologie adoptée appelle un certain nombre d'observations. Remarquons tout d'abord que, du point de vue sensoriel, l'idée d'ostension renvoie plus spécifiquement à la vue. Mais l'ostensivité dont nous parlons ici se réfère, plus généralement, à l'ensemble des sens, même si, de fait, la vue et l'ouïe jouent un rôle privilégié. Signalons en second lieu que, au-delà de leur perceptibilité, ce qui apparaît propre aux objets ostensifs est le fait d'être « manipulables » par le sujet humain : un son peut être émis (et reçu), un graphisme peut être tracé (et lu), un geste peut être fait (et perçu), un objet matériel quelconque peut être manipulé concrètement de diverses manières. Par une extension de son acception commune, nous

utiliserons le terme générique de *manipulation* pour désigner les divers usages possibles, par le sujet humain, des objets ostensifs.

C'est par le fait qu'ils peuvent être concrètement manipulés que les objets ostensifs se distinguent des *objets non ostensifs*. La notation *log* et le mot « logarithme » sont des objets ostensifs ¹⁶. En revanche, la *notion* de logarithme est un objet *non ostensif* qu'il n'est pas possible de manipuler au sens précédent. On peut seulement le « rendre présente » – le *re-présenter* – par la manipulation d'un certain nombre d'objets ostensifs associés, telle la notation *log* par exemple. Dans la plupart des cas, les objets institutionnels se verront associés à un objet ostensif privilégié, leur *nom*, qui en permettra une évocation minimale.

Soulignons ici le jeu métaphorique par lequel les acteurs sont fréquemment conduits à faire *comme si* les objets non ostensifs se montraient, et pouvaient être effectivement manipulés. On dira par exemple que, pour résoudre l'équation $2^x = 10$, « on utilise le logarithme », à la manière dont on utilise un marteau pour enfoncer un clou, c'est-à-dire comme si cet objet non ostensif qu'est la notion de logarithme était manipulable concrètement, alors qu'en réalité ce qui sera effectivement manipulé par le sujet humain, ce sont des mots et des notations. On sera par exemple amené à prononcer le mot de logarithme et à écrire : $2^x = 10 \Rightarrow$ (« on prend les logarithmes ») $x \log 2 = \log 10 \Rightarrow x = \frac{\log 10}{\log 2}$. À moins qu'au lieu de dire et d'écrire, on se limite à « penser » le mot et l'écriture précédente, ce que nous regarderons comme une autre forme de manipulation – intériorisée – d'objets ostensifs.

Toute activité humaine se laisse décrire en apparence comme une manipulation d'objets ostensifs. Mais l'analyse la plus sommaire révèle que l'opérateur humain ne peut la réaliser (et ne sait éventuellement en rendre compte) qu'en évoquant ou en invoquant, à l'aide d'objets ostensifs appropriés, des objets *non ostensifs* qui n'apparaissent pas forcément spécifiques de l'activité. Écrire $2 + 3 = 5$ peut être vu comme une simple manipulation d'objets ostensifs, mais ne saurait s'effectuer intentionnellement sans l'intervention de certains objets *non ostensifs spécifiques*, telle la notion d'addition (ou, s'il y a seulement copie d'un « patron » d'écriture, la notion de « reproduction » ou de « recopiage »). Plus généralement, nous poserons le principe que, *en toute activité humaine, il y a co-activation d'objets ostensifs et d'objets non ostensifs*.

Revenant aux notions fondamentales de l'approche anthropologique, nous dirons maintenant que la mise en œuvre d'une technique se traduit par une *manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs*. Les ostensifs constituent la partie perceptible de l'activité, c'est-à-dire ce qui, dans la réalisation de la tâche, se donne à voir, aussi bien à l'observateur qu'aux acteurs eux-mêmes. Dans l'analyse du travail mathématique, les éléments ostensifs font partie du réel empirique, accessible aux sens. Par contraste, la présence de tel ou tel non-ostensif dans une pratique déterminée ne peut être qu'induite ou supposée à partir des manipulations d'ostensifs institutionnellement associés.

¹⁶ Nous ne distinguerons qu'en cas de besoin les *types* d'objets ostensifs (un certain mot, une certaine écriture) de ses occurrences ou réalisations concrètes (ses *tokens*, au sens de Peirce : voir Ducrot et Todorov, 1972). La notation *log* est ainsi un objet ostensif qui existe, dans la « nature », matérialisé en un grand nombre d'occurrences que l'on peut observer dans des ouvrages mathématiques, des manuels scolaires, des cahiers d'élèves, sur des feuilles de brouillon, etc.

L'observation précédente ne doit pas suggérer que notre rapport aux ostensifs, si dépendant de la perception, serait purement empirique et, en quelque sorte, transinstitutionnel. Les objets ostensifs, bien que directement accessibles aux sens, ne sont pas pour autant de purs donnés. Parce qu'il n'y a pas d'ostensifs sans non-ostensifs, tant les objets ostensifs que notre rapport à eux (en particulier notre capacité à les identifier, avant même de les manipuler) sont le produit d'une construction institutionnelle – et, donc, le fruit d'un apprentissage.

La méprise qui consiste à supposer que la perception des ostensifs serait naturelle – c'est-à-dire non construite – explique dans une large mesure ce que la théorie des situations a mis en évidence sous le nom de *stratégies didactiques d'ostension*. On désigne par ce terme la pratique d'enseignement où le professeur se limite à *montrer* aux élèves un objet ostensif en croyant qu'il se créera spontanément un rapport adéquat à cet ostensif et, surtout, aux non-ostensifs auxquels il est censé renvoyer. Guy Brousseau le présente comme une conséquence particulière du *contrat d'apprentissage empiriste*, « jointe à l'idée que la lecture directe peut être aussi immédiate [...] : le professeur montre un objet et l'élève est supposé y voir les notions, les concepts, les propriétés, etc. »¹⁷.

Il convient alors de s'arrêter sur les relations qui unissent, dans l'activité humaine, objets ostensifs et objets non ostensifs. L'intervention des non-ostensifs dans la praxis manipulative d'objets ostensifs peut conduire à donner aux non-ostensifs activés le statut de *conditions* d'une manipulation adéquate des instruments ostensifs. Ainsi, l'existence pour moi, selon un rapport idoine, de l'objet non ostensif « addition de polynômes » peut apparaître comme une condition pour que j'écrive : $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x - 2) = x^3 + x^2 + 5x - 1$. De même, le fait que, contrairement à l'habitus engendré par l'enseignement secondaire, j'écrive $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x - 2) = -1 + 5x + x^2(1 + x)$ appellera l'hypothèse qu'existent pour moi certains objets *non ostensifs* qui conditionnent la tâche réalisée, en la motivant, en réglant le déroulement et en proposant un critère d'arrêt de la transformation opérée – il pourra s'agir, dans ce cas, de l'objet non ostensif « développement limité à l'ordre 1 » par exemple.

L'analyse du rôle des non-ostensifs comme conditions de la manipulation d'ostensifs apparaît cependant ambivalente. Elle peut conduire, soit à donner le primat aux non-ostensifs, comme si « l'intendance ostensive » devait nécessairement suivre, soit à donner le primat aux ostensifs, comme si le conditionnement par des objets non ostensifs pouvait être tenu pour inessentiel. Le premier cas correspond, en matière d'enseignement, à la mise en avant de la « compréhension » au détriment de l'activité elle-même ; le second cas, à la mise en avant des éléments ostensifs qui suffisent à « faire » – avec un affaiblissement corrélatif des aspects « conceptuels » supposés permettre de comprendre et de contrôler ce faire.

Soulignons, à l'opposé, que *la co-activation d'ostensifs et de non-ostensifs est toujours présente et apparaît à tous les niveaux d'activité*, aussi bien au plan de la technique que de son environnement technologico-théorique. La technique qui conduit à écrire $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x - 2) = -1 + 5x + x^2(1 + x)$ suppose une manipulation d'ostensifs écrits (parenthèses, lettres, chiffres, etc.), oraux (petits discours du type « x plus $4x$, $5x...$ ») et gestuels (par exemple pour grouper les termes de même degré et vérifier qu'on n'en a oublié aucun). Cette manipulation est guidée par des non-ostensifs, parmi lesquels la notion d'arrangement des termes par ordre décroissant des exposants, la notion de « termes (ou monômes) de même degré », celle de « factorisation par x^2 », ou encore la notion de « reste d'ordre 2 », etc.

¹⁷ Brousseau, 1996, p. 26. Voir aussi Fregona (1996) et Berthelot-Salin (1992).

Cette évocation de non-ostensifs nous rapprocherait, culturellement, des ingrédients supposés nécessaires, non pour agir, mais pour *justifier et expliquer* les actions, soit de la *technologie* de la technique. C'est en effet au niveau technologique que nous pouvons être tentés de situer les concepts et notions permettant de comprendre et de contrôler l'activité mathématique. Or tout discours technologique se réalise concrètement par la manipulation d'objets *ostensifs*, en particulier discursifs et écrits, qui permettent de matérialiser les explications et justifications nécessaires au développement de la tâche ; et il en est de même, bien sûr, du niveau théorique. Comme nous l'avons dit plus haut, la *co-activation d'ostensifs et de non-ostensifs* est un postulat général qui affecte *tous les niveaux de l'activité* ¹⁸.

La distinction ostensif/non-ostensif touche donc aux objets eux-mêmes, et non au rôle que jouent ces objets dans la pratique. Les uns et les autres servent autant à faire qu'à expliquer et justifier ce que l'on fait. L'ambivalence signalée plus haut reflète cependant une propriété objective des relations entre ostensifs et non-ostensifs. S'il est vrai en effet qu'objets ostensifs et objets non ostensifs vont de concert, c'est-à-dire qu'une manipulation ostensive suppose du non-ostensif et que, inversement, le non-ostensif ne peut vivre qu'à travers de l'ostensif, il n'en reste pas moins que cette nécessité se réalise d'une manière *arbitraire* qui, dans des institutions déterminées et en un temps déterminé de leur histoire, peut donner lieu à une grande variabilité de formes d'associations. Pour écrire l'égalité $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x) = 1 + 5x + x(x^2 + x)$, il est nécessaire que certains objets non ostensifs soient activés, mais il n'est pas nécessaire que l'objet « développement limité à l'ordre 1 » le soit, ni même existe pour l'institution où cette activité se déroule. Inversement, l'objet « développement limité à l'ordre 1 » pourra vivre pour une institution sans être jamais mis en interrelation avec une écriture de ce type (mais, par exemple, avec l'égalité $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$). Parler d'arbitraire signifie seulement qu'il n'existe pas d'association d'objets (ostensifs et non ostensifs) qui serait en quelque sorte nécessaire, naturelle et intrinsèquement déterminée ¹⁹.

