

São Paulo – 4-13 maio 2011

Introduction | **Introdução**

à la théorie | **à teoria**

anthropologique du didactique

|

antropológica do didático

O problema do vocabulário:

→ teoria

→ antropológico

→ o didático

Lewis Carroll (1871)

Through the looking-glass

| **Alice Através do Espelho**

Humpty Dumpty: “*When I use a word,
it means just what I choose it to mean—
neither more nor less.*”

→ *Personne* | **Pessoa** *x*

→ *Institution* | **Instituição** *I*

→ *x* Sujet de *I* | ***x* Sujeito da *I***

→ Assujettir | **Sujeitar**

→ Assujettissement | **Submissão**

x assujetti à | **se submete a** $I_k, k \in K$

x est la résultante | **è a resultante**
de ses assujettissements
| **de seus submissões**

Le paradoxe anthropologique :

| **O paradoxo antropológico:**

Puissance, enfermement et liberté

de x

| **Potência, confinamento e liberdade**

de x

La question clé : | **A pergunta chave:**

Nature du contenu d'un assujettissement
institutionnel ? |

**Natureza do conteúdo de uma
submissão institucional?**

La notion d'objet | **A noção de objeto**

Le rapport de I à l'objet o : $R(I, o)$

| **A relação de I ao objeto o : $R(I, o)$**

Rapport institutionnel | **Relação**
institucional

$$\ll I \text{ connaît } o \gg \Leftrightarrow R(I, o) \neq \emptyset$$

$$| \text{“} \mathbf{I \text{ conhece } o} \text{”} \Leftrightarrow R(I, o) \neq \emptyset$$

Les positions p dans I |

As posições p em I

x occupe la position p dans I

| x ocupa a posição p em I

Rapport à o pour les sujets de I en position p : $R_I(p, o)$

| **Relação a o para os sujeitos em posição p : $R_I(p, o)$**

$$R_I(p_1, o) \neq \emptyset, R_I(p_2, o) = \emptyset$$

Le rapport de x à l'objet o : $R(x, o)$

| **A relação de x ao objeto o : $R(x, o)$**

Rapport personnel | **Relação pessoal**

$$\ll x \text{ connaît } o \gg \Leftrightarrow R(x, o) \neq \emptyset$$

$$| \text{ “} x \text{ conhece } o \text{” } \Leftrightarrow R(x, o) \neq \emptyset$$

x bon sujet de I en position p

| **x bom sujeito de I em posição p**



$$\forall o, R(x, o) \cong R_I(p, o)$$

La conformité | **A conformidade**

de $R(x, o)$ à $R_I(p, o)$

est partielle | **é parcial**

Partie visible de $R(x, o)$ depuis I |

Parte visível de $R(x, o)$ a partir de I



Il n'y a pas de bon sujet !

| **Não há bom sujeito!**

Toute personne est un sujet déloyal pour
toute institution

| **Toda pessoa é um sujeito desleal
para qualquer instituição**

Cognition institutionnelle | **Cognição**
institucional

Cognition personnelle | **Cognição**
pessoal

Statique cognitive

et dynamique cognitive

| **Estática cognitiva**

e dinâmica cognitiva

Le problème didactique :

| **O problema didático:**

Faire que se crée ou se modifie |

Fazer com que se crie ou se modifique

certain rapports $R(x, o)$ et $R_I(p, o)$ |

certas relações $R(x, o)$ e $R_I(p, o)$

La création ou la modification d'un rapport $R(x, o)$ ou $R_I(p, o)$ |

A criação ou modificação de uma relação $R(x, o)$ ou $R_I(p, o)$

est un apprentissage |

é uma aprendizagem

La personne x apprend |

A pessoa x aprende

L'institution I apprend |

A instituição I aprende

Ambigüïtés : | **Ambiguidades:**

☞ Si | **Se**

$$R_1(x, o) = \emptyset \mapsto R_2(x, o) \neq \emptyset$$

alors | **então**

« x apprend o » | **“x aprende o”**

☞ Si | Se

$$R_1(x, o) \neq \emptyset \mapsto R_2(x, o) \neq R_1(x, o)$$

y compris si | **incluindo quando**

$$R_2(x, o) = \emptyset \text{ ou } R_2(x, o) \subset R_1(x, o)$$

« x apprend ou x désapprend o » ? |

“x aprende ou x desaprende o”?

Apprentissage ou désapprentissage ? |
Aprendizagem ou desaprendizagem?

Éducation ou déséducation ? |
Educação ou deseducação?