Nous sommes partis du principe que toute activité suppose une co-activation d'ostensifs et de non-ostensifs. Réciproquement, du point de vue de la genèse des objets, on peut dire que les ostensifs et les non-ostensifs *émergent ensemble* dans la praxis humaine, qu'ils sont des *émergents* de cette praxis, sans qu'on puisse établir *a priori* d'antériorité des uns par rapport aux autres. Toutefois, si l'on se restreint à une institution ou à un ensemble d'institutions données, et dans une période historique donnée, les situations peuvent montrer tantôt une avance du système des instruments ostensifs par rapport à un certain système de non-ostensifs – un concept peut manquer par exemple –, tantôt l'inverse, quand manquent un ou plusieurs

¹⁸ Il suffit de considérer que la *production* d'un discours technologique (ou théorique) est elle-même une activité, supposant donc la mise en œuvre d'une technique et, d'après le postulat énoncé, une co-activation d'objets ostensifs et non ostensifs.

¹⁹ Nous employons ici l'adjectif « arbitraire » au sens de Saussure (1972) lorsqu'il fait référence au rapport entre signifiant et signifié. L'analyse d'Émile Benveniste à ce propos permet de bien éclairer ce lien entre les deux composantes du signe linguistique, que nous pouvons reprendre ici à propos de la dialectique des ostensifs et non-ostensifs. « Ce qui est arbitraire, signale Benveniste, c'est que tel signe et non tel autre, soit appliqué à tel élément de la réalité, et non à tel autre. » Mais il avait précisé plus haut : « Entre le signifiant et le signifié, le lien n'est pas arbitraire ; au contraire il est *nécessaire*. Le concept ("signifié") "bœuf" est forcément identique dans ma conscience à l'ensemble phonique ("signifiant") *böf*. Comment en serait-il autrement ? Ensemble les deux ont été imprimés dans mon esprit ; ensemble ils s'évoquent en toute circonstance. Il y a entre eux symbiose si étroite que le concept "bœuf" est comme l'âme de l'image acoustique *böf*. L'esprit ne contient pas de formes vides, de concepts innommés. » (Benveniste, 1966, pp. 51-52.)

objets ostensifs – par exemple une notation – qui donneraient aux objets non ostensifs un meilleur rendement dans le pilotage de l'activité.

Dans l'analyse de l'activité mathématique, la dialectique ostensif/non-ostensif est généralement conçue en termes de signes et de signification : les objets ostensifs sont des *signes* d'objets non-ostensifs qui en constituent le *sens* ou la *signification*. Les ostensifs utilisés en mathématiques sont en effet très semblables, matériellement, aux ostensifs mis en jeu dans l'activité linguistique. Et, si l'on croit que, lorsqu'on parle, ce ne sont pas les mots qui importent mais ce qu'ils nous permettent de communiquer, on est de même conduit à refouler le rôle des ostensifs dans la pratique mathématique, en faisant prévaloir la dimension non-ostensive de l'activité.

Lorsque, au contraire, on considère comme nous le faisons que les objets ostensifs sont des constituants des praxéologies mathématiques, les ingrédients premiers (et primaires) des techniques, des technologies et des théories, on peut les regarder en premier lieu comme des *instruments* de l'activité mathématique, des outils matériels sans lesquels l'action ne peut pas se réaliser. La fonction sémiotique des ostensifs, leur capacité à produire du sens, ne peut en effet être séparée de leur fonction instrumentale, de leur capacité à s'intégrer dans des manipulations techniques, technologiques, théoriques. Nous essayerons de préciser cette double fonction des ostensifs en présentant le type d'analyses que cette distinction nous permet de réaliser. Mais, avant cela, nous caractériserons les différents objets ostensifs par le *registre* (oral, écrit, graphique, gestuel, matériel) auquel ils appartiennent, distinction motivée par le fait que la fonction attribuée spontanément aux objets ostensifs dépend de la « matière » dont ils se composent.

5. LES REGISTRES OSTENSIFS ET LA CULTURE OCCIDENTALE

5.1. Une pluralité de registres ostensifs

Si l'on prend comme critère de spécification d'un ostensif la « substance » dans laquelle il se découpe, on ne peut que constater la présence d'une *pluralité de registres ostensifs* dans le déroulement de l'activité mathématique : registre de l'*oralité*, registre de la *trace* (qui inclut graphismes et écritures), registre de la *gestualité*, enfin registre de ce que nous nommerons, faute de mieux, la *matérialité quelconque*, où prendront place ces objets ostensifs qui ne relèvent d'aucun des registres précédemment énumérés. Dans la réalisation concrète de l'activité mathématique, les complexes d'objets ostensifs activés se distribuent entre ces divers registres, sans que l'on puisse voir fonctionner généralement un et un seul d'entre eux de manière autonome par rapport aux autres ²⁰.

Prenons quelques exemples. La technique de comptage la plus élémentaire met en jeu le registre du gestuel – et, plus exactement, la *deixis* gestuelle – afin de montrer les objets à compter, et le registre de l'oral pour réciter le nom des nombres au fur et à mesure qu'on pointe chaque objet. Lorsque, au-delà du comptage simple, le jeune élève apprend les premiers algorithmes de calcul, il devra être capable d'articuler trois registres différents :

²⁰ On peut rapprocher cette hypothèse de celle, plus forte, que formule Raymond Duval lorsqu'il affirme que les mathématiques « constituent le mode de connaissance dans lequel [la] mobilisation [d'une pluralité de registres de représentation sémiotiques] joue un rôle fondamental et apparaît de la façon la plus visible » (Duval, 1996, p. 356).

écriture des nombres avec leur disposition bidimensionnelle, petit discours « tout fait » qui lui rappelle le pas suivant à réaliser et le calcul à effectuer (« 3 fois 4, 12, je pose 2 et je retiens 1 »), enfin gestes qui rythment ses actions en l'aidant à gérer la disposition des chiffres et la latéralité de l'opération (le produit du quotient par le diviseur, à gauche, s'écrit sous le dividende, à droite) ²¹.

Partant de l'univers des objets matériels et de leur manipulation concrète, l'activité géométrique élémentaire naît de même en combinant le *discours oral* avec le *travail graphique*, pour ensuite intégrer peu à peu des éléments *écrits* – nom des points et des figures, écriture du discours, etc. Lorsqu'on en vient à ses formes plus évoluées, celles de la géométrie analytique ou du calcul vectoriel, le travail géométrique se fait alors surtout *dans le registre de l'écrit*, avec un accompagnement discursif oral permanent et un recours au registre du graphique important mais souvent secondaire. Dans certaines activités, comme le calcul du produit de deux matrices ou la transposition de termes d'une équation, le registre du gestuel devient particulièrement visible. Dans d'autres cas, comme l'arithmétique préalgébrique des « problèmes concrets », c'est le discours qui *fait* le travail mathématique, en laissant une place minimale à l'écrit par le biais du calcul numérique – lequel reste d'ailleurs invisible lorsqu'il est réalisé mentalement.

Soulignons ici que la prégnance d'un ou deux registres *dominants* dans l'activité mathématique porte à regarder ces registres comme consubstantiels au mathématique. Considérons ainsi, par exemple, le problème suivant extrait d'un *Précis d'arithmétique pour les classes de 6ème, 5ème, 4ème* du début du siècle ²² :

Dites le nombre qu'on diminue de 35 en le divisant par 6.

Remarquons que la formulation du problème (« Dites... ») témoigne clairement du caractère oral des tâches mathématiques de l'ancienne arithmétique. Dans ce cas, la technique de résolution proposée se matérialise en fait dans le *discours* suivant ²³ :

Le quotient du nombre inconnu par 6 est le sixième de ce nombre. Par suite ce quotient est le nombre diminué des $\frac{5}{6}$ de ce nombre. Les $\frac{5}{6}$ du nombre cherché valent 35, le nombre cherché est les $\frac{6}{5}$ de 35, c'est-à-dire 42.

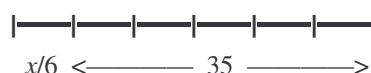
Il faut bien sûr imaginer que la solution est produite oralement, selon une technique discursive bien structurée, et que les calculs sont faits mentalement, avec un faible recours au registre de l'écrit (mobilisé cependant, lors du calcul mental, par la visualisation de l'écriture chiffrée des nombres).

Une autre technique de résolution pourrait consister en la production d'un petit modèle *graphique*, en forme de segment divisé en 6 parties égales :

²¹ Un enregistrement vidéo réalisé à l'IREM d'Aix-Marseille avec des professeurs du second degré à qui on demandait d'effectuer des multiplications et des divisions de nombres entiers de plus de 2 chiffres a bien mis en évidence l'activation de ces trois registres. Les difficultés que rencontraient ces mêmes professeurs lorsqu'on leur proposait d'effectuer une division « à l'anglaise » (où le diviseur et le quotient s'écrivent à gauche, le second *au-dessus* du premier) nous ont permis de constater le caractère indissociable des trois registres activés : la perturbation du gestuel (par le changement de latéralité) affectait en effet le déroulement de l'activité dans son ensemble.

²² Chenevier (1926).

²³ *Ibid.*



Une fois le schéma construit, il ne reste plus qu'à produire un discours comme le suivant : « Nous avons un segment divisé en 6 parties égales. Si les 5 parties de droite mesurent 35, alors chaque partie mesure $35 : 5 = 7$ et le nombre cherché est $7 \times 6 = 42$ ». Registre graphique et registre oral s'articulent ici clairement par le biais d'une *deixis* gestuelle qui gère la correspondance entre les deux registres. On peut d'ailleurs imaginer que la solution effectivement produite aurait pu consister en un discours plus simple, moins détaché du geste de la main : « Ça c'est 35, ça c'est x sur 6, donc ça c'est 7 et le tout 42 ».

On peut finalement confronter ces deux activités avec la mise en œuvre d'une technique algébrique élémentaire qui consisterait essentiellement en des manipulations écrites comme les suivantes : « Soit x le nombre cherché. On a : $x - 35 = \frac{x}{6}$; $x - \frac{x}{6} = 35$; $\frac{5x}{6} = 35$; $x = \frac{35 \times 6}{5} = 42$ ». Remarquons ici que l'écrit, bien que dominant, n'est pas le seul registre activé : il y a aussi, d'une part, la réalisation d'un discours intérieur, parfois silencieux mais indispensable au déroulement de la tâche (« Soit x le nombre cherché, on a x moins 35 égale x sur 6 », etc.), et, d'autre part, l'effectuation de ces gestes particuliers qui consistent à « faire passer un terme d'un membre à l'autre de l'égalité », puis, devant l'égalité $\frac{5x}{6} = 35$, à « faire des produits en croix ».

Nous avons ainsi produit trois solutions différentes d'un même problème arithmétique, fondées sur des techniques distinctes qui activent chacune à des degrés différents les registres de l'oral, de l'écrit, du graphique et du gestuel. Dans la première technique, autrefois classique en arithmétique élémentaire, c'est l'oral qui prédomine ; dans la deuxième technique, l'oral s'appuie sur des productions graphiques et déictiques ; dans les deux cas, le registre de l'écrit apparaît au second plan, dans un cas par le recours – minimal – qu'exige le calcul mental, dans l'autre pour indiquer des éléments particuliers de la figure ou pour reproduire sur le papier un discours qui a existé d'abord oralement. Il devient en revanche premier dans la mise en œuvre de la technique algébrique où, cette fois, les rôles sont inversés – on écrit d'abord, on lit ou on oralise les écritures ensuite.