Exemple | **Exemplo**

$$R_1(x, o) \mapsto R_2(x, o)$$

$$R_2(x, o) = \check{R}_1(x, o) \cup \{ \text{astuces, recettes} \}$$

$$\mathbf{R_2(x, o) = \check{R}_1(x, o) \cup \{ dicas, receitas \}}$$

$$\text{avec : | \textbf{com: } } \check{R}_1(x, o) \subset R_1(x, o)$$

Il y a un changement dans $R(x, o)$ |

Há uma mudança em $R(x, o)$

non vu comme un apprentissage |

não visto como um aprendizagem

Il n'y a pas d'apprentissage

dans l'absolu |

Não há aprendizagem

em termos absolutos

Apprendre est un fait social |

Aprender é um fato social

Un certain changement dans $R(x, o)$ |

Alguma mudança em $R(x, o)$

est souhaité par quelque « instance »

(personne ou institution) |

é desejada por alguma “instância”

(pessoa ou instituição)

Projet personnel ou institutionnel de
provoquer un changement déterminé |

**Projeto pessoal ou institucional de
causar uma mudança determinada**

Projet de faire que x apprenne « quelque chose », une chose déterminée |

Projeto de fazer com que x aprende algo, “alguma coisa” determinada

Projet didactique | **Projeto didático**

Intention didactique | **Intenção didática**

Un « geste » didactique |

Um “gesto” didático

Le mot « didactique » |

A palavra “didática”

Du grec tardif | **Do grego tardio**

didaktikos

« propre à instruire » |

“próprio para instruir”

Du grec *didaskein*, « enseigner » |

Do grego *didaskein*, “ensinar”

Racine indo-européenne **dek-*, *dok-*, *dk-*

| **Raiz indo-européia **dek-*, *dok-*, *dk-***

« acquérir — ou faire acquérir — une
connaissance » | **“adquirir ou fazer
adquirir um conhecimento”**

« Le didactique » : | **“O didático”:**

l’ensemble des “gestes” didactiques
dans une société donnée |

**o conjunto de “gestos” didáticos em
uma dada sociedade**

Trois faits fondamentaux :

| **Três fatos básicos**

❶ Le didactique est indispensable aux
sociétés humaines | **O didático é
essencial para as sociedades humanas**

comme le sexuel | **como o sexual**

② Dans la vie quotidienne, le didactique est péjoré et refoulé |

**Na vida cotidiana, o didático é
pejorado e recusado**

D'où le fait que l'adjectif « didactique » soit péjoratif | **Daí o fato do adjetivo
“didático” ser pejorativo**

③ Le didactique est encadré, isolé, voire ségrégué | **O didático é enquadrado, isolado, até mesmo segregado**

D'où le fait que le didactique soit mal connu, négligé et sous-développé | **Daí o fato do didático ser pouco conhecido, negligenciado e subdesenvolvido**

La didactique | **A didática**

La didactique est la science des conditions et contraintes de la diffusion des connaissances dans la société |

A didática é a ciência das condições e restrições da difusão dos conhecimentos na sociedade

En précisant les systèmes de connaissances étudiés, on obtient les différentes didactiques... |

Especificando os sistemas de conhecimentos estudados, obtemos as diferentes didáticas específicas

Deux remarques : | **Dois comentários**

❶ Toute science est la science de certaines conditions et contraintes de la vie des sociétés humaines

Toda a ciência é a ciência de certas condições e restrições da vida das sociedades humanas

② En TAD, une contrainte est une condition que les personnes occupant une position p ne peuvent modifier : la notion est relative |

Em TAD, uma restrição é uma condição que as pessoas ocupando uma posição p não podem mudar: a noção é relativa

Le problème de l'analyse didactique | **O problema da análise didática**

La notion d'œuvre *O* et
l'organisation/réduction du monde
objectal |

**A noção de obra *O* e a
organização/redução do mundo
objetal**

La notion de système didactique | **A** **noção de sistema didático**

$$S(X ; Y ; O)$$

X , « l'instance étudiante » |
“a instância estudante”
 Y , « l'instance d'aide à l'étude » | **“a**
instância de ajuda ao estudo”

O , l'œuvre que X est supposé s'efforcer
de connaître | **O , a obra que X é
suposto se esforçar para conhecer**

... et que Y est supposé aider X (et
chaque $x \in X$) à connaître | **... e que Y é
suposto ajudar X (e cada $x \in X$) a
conhecer**

Autement dit | **Em outras palavras**

❶ X (et chaque $x \in X$) est supposé
« faire quelque chose » pour qu'un
certain rapport $R(X, O)$ (et $R(x, O)$) se
crée | **X (e cada $x \in X$) é suposto
“fazer uma coisa” para que uma
certa relação $R(X, O)$ (e $R(x, O)$) se
crie**