Si la coprésence de différents registres ostensifs est un invariant de la pratique mathématique, nous avons dit que la fonction qu'on leur attribue – la plupart du temps de façon non-réfléchie, induite par la culture – est, quant à elle, fort diverse. Pourquoi, dans le cas examiné, est-ce la dernière technique qui nous apparaît plus stéréotypée, et pouvant être mise en œuvre de façon « mécanique », « sans comprendre ce que l'on fait » ? Au lieu d'y voir des activités de modélisation ayant recours, la première à un modèle discursif à travailler discursivement, la deuxième à un modèle graphique et la troisième à un modèle écrit, pourquoi sommes-nous tentés de parler, dans les deux premiers cas de « raisonnement », et dans l'autre de « calcul » ? Pourquoi avons-nous plutôt tendance à nous demander si l'élève comprend « ce que représentent » les écritures algébriques qu'il manipule, et ne nous demandons-nous que plus difficilement s'il sait ce que « représente » tel graphique ou tel discours dont il fait usage ?

La fonction assignée spontanément aux différents objets ostensifs est fortement conditionnée par le registre auquel ils appartiennent. Cela se traduit par des contraintes écologiques très

différentes sur les organisations praxéologiques considérées et, en conséquence, sur les composants même de ces praxéologies. Ainsi, lorsque le discours et la manipulation graphique sont rapprochés du « raisonnement », les techniques discursives et graphiques ne sont pas considérées comme telles et apparaissent évidentes, auto-justifiées ; par contre, les techniques écrites deviennent très vite opaques et appellent des justifications technologiques ou théoriques spécifiques. La notion générique d'objet ostensif a pour nous le mérite de permettre de porter un regard unitaire sur ces différents types d'objets afin de pouvoir reconstruire leur rôle précis dans le déroulement concret de l'activité, en mettant à distance toute imposition culturelle. Le point sensible, ici, est évidemment celui des interrelations entre oral et écrit, et du rapport culturel à ces interrelations.

5.2. Logocentrisme occidental et péjoration de l'écrit

Nous avons vu que l'activité mathématique articule étroitement différents registres ostensifs. Cette « pluralité ostensive » se retrouve aussi dans les unités ostensives qui sont les ingrédients de base de l'activité : les besoins de la pratique font que les ostensifs oraux doivent pouvoir s'écrire ; que les ostensifs écrits doivent pouvoir s'oraliser et, en outre, être nommés (λ se lit ainsi « lambda », et on a eu besoin récemment de nommer l'écriture @ dans un grand nombre de langues du monde, etc.). Les mathématiques, et les sciences en général, donnent un exemple caractéristique du *phénomène d'extension de l'oralisation des graphismes*, extension qui conduit à regarder les signes graphiques comme des écritures semblables à celles élaborées pour la notation écrite de la langue (orale). Ainsi par exemple la

suite de graphèmes $\int_0^1 f(x)dx$ sera oralisée d'une manière qui sonnerait familière si nous pouvions la présenter de vive voix, mais qui paraîtra étrange dans sa mise par écrit phonétique : « somme de zéro à un de èfe de ics dé ics ». On voit ainsi qu'une même oralisation peut être mise par écrit selon deux systèmes de graphismes distincts et radicalement différents du point de vue de leurs usages possibles dans le travail mathématique. Cette observation apparemment banale est pour nous fondamentale. Elle souligne l'existence d'une *multiplicité d'interrelations entre objets ostensifs écrits et oraux*, interrelations qui ne peuvent pas être ramenées à une simple correspondance biunivoque du type lecture/écriture.

Ces remarques peuvent apparaître évidentes à la lumière de l'histoire des moyens du travail mathématique. Mais il importe d'y insister dans la mesure où la vision culturelle commune étend au couple lecture/écriture le réglage strict qu'elle croit reconnaître, à tort, dans le cas des langues naturelles. On mentionnera ici, en appui à cette affirmation, l'ensemble des travaux montrant les profondes transformations engendrées par le passage de l'*oralité primaire* – état de culture aujourd'hui rarissime dans lequel l'écrit, sinon le graphisme, est absent – à l'*oralité secondaire* dans laquelle nous baignons, et qui interdit à tout jamais d'autonomiser la parole par rapport à l'écriture de la parole ²⁴.

Ajoutons à cela que la possibilité d'oraliser les graphismes considérés semble être le trait distinctif qui permet de continuer à parler d'*écriture*, bien au-delà de la mise par écrit des langues naturelles, c'est-à-dire de regarder comme écriture (et non comme simple graphisme) la mise en jeu d'un système de graphèmes déterminé – la « représentation graphique » d'une

²⁴ Sur ces travaux, voir les synthèses de Ong (1982) et Havelock (1996). L'utilisation croissante de sigles oralisés est un clair exemple de la pénétration de l'écrit dans le discours oral.

fonction, par exemple, n'étant pour cette raison pas regardée, en mathématiques, comme une écriture, au contraire d'une expression algébrique. Cette situation peut entraîner une vision naturalisée des *codes* qui gouvernent le travail graphique : s'il n'y a pas de doute que le travail d'écriture est un travail hautement réglé, il peut par contraste sembler que les systèmes d'ostensifs graphiques se manipulent – s'écrivent et, surtout, *se lisent* – de façon naturelle, évidente. Cela explique que nombre de techniques qui s'appuient sur des ostensifs *graphiques* s'introduisent « par ostension » et fonctionnent d'abord – et parfois longuement – d'une manière implicite, allant de soi et n'appelant pas de justification particulière – à moins qu'au contraire elles ne soient constamment « doublées » par un travail ostensif *écrit* ²⁵.

Les ostensifs écrits du mathématicien – les divers symbolismes mathématiques notamment – sont par essence de l'écrit. Contrairement aux graphies des mots de la langue, ils ne sont pas *de l'oral mis par écrit*. Ce sont des instruments de travail du mathématicien que la voix, la *phoné*, ne peut reprendre que maladroitement, par une oralisation toujours trop lourde et souvent ambiguë. À propos de la manipulation du signe d'égalité – spécificité instrumentale du travail algébrique –, l'anthropologue anglais Jack Goody décrit ainsi la situation ²⁶ :

C'est l'existence d'un système de notation très éloigné de la parole qui rend possible la pensée et les opérations mathématiques. [...] La formule a une capacité particulière qui nous permet de mener à bien les raisonnements mathématiques : elle conserve l'équilibre ou l'égalité entre les deux côtés sur lesquels on effectue les mêmes opérations (soustraction de $2x$ ou division par $n-1$, par exemple). Il n'y a aucun moyen de le faire sans visualiser l'opération. La parole seule en est incapable, l'écriture le peut. Sa dimension spatiale et visuelle permet le développement de ce genre de manipulation.

La contradiction entre la réalité de l'activité mathématique instrumentée par les ostensifs algébriques et l'idéologie linguistique courante naît du fait que, dans cette perspective idéologique, l'écriture est regardée comme un artifice qui ne saurait exister par lui-même. L'écriture n'existerait que parce qu'existe la langue (parlée), dont elle n'est que la servante souvent infidèle et quelque peu méprisée. Comme le note Goody, le courant dominant de la linguistique moderne reprend à son compte ce rôle (prétendument) second de l'écriture face à la langue ²⁷ :

Pour Saussure, l'écriture n'est que représentation du langage ; la même opinion est reprise par Sapir, par Hockett et encore plus vigoureusement par L. Bloomfield qui affirme que « l'écriture n'est pas le langage, mais un simple moyen de l'enregistrer à l'aide de signes visibles ».

Certains débats, parfois fort vifs, entre spécialistes de l'écriture et linguistes témoignent de cette expulsion de la chose écrite de l'univers de la linguistique. Ainsi, J. G. Février, auteur d'une *Histoire de l'écriture* (1948-1959) qui fait référence sur le sujet, écrit-elle :²⁸

[...] nous constatons par les mathématiques que le langage – je me venge des linguistes – est absolument incapable de rendre compte de certaines formes de la pensée moderne. Et à ce moment-là, l'écriture, qui a été tellement méconnue, prend la place du langage, après en avoir été la servante.

²⁵ Voir, sur ce point, l'étude d'Eduardo Lacasta sur l'usage et la fonction attribuée aux graphiques dans l'étude des fonctions dans l'enseignement secondaire (1995). On trouve aussi des exemples de ce traitement « naturaliste et naturalisé » du registre du graphique dans le travail de Lorena Espinoza (1998) qui présente des analyses de classes traditionnelles sur l'enseignement de limites de fonctions.

²⁶ Goody, 1977, p. 213.

²⁷ *Op. cit.*, p. 144.

²⁸ Cité in Derrida, 1967, p. 123.

Jacques Derrida, dans son ouvrage *De la grammatologie* (1967), ainsi qu'en divers autres textes, a mis en avant la tradition non interrompue de péjoration de l'écriture par ce qu'il a appelé le *logocentrisme* propre à la métaphysique occidentale. Le terme de *logocentrisme*, lié à celui de *phonologisme*, indiquerait la croyance selon laquelle la raison – le *logos* – nous serait accessible directement par la voix – la *phoné* ²⁹ :

Ce privilège du signifiant phonique sur le signifiant graphique ne peut se *légitimer* qu'à partir de la distinction entre ce qui serait un *dedans* (où la pensée réside) et ce qui serait un *dehors* (où l'écriture tombe). La parole est l'expression la plus « proche » de la « conscience » – quand, même, la voix n'est pas conçue comme un quasi-effacement du signifiant.

Une telle métaphysique est, bien entendu, contradictoire avec le formidable accroissement de la présence de l'écriture dans les sociétés occidentales à partir de son apparition dans la Grèce d'après Homère ³⁰, et elle ne peut que buter contre le surgissement des formalismes mathématiques, ostensifs premièrement écrits et secondairement oralisés. Derrida rappelle à cet égard que « la pratique de la science n'a en fait jamais cessé de contester l'impérialisme du *Logos*, par exemple en faisant appel, depuis toujours et de plus en plus, à l'écriture non phonétique » ³¹. Et il indique aussi, plus concrètement ³² : « Tout ce qui a toujours lié le *logos* à la *phoné* s'est trouvé limité par la mathématique, dont le progrès est absolument solidaire de la pratique d'une inscription non phonétique. »

Tel est le cadre général qui voit l'élargissement fantastique de l'arsenal ostensif du travail mathématique et, tout spécialement, la création de ces ostensifs spécifiques aux sciences que sont les symbolismes et formalismes modernes. Il n'en reste pas moins pourtant que, culturellement, nous restons immergés dans cette culture logocentrique qui s'empresse de chercher la raison des choses *au-delà* de l'écriture, et donc *au-delà* des instruments du travail mathématique même. Ainsi l'expression verbale « le produit de deux nombres consécutifs » nous semblera-t-elle davantage douée de sens, plus compréhensible et proche de la raison, que la simple écriture algébrique $n(n+1)$. De même, devant une série de transformations écrites telle $\{2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 4/2 = 2\}$, on s'empressera de chercher, à l'opposé de cette « élaboration syntaxique », une « élaboration sémantique » qui témoignerait d'une activité réfléchie et qui, loin de l'écrit, pourrait se concrétiser dans le discours suivant ³³ : « Je dois trouver un nombre dont le double plus une unité donne cinq. Donc ce nombre sera plus petit que 5. J'essaie la suite 1, 2, 3, 4, et je vois que 2 est la solution. » Ainsi, devant le risque, souvent dénoncé, que l'activité mathématique des élèves ne se réduise à une simple manipulation d'écritures, on verra facilement apparaître des recommandations comme la suivante ³⁴ :

Il est nécessaire de maintenir les expressions intermédiaires et, même lorsqu'on manipule les symboles, il faut encourager les élèves à traduire par des mots les expressions symboliques pour enrichir l'expression et renforcer le sens des symboles.

²⁹ Ducrot et Todorov, 1972, p. 453.

³⁰ Sur ce point, voir Havelock, 1963 et 1996.

³¹ Derrida, 1967, p. 12.

³² Derrida, 1972, p. 47.

³³ L'exemple et la caractérisation des deux solutions en « élaboration syntaxique » et « élaboration sémantique » sont extraits de Sanz, 1990, p. 198.

³⁴ Grupo Azarquiel, 1993, p. 41. (C'est nous qui traduisons.)

Non seulement le calcul est généralement réduit à une pure syntaxe, mais encore on doit supposer que, tout à l’opposé, le discours, lui, naîtrait « doué de sens » – ce sens qui, justement, ferait défaut à l’écrit.

5.3. Moyens et instruments : la réduction de l’épaisseur ostensive

Nous avons mis en avant l’*épaisseur ostensive* du travail mathématique – lequel évolue toujours entre différents registres articulés de manière complexe. Et nous avons aussi montré, dans le cas particulier du discours oral et de l’écriture, que la fonction culturellement assignée aux différents objets ostensifs est fortement influencée par le registre auquel ils appartiennent. Il existe en effet une axiologie culturelle qui nous conduit à refouler gestes et objets matériels hors du champ des mathématiques, ainsi qu’à réduire la manipulation d’écritures à une activité mécanique régie uniquement par des règles syntaxiques strictes. C’est alors dans la production de figures et, surtout, dans le discours oral, que le regard logocentrique ira chercher la preuve que l’activité écrite est bien une activité « signifiante », « douée de sens ».

L’évolution de l’activité mathématique, aussi bien au plan individuel qu’institutionnel et historique, va pourtant à l’encontre de cette vision des choses et du système de valeurs qu’elle promeut. Si les premières activités de comptage doivent recourir largement à une ample variété d’objets matériels, graphiques et gestuels³⁵, si les premiers raisonnements déductifs de la géométrie euclidienne se réalisent sur des objets graphiques tracés sur le sable et par le moyen de discours et de manipulations matérielles à l’aide d’instruments de tracés divers (effectivement réalisées ou évoquées par le langage), on ne peut ignorer que, au moins depuis Viète, les mathématiques progressent par le biais du symbolisme écrit, de telle sorte que l’on peut presque suivre toute l’histoire de ce progrès en restant dans le registre de l’écriture³⁶. Les tendances formalistes nées de la crise des fondements de la fin du XIX^e siècle ont porté cette évolution à son extrême, comme si l’écriture symbolique pouvait remplacer tous les autres registres, ne serait-ce que pour la formulation et la démonstration des vérités mathématiques.

Toute mathématisation, plus généralement, porte en elle une *réduction ostensive* des instruments du travail mathématique, qui « projette » les différents registres initialement activés sur ceux d’entre eux qui peuvent se mettre par écrit. Considérons ainsi les gestes qu’appellent les calculs à effectuer lors d’un produit de deux matrices, de la résolution d’une équation ou du développement d’une expression algébrique. Ces gestes sont souvent visibles sous forme de graphismes, sans doute provisoires et un peu illégitimes, qui indiquent sur le papier les associations de termes ou les « transpositions » à effectuer³⁷ :

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 5x-3 = 3x + 10 \\ 5x - 3x = 10 + 9 \\ 2x = 18 \\ x = \frac{18}{2} = 9 \end{array} & \begin{array}{l} (4a+1)(3b^2-c) \\ 4a3b^2 - 4a2c + 3b^2 - 2c \\ 12ab^2 - 8ac - 3b^2 - 2c \end{array} \end{array}$$

³⁵ Sur ce point, voir Menninger (1964).

³⁶ L’histoire des notations mathématiques de Florian Cajori (1928-29) illustre bien ce parcours.

³⁷ Remarquons ici que le premier geste (la transposition de termes) est souvent dénoncé comme empêchant la réalisation d’une activité mathématique réfléchie et signifiante, alors que l’on se soucie beaucoup moins de la capacité des sujets à fournir une interprétation ou justification du mécanisme par lequel ils multiplient deux matrices ou développent une expression algébrique.

Contrairement au discours oral, l'écriture fige les objets sur le papier et permet dès lors de les « manipuler », à la manière dont l'abaciste médiéval manipulait les *calculi* sur la table à compter. Ces simples exemples devraient suffire à illustrer les formes possibles de « projection » du registre du gestuel sur la feuille de papier, processus qui est souvent complété par l'apparition de nouveaux ostensifs oraux pour désigner ces gestes (« on fait passer le terme $3x$ de l'autre côté », « on multiplie les lignes par les colonnes », etc.) ou pour indiquer les objets sur lesquels on effectue ces gestes (« le terme de droite », « les extrêmes », « les lignes », « le facteur commun », etc.). Si nous poursuivions cette évolution, nous verrions ces ostensifs provisoires s'intégrer dans le formalisme algébrique lui-même pour donner lieu à de nouveaux objets mathématiques qui, eux, pourront être entièrement inscrits sur la feuille de papier. Ainsi, la définition usuelle du produit de deux matrices finira par éliminer toute trace d'activité gestuelle grâce à l'utilisation de formalismes écrits comme les

suivants : $(a_{ij})_{m \times n} \times (b_{ij})_{n \times k} = (c_{ij})_{m \times k}$ avec $c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rj}$. La « lecture » de cette écriture ne

consiste plus simplement en une oralisation : il faut pouvoir recomposer, à partir de ces écritures, la pluralité d'ostensifs dont se constitue la technique de multiplication. On remarquera ici seulement que cette évolution suppose la création de nouveaux ostensifs écrits qui, tels le signe Σ ou les sous-indices, ne sont apparus que très tardivement dans l'outillage mathématique et continuent encore à faire l'objet de petites réélaborations afin d'en accroître la facilité de manipulation ³⁸.

On peut montrer, plus généralement, que la « microgenèse » individuelle d'une technique pour résoudre un type de problèmes donné suppose, dans un premier temps, une prolifération ostensive importante : la technique se construit sur une base d'objets empruntés à des univers divers de l'activité humaine et en recourant à de nombreux *points d'appui ostensifs* – discursifs, gestuels, graphiques, écrits. Mais l'évolution de l'activité – qui aboutira, le cas échéant, à une technique stabilisée – conduit ensuite à une réduction ostensive de plus en plus évidente, la mise en œuvre de la technique tendant à mettre au rebut tout l'échafaudage ostensif qui en avait permis la construction. Il en va de même lorsque le processus de création observé affecte toute une praxéologie mathématique, par exemple celle qu'essaie de recréer un professeur dans sa classe ou un auteur de manuel, avec la collaboration supposée des élèves ou des lecteurs ³⁹.

Le développement de l'activité mathématique – que ce soit dans l'utilisation normalisée de praxéologies disponibles ou dans la création de nouvelles organisations d'objets – voit disparaître ainsi très vite la pluralité ostensive qui caractérisait son état initial, par un phénomène général de *réduction chirographique* (du grec *kheir*, « main ») des registres ostensifs activés, processus par lequel les objets gestuels et matériels se « transfèrent » aux registres de l'oralité et du graphisme, c'est-à-dire aux registres que la main peut transcrire dans l'espace de la feuille de papier.

Il convient maintenant de distinguer, dans l'analyse des objets ostensifs mobilisés dans une activité mathématique concrète, ceux qui, comme les notations, les symbolismes et certaines expressions verbales acquièrent un statut mathématique clair et jouent le rôle d'*instruments* de l'activité, de ceux qui, bien que fonctionnant comme des *moyens* indispensables au travail

³⁸ Freudenthal (1968) et Knuth (1992).

³⁹ Voir Bosch (1994) et Espinoza (1998).

mathématique, sont considérés comme un accompagnement presque contingent de l'activité. Les développements antérieurs peuvent se traduire en disant que la mathématisation conduit à reléguer les objets matériels, les gestes et certains graphismes au simple statut de *moyens* du travail mathématique, en accordant le statut d'*instrument* aux seuls ostensifs appartenant au registre de l'écrit et, de façon beaucoup moins nette, aux registres du graphique et de l'oral. Dans la terminologie de la théorie des situations, nous dirons que les instruments ostensifs sont considérés et traités comme des éléments du savoir mathématique alors que les moyens restent au niveau de simples connaissances.

Le statut variable attribué aux objets ostensifs en fonction de leur appartenance à tel ou tel registre conduit à une situation paradoxale. D'une part, le registre de l'écriture, celui qui intègre à la fois le discours écrit et le formalisme mathématique, apparaît, non seulement comme le plus constamment sollicité, mais encore comme celui où vont venir s'intégrer les différents moyens ostensifs appartenant aux autres registres dès lors qu'ils feront l'objet d'une mathématisation leur attribuant le statut de véritable *instruments* de l'activité. La mathématisation – qui induit toujours, en dernier ressort, une formalisation – réduit les mots en écritures, les gestes en indices, les figures en équations, les manipulations graphiques en manipulations algébriques, etc.⁴⁰ Dans ce processus, le discours verbal et les graphismes, bien que faisant partie des registres chirographiques, restent à un degré intermédiaire de mathématisation, comme s'ils relevaient presque entièrement de la composante privée du rapport mathématicien au mathématique⁴¹.

En même temps – la chose peut sembler paradoxale – ces registres non ou peu mathématisés sont fréquemment regardés comme emblématiques du travail mathématique « authentique ». En effet, plus le processus d'algébrisation avance et plus le travail mathématique devient « pur calcul et pure syntaxe »; le discours, de plus en plus éloigné de l'écriture, finit par apparaître comme la seule preuve de raisonnement, aidé par les modèles graphiques (ou à composante graphique). Il semble alors que, lorsque les ostensifs discursifs et graphiques perdent leur statut d'instruments au profit des ostensifs écrits, ils tendent à apparaître, pour la culture courante (mathématique et non mathématique) comme les moyens les plus significatifs du travail mathématique, en ce qu'ils permettent de restituer le « sens » perdu lors de la réduction ostensive.

Ce paradoxe a sans doute sa fonctionnalité écologique : la péjoration culturelle de l'écrit profite aux registres de l'oral et du graphique en contribuant à restituer à l'activité mathématique l'épaisseur ostensive minimale nécessaire pour sa gestion et sa réalisation. On peut alors postuler l'apparition de phénomènes didactiques semblables à ceux mis en évidence par certains travaux issus de la théorie des situations⁴² sur les difficultés à gérer, dans la classe, des connaissances (il s'agirait ici des *moyens ostensifs*) nécessaires au déroulement de l'activité et souvent valorisées culturellement par l'école, mais auxquelles on ne peut pas donner un statut mathématique clair. Cette contradiction entre, d'une part, le phénomène de

⁴⁰ Cette réduction n'est évidemment pas définitive. Au contraire, la puissance de la formalisation ne peut être séparée de la possibilité de « remonter » dans le processus de projection ostensive, que ce soit en fin de parcours ou lors de l'effectuation des opérations elles-mêmes.