② Y est supposé « faire quelque chose »
pour qu'un certain rapport $R(X, O)$ (et
 $R(x, O)$) se crée | **Y é suposto “fazer
uma coisa” para que uma certa
relação $R(X, O)$ (e $R(x, o)$) se crie**

X et *Y* sont réunis autour de l'œuvre *O*
par un contrat didactique (au sens large)
dans le but que *X* (et chaque *x*) acquière
une certaine connaissance de *O* | *X* e *Y*
estão reunidos em torno da obra *O*
por um contrato didático (em sentido
amplo) para que *X* (e cada *x*) adquira
um certo conhecimento de *O*

Pour connaître O , X va étudier O avec
l'aide de Y | **Para conhecer O , X vai
estudar O com a ajuda de Y**

De façon minimaliste, la didactique peut
se définir comme la science de l'étude |
**De maneira minimalista, a didática
pode definir-se como a ciência do
estudo**

Diversité des types de systèmes didactiques | **Diversidade dos tipos de sistemas didáticos**

À l'école | **Na escola**

$$Y = \{ y \} \rightarrow S(X ; y ; O)$$

$$X = \{ x_1, x_2, x_3 \} \rightarrow S(x_1, x_2, x_3 ; y ; O)$$

Classe scolaire | **Classe escolar**

$[X ; y]$

Système didactique principal (SDP) |
Sistema didático principal (SDP)

$S(X ; y ; O)$

Systemes didactiques auxiliaires (SDA) | **Sistemas didáticos auxiliares (SDA)**

Devoir à la maison | **Lição de casa**

$$S(x ; \emptyset ; O)$$

Systemes didactiques induits (SDI) |
Sistemas didáticos induzidos (SDI)

$$S(x, x' ; \emptyset ; O)$$

$$S(x ; y^* ; O)$$

...

Dans la vie didactique des sociétés |

Na vida didática das sociedades

les systèmes didactiques éphémères,
furtifs sont souvent cruciaux |

**os sistemas didáticos efêmeros,
furtivos são muitas vezes cruciais**

Analyse didactique | **Análise didática**

❶ Identifier les systèmes didactiques |
Identificar os sistemas didáticos

y compris les systèmes furtifs,
clandestins | **incluindo os sistemas**
furtivos, clandestinos

② Pour chaque système $S(X ; Y ; O)$,
identifier les conditions et contraintes
déterminant... |

**Para cada sistema $S(X ; Y ; O)$,
identificar as condições e restrições
determinando...**

① Ce que X est ou pourrait être | **O que X é ou poderia ser**

y compris les conditions et contraintes importées par X (et chaque $x \in X$) dans le système | **incluindo as condições e restrições importadas por X (e $x \in X$) no sistema**

② Ce que Y est ou pourrait être | **O que Y é ou poderia ser**

y compris les conditions et contraintes
importées par Y dans le système |
**incluindo as condições e restrições
importadas por Y no sistema**

③ Ce que *O* est ou pourrait être | **O que
O é ou poderia ser**

y compris les conditions et contraintes
importées par *O* dans le système, soit la
discipline de l'œuvre étudiée | **incluindo
as condições e restrições importadas
por *O* no sistema, a saber la disciplina
da obra estudada**

④ Ce que X fait ou pourrait faire pour
étudier O (ses gestes didactiques) | **O**
que X faz ou poderia fazer para
estudar O (seus gestos didáticos)

⑤ Ce que Y fait ou pourrait faire pour aider X à étudier O (ses gestes didactiques) | **O que Y faz ou poderia fazer para ajudar X a estudar O (seus gestos didáticos)**

⑥ Ce que X apprend ou pourrait apprendre à propos de O et d'autres objets dans le système didactique analysé | **O que X aprende ou poderia aprender sobre O e outros objetos no sistema didático analisado**

⑦ Ce que Y apprend ou pourrait apprendre à propos de O et d'autres objets dans le système didactique analysé | **O que Y aprende ou poderia aprender sobre O e outros objetos no sistema didático analisado**

Comenius (1592-1670) :

Didactique : science de l'enseignement |

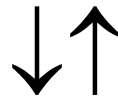
Didática: ciência do ensino

Mathématique : science de l'apprentissage |

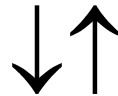
Matética: ciência da aprendizagem

Échelle de codétermination didactique |
Escala de codeterminação didática

Civilisation | **Civilização**



Société | **Sociedade**

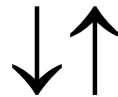


...