⁴¹ Les travaux sur la « visualisation » en mathématiques étudient les difficultés qui surgissent lorsqu'on veut donner un statut mathématique approprié à ces moyens graphiques que – comme l'observe Miguel de Guzmán dans son livre *El rincón de la pizarra* (1996) – le mathématicien ou le professeur mobilisent « dans un coin du tableau », en effaçant très vite aussitôt après... Voir aussi Zimmermann et Cunningham (1991).

⁴² Voir Berthelot et Salin (1992), Fregona (1995), Lacasta (1995).

réduction ostensive, qui élimine de l'univers des objets mathématiques les moyens ostensifs non chirographiables, et, d'autre part, la valorisation culturelle de ces ostensifs, considérés comme indispensables pour une activité mathématique « significative », ne semble pouvoir se résoudre, dans les contrats didactiques habituels, que par une certaine démathématisation de l'activité ⁴³.

6. LA DIMENSION OSTENSIVE DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

6.1. L'instrumentalité des ostensifs

Les organisations praxéologiques se matérialisent en des systèmes d'objets ostensifs relevant généralement de plusieurs registres ostensifs. Le point essentiel sur lequel la théorisation proposée ici se démarque d'autres approches tient en ceci qu'un objet ostensif y est considéré d'abord comme un *instrument* possible de l'activité humaine, c'est-à-dire comme une entité qui permet, en association avec d'autres, de conformer des techniques permettant d'accomplir certaines tâches, de mener à bien un certain travail. De là que nous reconnaissons à l'objet ostensif ce que nous nommerons une *valence instrumentale*, ou *instrumentalité*, valence qui existe aussi bien dans les symboles écrits (en mathématiques, par exemple) que dans les mots que l'on prononce ou dans les gestes que l'on fait.

Notons tout de suite à cet égard le phénomène suivant. Sa nature ostensive donne à l'objet ostensif une instrumentalité potentielle, sa valence instrumentale. Mais c'est son engagement dans un ensemble de techniques institutionnellement déterminées, en vue d'accomplir des tâches déterminées, qui en fera un instrument concrètement défini, et cela sans que son instrumentalité cesse d'être ouverte à d'autres usages possibles. Ajoutons que, en tant qu'instrument, un objet ostensif donné a un rendement qui peut varier selon les activités dans lesquelles on l'engage. On pourra dire, par exemple, que dans l'usage algébrique ordinaire, la notation $\sqrt{\quad}$ d'une part, et la notation à l'aide de l'exposant fractionnaire $\frac{1}{2}$ d'autre part, ont un rendement voisin lorsqu'on les utilise pour effectuer le travail suivant : $\sqrt{2 \times 3} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$; $(2 \times 3)^{1/2} = 2^{1/2} \times 3^{1/2}$. En revanche, pour calculer la dérivée de la fonction $\sqrt{x}$ la seconde notation se révèle instrumentalement supérieure en ce qu'elle permet d'effectuer un travail qu'on ne peut formellement reproduire à l'aide de la première : $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Nous dirons que, par rapport à la technique de dérivation employée (et il en irait de même par rapport à la primitivation), la notation exponentielle a une *plus grande instrumentalité* que la notation $\sqrt{\quad}$: elle permet la mise en œuvre d'une technique qui ne peut se réaliser au moyen de la notation $\sqrt{\quad}$. L'instrumentalité d'un ostensif dépend ainsi du nombre de techniques dans lesquelles il peut intervenir et elle sera d'autant plus grande que ces techniques se montreront robustes et fiables dans l'accomplissement des tâches concernées.

⁴³ Nous étudions actuellement ce phénomène dans le cas des formalismes algébriques et des contraintes écologiques (mathématiques, culturelles et didactiques) qui pèsent sur le processus d'algébrisation d'organisations mathématiques. Voir Bolea, Bosch et Gascón (1997). Voir aussi Mercier (1996).

Bien entendu, une telle affirmation n'a pas de valeur intrinsèque. Elle ne peut être appréciée que dans le cadre d'une organisation mathématique institutionnelle qui inclut, outre l'objet ostensif considéré, tout un ensemble d'objets et d'interrelations mis en jeu dans certaines praxéologies déterminées. Par exemple, une des manières de donner à la notation $\sqrt{}$ une plus grande instrumentalité dans l'accomplissement de la tâche de dérivation antérieurement effectuée consiste à la mettre en interrelation avec un autre objet ostensif, la notation $y =$ pour désigner une fonction, ce qui permet alors le travail suivant : $y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow 2yy' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. La quasi-disparition de la notation $y =$ dans l'enseignement secondaire français contemporain a privé ainsi la notation $\sqrt{}$ d'une partie de son instrumentalité.

Il est facile, au demeurant, de citer d'autres systèmes d'ostensifs écrits utilisés en mathématiques et qui n'ont, dans l'enseignement secondaire, qu'une très faible instrumentalité. Tel est notamment le cas du signe de la différentielle dx , qui permet un grand nombre de techniques de calcul différentiel et intégral (dérivées de fonctions inverses, changement de variable, calcul d'aires ou de volumes de solides de révolution, résolution d'équation différentielles élémentaires, etc.). Michèle Artigue et Laurence Viennot⁴⁴ ont montré que cet ostensif écrit reste faiblement utilisé dans l'enseignement secondaire et très diversement exploité dans l'enseignement universitaire selon le type d'études considéré (mathématiques, physiques, etc.).

On ne verra guère par exemple un étudiant français en sciences se permettre de déterminer la pente de la tangente en (1,1) à l'ellipse d'équation $2x^2 + y^2 = 3$ par la « manœuvre » suivante : $2x^2 + y^2 = 3 \Rightarrow 4xdx + 2ydy = 0 \Rightarrow ydy = -2xdx \Rightarrow dy/dx = -2x/y = -2$.

Il en va de même avec les notations des unités de grandeurs physiques, utilisées uniquement en tant que signes sténographiques : l'usage dominant en France est de calculer avec des « nombres abstraits » et d'introduire en fin de calcul l'unité qui désigne la grandeur obtenue (« min », « km », etc., comme abréviation de minute, kilomètre, etc.). Or ces écritures peuvent donner lieu à des techniques de changement d'unité très efficaces lorsqu'on les inclut dans les calculs et qu'on les manipule comme des signes algébriques. C'est ainsi que, pour convertir une durée de 14/15 d'heure en minutes, une vitesse de 150 km/h en m/s ou une accélération de 4 m/s² en km/h², on peut procéder de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{14}{15} \text{ h} &= \frac{14}{15} \times 1 \text{ h} = \frac{14}{15} \times 60 \text{ min} = \frac{14 \times 60}{15} \text{ min} = 56 \text{ min} \\ 150 \text{ km/h} &= \frac{150 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{150 \times 1 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{150 \times 1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} = \frac{150 \text{ m}}{36 \text{ s}} \approx 4,2 \text{ m/s} \\ 7 \text{ m/s}^2 &= \frac{7 \text{ m}}{(1 \text{ s})^2} = \frac{7 \times 10^{-3} \text{ km}}{(\frac{1 \text{ h}}{3600})^2} = 7 \times 10^{-3} \times 3600^2 \text{ km/h}^2 = 90720 \text{ km/h}^2\end{aligned}$$

L'usage dominant, en l'espèce, qui s'interdit l'utilisation de ces ostensifs écrits, renvoie à l'inexistence de toute une organisation mathématique dans laquelle la technique de calcul « avec les unités » se trouverait *justifiée* dans un cadre technologico-théorique approprié. On sait, de même, que lorsque les techniques de différentiation et d'intégration basées sur l'emploi de la notation différentielle sont bannies de l'enseignement, le motif en est

⁴⁴ Voir Artigue (1988) et Artigue et Viennot (1986).

généralement l'absence d'une technologie acceptable par les « censeurs » – en général des mathématiciens.

6.2. La sémiotique des ostensifs

Les exemples précédents nous permettent de mettre en évidence un autre aspect – une autre *valence* – des objets ostensifs. L'ostensivité d'un objet lui permet en effet de fonctionner comme *signe*, ou plutôt comme *signifiant* d'autres objets : la notation $\sqrt{\quad}$, l'expression « racine carrée » et une certaine représentation graphique dans un repère cartésien peuvent renvoyer à cet objet non ostensif qu'est la racine carrée (ou la fonction racine carrée), l'écriture « 130 km/h » évoquer une grandeur ou une limitation de vitesse, etc. Plus généralement, les objets ostensifs, dès qu'ils sont pris dans des pratiques institutionnelles déterminées, ont le pouvoir d'évoquer des complexes d'objets ostensifs et non-ostensifs avec lesquels ils entrent en interrelation. Étant donné que les objets, au sens anthropologique, sont indissociables des *rappports* à ces objets, on peut dire que ce qu'évoquent (ou peuvent évoquer dans une situation donnée) les objets ostensifs est tout l'ensemble de praxéologies institutionnelles dans lesquelles ils participent comme instruments⁴⁵. Il s'agit donc d'une représentation au sens diplomatique du terme : l'ostensif (le représentant) est à la place d'un complexe d'objets (le représenté) qui l'inclut en tant qu'élément intégrant. Pour désigner ce fonctionnement de l'objet ostensif comme signe, nous parlerons de la *valence sémiotique* ou de la *sémiotique* des objets ostensifs.

C'est en ce point que la théorisation proposée touche aux questions traitées par les diverses théories sémiologiques. À cet égard, ce qui a été dit plus haut s'agissant de l'instrumentalité des objets ostensifs vaut encore pour la sémiotique. Les usages possibles d'un objet ostensif dans différentes pratiques font que sa sémiotique reste toujours ouverte, même si sa valeur sémiotique, réalisée concrètement par son engagement dans une *praxis* déterminée, ne peut être fixée à volonté. On pourra dire ainsi que l'écriture

$$7 \text{ m/s}^2 = \frac{7 \text{ m}}{(1 \text{ s})^2} = \frac{7 \times 10^{-3} \text{ km}}{\left(\frac{1 \text{ h}}{3600}\right)^2}$$

« n'a pas de sens » au motif que « on ne peut pas élever au carré des durées ou diviser des distances par des durées au carré ». En réalité, on signifie par là qu'il n'existe pas, dans l'institution où se réalise l'affirmation, de complexes d'objets auxquels une telle écriture puisse être reliée, c'est-à-dire d'organisations praxéologiques incluant des techniques de manipulation de cet ensemble d'ostensifs et, surtout, des discours technologiques et théoriques permettant de décrire et de justifier ces pratiques, en en délimitant le domaine de validité. Même si une telle construction constitue aujourd'hui encore un excellent exemple de *non-diffusion* de connaissances mathématiques, il est parfaitement possible de créer un cadre théorico-technologique où de telles écritures puissent apparaître aux yeux du mathématicien comme entièrement compréhensibles et justifiées – et donc « douées de sens »⁴⁶.