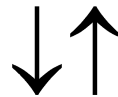
Un échelon crucial : l'École |

Um escalão crucial: a Escola

...



Société | **Sociedade**



École | **Escola**



...

Le mot grec *skholè* |

A palavra grega *skholê*

schola,

school,

Schule,

skole,

escuela,

scuola,

escola, école, etc.

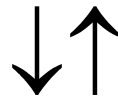
Le loisir comme cessation des tâches
quotidiennes et temps consacré à l'étude |

**O lazer como cessação das tarefas
cotidianas e tempo dedicado ao
estudo**

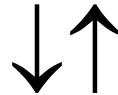
Un échelon glissant : la Pédagogie |

Um escalão escorregadio: a Pedagogia

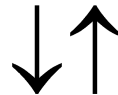
...



École | **Escola**



Pédagogie | **Pedagogia**



...

Le pédagogue grec était un esclave qui conduisait l'élève à l'école |

O pedagogo grego era um escravo que levava o aluno para a escola

En TAD, le pédagogique est inherent à ce qui conduit l'élève vers l'œuvre à étudier | **Em TAD, o pedagógico é inherente ao que leva o aluno na direção da obra a ser estudada**

Les mots témoignent : |

As palavras testemunham:

→ *Insignire, enseñar, ensinar*

→ *To teach* signifiait | **significava**

to show, to point out

→ *The teacher* désignait l'index |
designava o dedo indicador

→ *To learn* signifiait | **significava**

to follow a track

Dans $S(x ; y ; O)$, y est supposé conduire x à l'œuvre O et lui faire connaître cette œuvre |

Em $S(x ; y ; O)$, y é suposto levar x até a obra O e fazê-lo conhecer essa obra

Le problème de la rencontre avec
l'œuvre | **O problema do encontro
com a obra**

La solution antique et classique | **A
solução antiga e clássica**

Réciter l'œuvre, écrire l'œuvre en un
texte qui prétend relater l'œuvre... |

**Recitar a obra, escrever a obra num
texto que pretende relatar a obra...**

Le récit (oral ou écrit) de l'œuvre O
offre une présentation commentée,
annotée de l'œuvre : un *exposé* (oral ou
écrit) de l'œuvre |

**A narração (oral ou escrita) da obra
oferece uma apresentação comentada,
anotada da obra : uma *exposição*
(oral ou escrita) da obra.**

Deux formes principales de pédagogie ont existé et continuent d'exister où la rencontre avec l'œuvre est foncièrement la rencontre avec un exposé de l'œuvre :

| Duas formas principais de pedagogia existiram e ainda existem onde o encontro com a obra é basicamente o encontro com a exposição da obra:

❶ L'instance Y , réduite généralement à une unique personne y , aide X à étudier l'exposé de l'œuvre dans un livre « de référence » (« pédagogie de régent ») |

A instância Y , reduzida geralmente a uma única pessoa y , ajuda X a estudar a exposição da obra em um livro “de referência” (“pedagogia de... ”)

② L'instance Y , réduite généralement à une unique personne y , aide X à étudier l'œuvre en lui faisant une présentation personnelle de l'œuvre (« pédagogie de professeur ») | **A instância Y , reduzida geralmente a uma única pessoa y , ajuda X a estudar a obra fazendo uma apresentação pessoal dessa obra (“pedagogia de professor”)**

Un exposé d'une œuvre O est une œuvre, $E(O)$; étudier O , c'est alors étudier l'œuvre, orale (sue par cœur) ou écrite, $E(O)$. Une civilisation du texte émerge. | **Uma exposição da obra O é uma obra, $E(O)$; estudar O é então estudar a obra oral (decorada) ou escrita $E(O)$. Uma civilização do texto emerge.**

L'étude de l'exposé de l'œuvre proposée par le livre ou par le professeur est une part essentielle du travail de X pour rencontrer l'œuvre. | **O**

estudo da exposição da obra proposta pelo livro ou pelo professor é uma parte essencial do trabalho do aluno para encontrar a obra.

Le travail de l'élève est complété par l'étude personnelle de questions proposées par le livre ou posées par le professeur (devoirs à la maison, etc.) |

O trabalho do aluno é aumentado pelo estudo pessoal de questões propostas pelo livro ou colocadas pelo professor (leções de casa, etc.).

Mais cette aide supplémentaire fut longtemps considérée comme utile seulement à ceux qui n'avaient pas compris le « cours »... |

Mais essa ajuda extra foi considerada por muito tempo útil apenas para os alunos que não entendiam o “curso”...