⁴⁵ On peut faire correspondre cet éventail de praxéologies à ce que Juan D. Godino et M^a Carmen Batanero ont appelé le « signifié » d'un objet mathématique. Voir Godino et Batanero (1994).

⁴⁶ Parmi quelques autres, le mathématicien américain Hassler Whitney s'est ainsi employé à proposer et à faire connaître une organisation mathématique « impeccable » justifiant le calcul sur les grandeurs (c'est-à-dire le calcul avec unités), y compris en matière de calcul différentiel et intégral : voir Whitney (1968).

La notation différentielle, on l'a noté, fournit un autre exemple d'écriture que l'on décrète facilement « dénuée de sens » dès qu'elle est manipulée comme un quotient, comme ci-après :

$$y = \arcsin x \Rightarrow \sin y = x \Rightarrow \cos y dy = dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow dy = y dx$$

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx + C \Rightarrow \ln |y| = x + C \Rightarrow y = ke^x$. Cet exemple permet de souligner que la valence sémiotique d'un ostensif (ou d'un assemblage d'ostensifs) fait référence, plus qu'à l'objet lui-même, aux techniques dans lesquelles celui-ci intervient : ainsi, faute d'une technologie mathématique appropriée, l'ostensif dy/dx peut certes renvoyer à la dérivée de la fonction $y = y(x)$, mais sans que le numérateur et le dénominateur de la fraction renvoient à quoi que ce soit d'instrumental en eux-mêmes, en sorte qu'on ne pourra alors utiliser cet ostensif qu'à la manière dont on utilise la notation $y'(x)$ – avec ce seul avantage que dy/dx permet de préciser la variable de dérivation, qui reste implicite dans $y'(x)$.

On constate ainsi que la valence sémiotique d'un ostensif fonctionne en étroite relation avec sa valence instrumentale : dans un cas on peut ainsi manipuler dy/dx comme un quotient, dans l'autre il apparaît comme un tout figé, inerte. La complexe dialectique de l'instrumental et du sémiotique conduit ainsi à différents cas de figure. L'ostensif peut notamment perdre son instrumentalité en perdant sa sémiotité, par exemple parce que les techniques de manipulation qui le rendaient opératoire ont cessé d'être intelligibles et justifiables. En sens inverse, l'ostensif peut acquérir une plus grande instrumentalité par le fait d'un travail technologique ou théorique qui permet de légitimer et de contrôler de nouveaux usages techniques. Pour le dire autrement, dans un cas l'emploi de l'ostensif se trouve « privé de sens » du fait de l'obsolescence des technologies associées aux techniques qui le mobilisaient jusque-là, tandis que, dans un autre cas, de nouvelles technologies pourront venir « (re)créer du sens » en justifiant cet emploi ⁴⁷.

Soulignons ce point, qui nous éloigne d'une certaine vision forgée dans la familiarité empirique avec ces seuls ostensifs particuliers que sont les signifiants langagiers. L'usage commun veut en effet qu'un mot « ait un sens ». Dans l'orientation que nous adoptons ici, cette formule doit être corrigée. Nous dirons en effet qu'un mot *produit* un sens. Plus précisément, et plus généralement, un objet ostensif ou un complexe d'objets ostensifs produisent, ou contribuent à maintenir par les usages réglés qui en sont faits, un système d'objets non ostensifs, en même temps que les objets non ostensifs en question permettent ces usages, selon la dialectique de l'ostensif et du non-ostensif indiquée plus haut. Ce jeu entre ostensifs et non-ostensifs, réglé par des techniques, ne se conçoit et ne se réalise que dans une praxéologie institutionnellement déterminée. C'est pourquoi nous avons proposé ⁴⁸ le terme de *praxème* pour désigner les unités ostensives minimales d'un système d'objets engagés dans une praxéologie déterminée. Le mot de *praxème* est emprunté ici à une théorisation linguistique due au linguiste Robert Lafont, et nommée par lui *praxématique* ⁴⁹. Bien que le terme ne s'applique guère, dans ce cadre originaire, qu'aux ostensifs des langues naturelles, il apparaît légitime d'en étendre l'usage à l'ensemble des registres ostensifs dont s'alimente l'activité humaine : son principal mérite est, en vérité, de rappeler que les mots ne « signifient » – c'est-à-dire ne « produisent du sens » – qu'à travers un *travail*, par l'exécution de « tâches linguistiques » dont les conditions d'accomplissement, c'est-à-dire de réussite,

⁴⁷ Tel est l'essai de l'article de Thurston (1994).

⁴⁸ Voir Chevallard (1991b) et Bosch (1994b).

⁴⁹ Voir Lafont (1972), (1978), (1984).

relèvent de contraintes syntaxiques, sémantiques et pragmatiques qu'il faut en chaque cas analyser dans leur spécificité.

Les objets ostensifs mis en jeu dans les pratiques humaines voient ainsi leurs valences instrumentales et sémiotiques stabilisées localement (dans l'histoire des institutions), parfois sur de longues durées et à travers une gamme très large d'institutions. Paradoxalement, c'est leur engagement dans des activités déterminées qui tantôt les stabilise, tantôt les fait évoluer selon qu'ils satisfont les besoins de l'activité institutionnelle ou, au contraire, sont sollicités en vue de satisfaire de nouveaux besoins. À la métaphore des mathématiques comme langage, nous proposons ainsi de substituer celle des *mathématiques comme travail*, activité parmi d'autres qui se réalise par le moyen d'instruments ostensifs spécifiques et sous des « contraintes de signification » déterminées.

6.3. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs

Il est sans doute plus simple d'illustrer les valences sémiotique et instrumentale des ostensifs, leurs fonctions inséparables de signe et d'instrument, sur des exemples d'ostensifs écrits. Or l'instrumentalité et la sémioticité sont des propriétés de tout objet ostensif, quel que soit le registre auquel il appartient. Il va de soi, par exemple, que le discours verbal possède une valence sémiotique qui permet la communication entre membres d'une même communauté linguistique, ainsi que la production de significations nouvelles. C'est cette valence que posent au premier plan les différentes approches sémiologiques qui, depuis Saussure, ont pris la langue comme modèle paradigmatique de tout système sémiotique. Dans ce cas pourtant, l'activité mathématique met bien en évidence que le discours parlé possède aussi une valence instrumentale. Il suffit pour cela de considérer le discours démonstratif pour comprendre que l'on peut parler sans se limiter à « dire » ni à « communiquer », mais bien *pour réaliser une action* : une fois la démonstration réalisée, une certaine connaissance mathématique.

Dans les domaines de la linguistique et de la philosophie du langage, c'est à partir des travaux de J.L. Austin (*How to do things with words*) et du surgissement de la pragmatique que l'on s'intéressera aux « actes de langage », en relativisant la fonction de représentation et de communication du langage courant. Mais la dissymétrie persiste dans le traitement didactique courant du discours : si l'on ne prend en compte que la valence sémiotique des ostensifs langagiers de l'activité mathématique, alors cet objet ostensif qu'est le discours ne peut guère être considéré comme un véritable instrument de l'activité mathématique. De là que la composante discursive de certaines techniques soit généralement scotomisée, ou, même, que la plupart de techniques discursives soient très largement naturalisées, comme si elles surgissaient de manière spontanée pour exprimer la pensée du sujet qui les réalise.

On retrouve alors la problématique des moyens du travail mathématique non considérés comme instruments et donc non gérés dans les contrats didactiques, mais dont la maîtrise est néanmoins nécessaire aux élèves, quoique elle soit laissée plus ou moins complètement à leur charge. La même situation de naturalisation des ostensifs, qui en occulte l'instrumentalité pour ne considérer que leur fonction communicative ou représentative, se retrouve dans le cas des ostensifs graphiques non écrits. D'un côté, le travail avec des modèles graphiques reste peu mathématisé, avec des faiblesses technologiques qui empêchent les techniques graphiques de se développer en les réduisant au statut de « méthodes alternatives », illustratives mais insuffisantes en elles-mêmes. D'un autre côté, l'idée de représentation qui gouverne le rapport courant au graphique pèse sur le rapport entre les ostensifs graphiques fonctionnant comme

modèle des non-ostensifs (par exemple géométriques) que l'on prend comme système à modéliser et à étudier ⁵⁰.

L'approche anthropologique décrit le savoir mathématique en termes de praxéologies composées de types de tâches et techniques (constituant la *praxis* ou *savoir-faire*) et de technologies et théories (constituant le *logos* ou « savoir » au sens restreint du mot). Ces organisations praxéologiques se donnent à voir à travers les ostensifs qui composent les tâches, techniques, technologies et théories et à travers les différents façons de les activer. Ce travail avec des ostensifs doit être, à la fois, efficace et lisible, intelligible, ce qui contribue à donner aux ostensifs leur valeur instrumentale et sémiotique. Mais nous ne connaissons pas les lois générales selon lesquelles une écriture, un mot, un geste ou un graphique devient (ou non) un instrument « plus efficace », ou produit « plus de sens », en fonction de l'organisation mathématique qui l'intègre et de l'institution qui fait vivre cette organisation. Le développement des mathématiques nous montre en permanence de nouvelles créations ostensives, de nouvelles façons de manipuler des ostensifs anciens, mais aussi la perte de certaines façons de parler, d'écrire ou d'effectuer certains gestes. Une telle « évolution ostensive » ne se réalise jamais de manière uniforme et universelle mais dépend étroitement des institutions et des conditions écologiques qu'elles sont capables de créer pour faire vivre des praxéologies déterminées.

Nous avons montré ailleurs ⁵¹, à propos de l'ancienne organisation mathématique construite autour des problèmes de proportionnalité, ou encore à propos de l'organisation actuelle du travail géométrique avec des vecteurs dans l'enseignement secondaire français, que les conditions de réalisation et de développement de certaines praxéologies mathématiques – leur écologie institutionnelle dans le cadre de certaines institutions didactiques actuelles ou passées – ne peuvent s'expliquer sans prendre en compte les conditions de réalisation et de développement du matériau ostensif qui les compose. Étant donné qu'une praxéologie mathématique n'est pas une entité statique, mais une réalité dynamique qui crée et qui soutient l'action, nous avons montré que le simple remplacement d'un ostensif par un autre, sans modification apparente de la praxéologie initiale qui l'intégrait, pouvait bouleverser complètement l'évolution de l'activité, aussi bien au niveau technique qu'au plan des technologies et des théories justificatives, voire des types de tâches mêmes.

Or, comme nous l'avons déjà indiqué pour le cas de la notation différentielle ou de la notation des unités, de petites modifications ostensives, qui en apparence se situent au niveau technique-manipulatif de l'activité, peuvent entraîner de lourds changements au niveau technologique, lorsqu'il faut décrire, organiser, justifier les productions ostensives et non-ostensives obtenues – nouvelles techniques, nouveaux concepts, nouvelles propriétés, nouveaux théorèmes ⁵². L'écologie d'une praxéologie mathématique, ensemble de conditions et de contraintes qui lui permettent de fonctionner et d'évoluer dans un environnement institutionnel donné, n'est pas indépendante du matériau ostensif dont sont constituées les techniques.

Nous avons vu qu'il existe des contraintes écologiques générales sur les praxéologies mathématiques au niveau des registres ostensifs dominants, contraintes qui seraient en un sens

⁵⁰ Sur le fonctionnement des objets graphiques en géométrie élémentaire voir, outre les travaux déjà cités de Berthelot-Salin et Fregona, le travail de Martine Picq (1998, thèse en cours).

⁵¹ Bosch (1994 a et b).

⁵² La présentation détaillée d'une telle « dynamique ostensive » fera l'objet d'un prochain article.

indépendantes de la praxéologie concrète considérée. En sens inverse, il existe aussi des contraintes écologiques à des niveaux « microscopiques » du travail mathématique qui, par le fait de produire des variations dans l'instrumentation ostensive des techniques, peuvent bouleverser les conditions d'existence et d'évolution d'une praxéologie. La description des différentes organisations mathématiques produite dans la recherche en didactique ou dans les institutions didactiques et dans leurs noosphères, ne peut négliger la dimension ostensive de ces praxéologies, comme si le savoir mathématique et les connaissances qu'il permet de produire étaient indépendants de ces entités dans lesquelles il se matérialise, comme s'il pouvait exister indépendamment des « molécules ostensives » qui le constituent.

7. UN MODÈLE DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

Plusieurs travaux de didactique des mathématiques proposent aujourd'hui des conceptualisations différentes de ce que nous avons appelé la *dimension ostensive de l'activité mathématique*⁵³. Bien que notre intention ne soit pas d'explicitier une analyse comparative de ces recherches, nous examinerons rapidement, parmi l'éventail d'approches qui peuvent être considérées comme faisant partie du « genre prochain », celles qui permettent le mieux de mettre en évidence la « différence spécifique » de la modélisation proposée ici – entreprise qui oblige à aller au-delà du niveau des objets ostensifs (qui constituent, en quelque sorte, le domaine de réalité commun), pour descendre jusqu'aux fondements des différentes modélisations, c'est-à-dire jusqu'au modèle de savoir mathématique – ou, plus précisément, d'*activité mathématique* – sous-jacent à chaque approche.

La notion de registre ostensif, ainsi que l'importance accordée à l'articulation des registres activés lors de la mise en œuvre d'une praxéologie mathématique, doivent être rapprochées, on l'a dit, de la notion de *registre de représentation sémiotique* proposée par Raymond Duval dans le cadre d'une approche cognitive de l'apprentissage des mathématiques, et du principe selon lequel la mobilisation d'une pluralité de registres joue un rôle fondamental en mathématiques. De là l'importance accordée aux difficultés cognitives liées aux changements de registres, surtout dans les cas de « non-congruence » entre registres (passage du graphique à l'écrit, par exemple), ainsi qu'à la difficulté d'opérer des « différenciations fonctionnelles à l'intérieur d'un même registre pour lui permettre d'assumer des fonctions différentes (communication et traitement, par exemple) »⁵⁴. Ce type d'analyse permet ainsi de mettre en évidence des contraintes sur le développement de l'activité mathématique qui dépendraient principalement de l'activation des différents registres de représentation sémiotique, c'est-à-dire des contraintes génériques qui se situent, pour nous, au niveau des instruments ostensifs de l'activité et du rapport des acteurs à ces instruments.

Il convient cependant de noter une différence essentielle entre les deux approches. Rappelons que l'approche cognitive considère comme objet d'étude le « fonctionnement cognitif impliqué par l'acquisition de connaissances mathématiques », c'est-à-dire, encore, le « fonctionnement de la connaissance sous l'angle des mécanismes et des processus qui la permettent en tant qu'activité d'un être individuel »⁵⁵. Elle établit donc d'emblée une

⁵³ Arzarello, Bazzini et Chiapini (1994) ; Boero (1994) ; Drouhard (1992) et (1996) ; Duval (1996) ; Fischbein (1993) ; Godino et Batanero (1994) et (1998) ; Harel et Kaput (1992), Kaput (1991) ; Sfard et Linchevski (1994) ; Radford et Grenier (1996).

⁵⁴ Duval, 1996, p. 375.

⁵⁵ *Ibid.*, p. 353.

distinction nette entre la description de l'activité mathématique et celle du fonctionnement cognitif des sujets qui la réalisent ⁵⁶, en posant comme question essentielle l'étude des opérations cognitives nécessaires au déroulement des différents types de tâches mathématiques, que ce soit un calcul, un raisonnement ou l'utilisation d'une figure dans une démonstration géométrique. Or, dans l'étude de ce fonctionnement cognitif, on prend la tâche mathématique comme un donné, *comme si les tâches mathématiques elles-mêmes étaient déjà décrites et bien décomposées* en tant que tâches mathématiques. On procède, en quelque sorte, sans problématiser la description de la tâche mathématique que propose l'institution considérée (qu'elle soit mathématique, didactique ou autre). En conséquence, les difficultés mises en évidence à propos du travail dans un registre ostensif (appréhension d'une figure, production d'un discours, etc.) ou dans le travail de coordination entre différents registres (production d'un modèle algébrique à partir d'un graphique et, inversement, production d'un modèle graphique à partir d'une égalité entre deux grandeurs) ne peuvent être considérées que comme des difficultés « cognitives », c'est-à-dire non mathématiques.

C'est en ce point que les deux théorisations se séparent. Considérons, pour simplifier, l'exemple que propose Raymond Duval à propos de l'écriture du rapport numérique entre deux segments orientés sur une droite munie d'une graduation régulière, activité qui consiste, en l'espèce, à produire une écriture du type $AB = -\frac{5}{3}CB$ à partir de la donnée d'un segment

gradué où sont placés les points A, B et C ⁵⁷. Cette activité peut apparaître comme transparente d'un point de vue mathématique restreint : il suffirait de regarder la droite graduée pour en déduire l'égalité de segments. Considérée en tant que processus cognitif, elle apparaît comme une « tâche de conversion » entre deux registres de représentation sémiotique : celui du figuratif et celui de l'écriture symbolique. Donc, là où la vision mathématique restreinte reste muette, l'approche cognitive permet d'expliquer les principales difficultés que comporte cette tâche (erreur de signe, inversion du rapport, etc.) en les attribuant au phénomène de non-congruence entre ces registres.

Or, dans ce qui est présenté comme un changement de registres qui ne dépendrait que du fonctionnement cognitif du sujet, nous voyons, quant à nous, la mise en œuvre d'une technique mathématique, qui aboutit à l'écriture d'égalités entre segments par le truchement de l'écriture d'une égalité entre rapports de segments et rapports de mesures de segments. Il s'agit donc d'une pratique dont la réalisation effective doit être raccordée à l'existence d'une *praxéologie mathématique locale* bâtie autour d'un type de problèmes donné et dont les erreurs d'exécution ne peuvent se comprendre sans connaître au préalable les éléments de cette praxéologie qui ont été rendus disponibles à ces utilisateurs que sont les élèves observés – à moins qu'il s'agisse, justement, de déduire ces éléments à partir d'un certain nombre d'exécutions empiriques observées.

Il est vrai que, comme le rappelle pertinemment Raymond Duval, la mise en œuvre effective de cette technique suppose la mobilisation de différents registres (le graphique ou figuratif,

⁵⁶ Cette distinction s'exprime, plus précisément, dans les termes suivants : « Il y a un fait incontournable : l'accomplissement d'une tâche mathématique implique la mobilisation d'un fonctionnement cognitif. Dans les tâches proposées aux élèves, il faut donc d'une part bien distinguer la tâche proprement mathématique et la tâche cognitive et, d'autre part, examiner l'implication réelle de la tâche mathématique dans la tâche cognitive. Cela veut dire que ces deux types de tâche ne sont pas en fait séparables mais qu'ils peuvent être analysés de deux points de vue différents. » (*Ibid.*, p. 375).

⁵⁷ *Ibid.*, pp. 366-367.

l'écrit et l'oral en particulier), que, en outre, la manipulation d'ostensifs graphiques et écrits articulés aux gestes de manipulation n'est pas triviale (comptage des segments, ancrage sur un point, détermination du sens de parcours, etc.), que, enfin, cette technique manipulative n'a rien de spontanée. Mais se référer uniquement au fonctionnement cognitif, par opposition au traitement mathématique, consiste en réalité en une autre forme de naturalisation – et d'occultation – de la *technique mathématique* qui permettrait de réaliser la tâche et, au-delà, de la praxéologie construite – ou à construire, en cours de construction – autour de ce type de tâches. On voit ainsi que, dans certains types de théorisations, les objets ostensifs ne sont pas intégrés dans la description du savoir mathématique en tant qu'objets mathématiques : ils ne sont pas considérés comme faisant partie des « connaissances mathématiques » ou de l'activité mathématique, mais uniquement comme des ingrédients mathématiquement contingents, mais nécessaires au fonctionnement cognitif sous-jacent à cette activité.

Dans le champ des théories cognitivistes, on notera encore une situation intermédiaire – avec laquelle nous concluons. Partant d'un souci plus nettement affirmé d'articulation avec les approches dites « épistémologiques »⁵⁸, la théorie des champs conceptuels, telle qu'elle est présentée par Gérard Vergnaud (1990), inclut, dans le modèle qu'elle propose de la connaissance mathématique, les formes langagières et autres représentations symboliques, qui y sont considérés en tant que composants d'un « concept », à côté des situations et des invariants opératoires. Le rapprochement avec la présentation des ostensifs donnée plus haut, où ceux-ci apparaissent comme ingrédients constitutifs des tâches, techniques, technologies et théories semble significatif : dans les deux cas on propose des moyens de description du savoir et des connaissances mathématiques, dans les deux cas on intègre les ostensifs (ou, plus restrictivement, les signifiants langagiers et symboliques) dans la description proposée, dans les deux cas on considère l'activité mathématique – « l'action du sujet en situation et l'organisation de sa conduite » – comme l'objet clé de la recherche.

La « différence spécifique », bien plus ténue, apparaît alors dans une étape antérieure, plus subtile, et qu'il faut peut-être situer, non pas au niveau « ontique » des objets que le modèle permet d'appréhender et de l'importance qu'il leur accorde, mais au niveau « ontologique » de la *nature* attribuée à ces objets. La théorie des champs conceptuels, théorie cognitive reposant sur un principe d'élaboration pragmatique des connaissances, nous parle en effet de la « conceptualisation » et des « catégories de pensée mathématique » comme de processus faisant partie du « fonctionnement cognitif du sujet en situation ». Dans ce cadre, l'activité langagière et symbolique ne peut être intégrée qu'à titre d'activité d'accompagnement, d'aide essentielle, de soutien *inévitablement externe*⁵⁹ :

Le symbolisme mathématique n'est à rigoureusement parler ni une condition nécessaire ni une condition suffisante de la conceptualisation ; mais il contribue utilement à cette conceptualisation, notamment pour la transformation des catégories de pensées mathématiques en objets mathématiques. Le langage naturel est le moyen essentiel de représentation et d'identification des catégories mathématiques, mais il ne possède pas, autant que les diagrammes, les formules et les équations, le laconisme indispensable à la sélection et au traitement des informations et des relations pertinentes.

Nous avons parlé à diverses reprises du point de vue culturel courant qui tend à faire dépendre la pratique manipulative d'ostensifs de l'acquisition préalable d'un « savoir » constitué

⁵⁸ « Certains chercheurs privilégient des modèles de la complexité relevant soit de la linguistique, soit des théories du traitement de l'information. La théorie des champs conceptuels privilégie au contraire des modèles qui donnent un rôle essentiel aux concepts mathématiques eux-mêmes. » (Vergnaud, 1990, p. 146).

⁵⁹ *Ibid.*, p. 166.

d'objets non ostensifs. Lorsque les mathématiques sont conçues comme un savoir formé d'entités « abstraites » (non ostensives) que l'on « acquiert » et active mentalement, alors les objets ostensifs ne peuvent s'intégrer dans ce savoir : ils apparaissent, au mieux, comme des moyens « d'expression » ou « d'extériorisation » des notions et concepts mathématiques. Il existe à l'opposé un autre regard sur le travail du mathématicien praticien, qui voit en celui-ci un ouvrier face à ses outils, toujours soucieux de les faire travailler pour les mettre au point et en tester le domaine d'efficacité en même temps que la maîtrise qu'il en a ⁶⁰. Entre les deux, toutes les nuances sont possibles : le statut et les fonctions assignés aux objets ostensifs sont indissociablement liés à notre rapport à l'activité mathématique, rapport qui détermine les éléments de cette activité que l'on met en avant et ceux que l'on refoule, explicitement ou implicitement, hors de son champ d'action.

L'approche anthropologique propose un modèle d'activité mathématique qui intègre les objets ostensifs comme constituants de base du savoir mathématique tel qu'il se décrit en termes d'organisations praxéologiques. À la problématique du « sens » de l'activité mathématique des élèves et du « sens » des connaissances qu'ils acquièrent, elle substitue celle des conditions de vie et de développement d'organisations praxéologiques à la fois produits et facteurs de cette activité. Dans l'évolution de ces praxéologies, dans leur développement historique et dans leur transposition dans les classes, les avancées et les reculs sont toujours, indissociablement, ostensifs et non ostensifs.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC G. (1995), Editorial : La didactique des mathématiques est-elle spécifique de la discipline ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15/2, 7-8.

ARZARELLO F., BAZZINI L., CHIAPPINI G.P. (1992), Intensional semantics as a tool to analyse algebraic thinking, *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino*, 52.2, 105-126.

ARTAUD M. (1998), Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Dans Bailleul M. *et al* (eds.), *Actes de la IX^e école d'été de didactique des mathématiques*, ARDM et Crédit Agricole de Bruz, 101-139.

ARTIGUE M., VIENNOT L. (1986), La notion de différentielle en mathématiques et en physique dans l'enseignement supérieur, *Actes de la IV^e école d'été de didactique des mathématiques*, Paris : Publications de l'IREM de Paris 7.

ARTIGUE M. (1988), Quelques aspects de la transposition didactique de la notion de différentielle. Dans : C. Laborde (ed.) *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble : La Pensée Sauvage, 119-129.

AUSTIN J. L. (1962), *How to do things with words*. Oxford : The Clarendon Press.

⁶⁰ Aux articles déjà cités de Whitney et de Thurston, on peut ajouter un article de Knuth (1992), l'inventeur du traitement de textes mathématiques TeX, qui, présentant un nouvel outil symbolique à la communauté mathématique, avec ses avantages et son mode d'emploi, ajoute un commentaire dans la tradition du Descartes des *Règles pour la direction de l'esprit* : « I like to have mechanical operations like this available so that I can do manipulations reliably without thinking »...

- Ttraduction française :
- AUSTIN J. L. (1970), *Quand dire, c'est faire*. Paris : Éditions du Seuil, 1970.
- BENVENISTE E. (1966), *Problèmes de linguistique générale I*. Paris : Gallimard.
- BERTHELOT R., SALIN M.H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse, Université Bordeaux I, Bordeaux : Publications du L.A.D.I.S.T.
- BOERO P. (1994), About the role of algebraic language in Mathematics and related difficulties, *Rendiconti del Seminario Matematico*, Univ. Torino, 52.2, 161-194.
- BOLEA P., BOSCH M., GASCON J. (1998), Le caractère problématique du processus d'algébrisation. Proportionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire. Dans : Bailleul M. et al. (eds.), *Actes de la IX^e école d'été de didactique des mathématiques*, ARDM et Crédit Agricole de Bruz, 153-159.
- BOSCH M. (1994a), Les instruments du travail mathématique : le cas de la proportionnalité. Dans : M. Artigue et al. (eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BOSCH M. (1994b), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona (non publiée).
- BROUSSEAU G. (1983), Étude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*, Université Joseph-Fourier.
- BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 33-115.
- BROUSSEAU G. (1994), Problèmes et résultats de didactique des mathématiques, Washington: *ICMI Study 94*.
- BROUSSEAU G. (1995), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. Dans : Noirfalise R. et Perrin-Glorian M. J., *Actes de la VIII^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Fd, 3-46.
- CAJORI F. (1928-29), *A History of Mathematical Notations*, New York : Dover Publications, 1993.
- CHENEVIER P. (1926), *Précis d'arithmétique. Classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème} et 3^{ème}*, Paris : Hachette.
- CHEVALLARD Y. (1980), Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixant. Dans : G. Kaléla, F. Ledoux, A. Rouchier et B. Rozoy-Sénéchal (eds), *La politique de l'ignorance. Mathématiques-enseignement-société, Recherches*, 41, 71-99.
- CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage, 2^e édition 1991.

CHEVALLARD Y. (1985), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie : l'évolution de la transposition didactique, *Petit x*, 5, 51-94.

CHEVALLARD Y. (1989a), Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*, Université Joseph Fourier.

CHEVALLARD Y. (1989b), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x*, 5, 51-94.

CHEVALLARD Y. (1991a), Postface à la seconde édition. Dans : Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage, 2^e édition 1991, 199-233.

CHEVALLARD Y. (1991b), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*, Université Joseph-Fourier.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 73-112.

CHEVALLARD Y. (1996), La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. Dans : Noirfalise R. et Perrin-Glorian M.J., *Actes de la VIII^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Fd., 83-122.

CHEVALLARD Y., BOSCH M., GASCON J. (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

CHEVALLARD Y. (1997), Familiale et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3, 17-54.

DERRIDA J. (1967), *De la grammatologie*. Paris : Les Éditions de Minuit.

DERRIDA J. (1972), *Positions*. Paris : Les Éditions de Minuit.

DROUHARD J. P. (1992), *Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Élémentaire*, Thèse doctorale, Université Denis Diderot, Paris 7.

DROUHARD J. P. (1996), Algèbre, calcul symbolique et didactique. Dans : Noirfalise R. et Perrin-Glorian M. J. (eds.), *Actes de la VIII^e École d'été de didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Fd., 325-344.

DUCROT O. ET TODOROV T. (1972), *Dictionnaire encyclopédique des sciences du langage*, Paris : Éditions du Seuil.

DUVAL R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères - IREM*, 17, 121-138.

DUVAL R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16/3, 349-382.

ESPINOZA L. (1998), *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto “ límite de función ”. Del “ pensamiento del profesor ” a la gestión de los momentos del estudio*. Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelone (non publiée).

FISCHBEIN, E. (1993), The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

FREGONA D. (1995), *Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométric : interactions, contrats et transposition didactiques*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Bordeaux : Publications du LADIST.

FREUDENTHAL H. G. (1968), article : Notation mathématique, *Encyclopædia Universalis*.

GALACHE LOPEZ M^a I., CAMACHO DOMINGUEZ E., RODRIGUEZ GARCIA A. (1991), Origen histórico del término ion, *Enseñanza de las Ciencias*, 9.2, 187-192.

GASCON J. (1998), Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-34.

GODINO J. D., BATANERO M. C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14/3, 325-355.

GODINO J. D., BATANERO M. C. (1998), Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. Dans : Sierpiska A. et Kilpatrick J. (eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A search for Identity*, Dordrecht : Kluwer, 177-195.

GOODY J. (1977), *La raison graphique. La domestication de la pensée sauvage*. Paris : Éditions de Minuit, 1979.

GRUPO AZARQUIEL (1993), *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid : Síntesis.

GUZMAN M. de (1997), *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis*. Madrid : Pirámide.

HAREL G., KAPUT J. (1992), The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. Dans : Tall D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. London : Kluwer Academic Publishers, 82-94.

HAVELOCK E. (1963), *Preface to Plato*. Harvard University Press.

HAVELOCK E. (1976), *Origins of Western Literacy*. Toronto : Ontario Institute for Studies Education.

HAVELOCK (1986), *The Muse Learns to Write. Reflections on Orality and Literacy from Antiquity to the Present*. London : Yale University Press.

KAPUT J. J. (1991), Notations and representations as mediators of constructive processes. Dans : von Glasersfeld E. (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 53-74.

KNUTH D. E. (1992), Two Notes on Notation, *American Mathematical Monthly*, 95/5, 403-422.

LACASTA, E. (1995), *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles*. Thèse de doctorat de l'Université Bordeaux I, Bordeaux : Publications du LADIST.

LAFONT R. (1978), *Le travail et la langue*. Paris : Flammarion.

LAFONT R. (1984), *Anthropologie de l'écriture*. Paris : Centre Georges Pompidou.

LEGRAND M. (1996), La problématique des situations fondamentales, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16/2, 221-279.

MENNINGER (1992), *Number Words and Number Symbols. A Cultural History of Numbers*. New York : Dover Publications.

MERCIER A. (1996), L'algébrique, une dimension fondatrice des pratiques mathématiques scolaires. Dans : Noïrfalise R. et Perrin-Glorian M. J. (eds.), *Actes de la VIII^e École d'été de didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Fd., 345-361.

MOPONDI B. (1995), Les explications en classe de mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15/3, 7-52.

ONG W. H. (1982), *Orality and Literacy. The Technologizing of the Word*. Londres : Methuen.

ORUS P. (1992), *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique ; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat de l'Université Bordeaux I. Bordeaux : Publications du LADIST.

RADFORD, L., GRENIER, M. (1996), Entre les choses, les symboles et les idées... Une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre, *Revue des sciences de l'éducation*, XXII/2, 253-276 (Canada).

RECANATI R. (1979), *La transparence et l'énonciation*. Paris : Éditions du Seuil.

SANZ I. (1990), Comunicación, lenguaje y matemáticas, dans LLINARES S., SANCHEZ M. V. (eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática*, Sevilla : Alfar.

SFARD A., LINCHEVSKI L. (1994), The gains and the pitfalls of reification. The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

THURSTON H. (1994), What Is Wrong With the Definition of dy/dx ? *American Mathematical Monthly*, November 1994, 855-857.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2-3, 133-170.

VERGNAUD G. (1992), Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. Dans : M. Artigue *et al.* (eds.) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble : La Pensée Sauvage, 177-191.

WHITNEY H. (1968), The mathematics of physical quantities. Part II : Quantity Structures and Dimensional Analysis, *American Mathematical Monthly*, 75, 227-256.

ZIMMERMANN W., CUNNINGHAM S. (eds.) (1991), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America (Notes 19).