Ce que peut faire y pour aider x à étudier O est ainsi très limité : une part énorme du travail d'étude est abandonnée à x . |

O que y pode fazer para ajudar x a estudar O é portanto muito limitado: uma tremenda parte do trabalho de estudo é deixada para x .

Pour améliorer l'état de l'enseignement,
pour faire mieux, deux axes principaux
vont être explorés à partir de la période
1900-1950. |

**Para melhorar o estado da educação,
para melhorar, dois eixos principais
de evolução serão explorados a partir
da época 1900-1950.**

Le premier axe conduit, en vérité, à une disqualification de l'éducation comme effort pour donner à connaître à X des œuvres déterminées. |

O primeiro eixo vai levar, na verdade, a uma descaracterização da educação como esforço para ajudar X a conhecer determinadas obras.

Que va-t-il se passer en effet ? Il semble clair qu'un exposé $E(O)$ doit être tout à la fois adéquat à l'œuvre O et à sa discipline et « ajusté » à X . |

O que vai acontecer de fato? Parece claro que uma exposição $E(O)$ deve ser simultaneamente adequada a obra O e a sua disciplina, e “ajustado” a X .

Que signifie « ajusté à X » ? La réponse dominante à cette question est : l'exposé doit plaire à X et conduire X à *aimer* l'œuvre O . |

O que significa “ajustado a X ”? A resposta dominante a essa pergunta é: a exposição deve agradar a X e levar X a *gostar* da obra O .

Cette réponse peut paraître évidente et presque naturelle. Pourtant elle conduit à une impasse et cela pour plusieurs raisons. |

Esta resposta pode parecer óbvia e quase natural. No entanto, leva a um impasse, e isso por várias razões.

La première raison est qu'on peut aimer une œuvre sans la connaître vraiment : le fait d'aimer une œuvre ne suffit pas à rendre spécialiste de la chose. |

A primeira razão é que você pode amar uma obra que não conhece de verdade: o fato de gostar de uma obra não faz de ninguém um especialista no assunto.

La deuxième raison est que, heureusement, on n'a pas besoin d'aimer une œuvre pour la connaître, par exemple d'aimer conduire une voiture pour savoir le faire. | **A segunda razão é que, felizmente, você não precisa gostar de uma obra para conhecê-la, por exemplo, gostar de dirigir um carro para fazer-lo.**

La troisième raison est que, tout au contraire, on gagne à ne pas faire dépendre la connaissance d'une œuvre de sentiments à l'endroit de cette œuvre.

| A terceira razão é que, ao contrário, vale a pena não fazer depender o conhecimento duma obra de sentimentos para essa obra.

Ainsi, il faut dire clairement qu'on peut connaître une œuvre sans aimer cette œuvre et sans y adhérer en termes de croyances. |

Assim, devemos dizer claramente que nós podemos conhecer uma obra sem gostar dela e sem aderir a ela em termos de crenças.

Plus généralement, un *enseignement laïque* est, en TAD, un enseignement permettant aux élèves de connaître des œuvres, sans chercher à manipuler leurs sentiments et croyances. |

De modo geral, um *ensino laico* é, em TAD, um ensino permitindo aos alunos conhecer obras, sem tentar manipular seus sentimentos e crenças.

Dans une société laïque, sentiments et croyances sont protégés : la liberté de conscience et de croyance ne doit pas être exposée à des pressions non souhaitées. |

Numa sociedade laica, sentimentos e crenças estão protegidos: a liberdade de consciência e de crença não deve ser exposta à pressões indesejáveis.

En TAD, la laïcité d'un enseignement peut s'exprimer en termes d'institutions. Une œuvre O (une théorie mathématique, une foi religieuse, etc.)...

| **Em TAD, a laicidade de um ensino pode ser expressa em termos de instituições. Uma obra O (uma teoria matemática, uma fé religiosa, etc.)...**

① ... a été produite par une certaine institution I_0 ; | ... **foi produzida por uma certa instituição I_0 ;**

② ... est étudiée par une institution « savante » de référence I_1 . | ... **uma instituição “sábua” de referência.**

Un enseignement est laïque si et seulement si cet enseignement n'induit pas X à s'assujettir soit à I_0 , soit à I_1 . |

Um ensino é laico se e somente se este ensino não induz X a sujeitar-se ou I_0 ou a I_1 .

Dans un enseignement laïque d'histoire des mathématiques, un élève ne doit pas être incité à feindre d'être un mathématicien (I_0) ou un historien des mathématiques (I_1) | **Num ensino laico de história da matemática, um aluno não deve ser incentivado a fingir ser um matemático (I_0) ou um historiador da matemática (I_1).**

Cela signifie que l'élève doit pouvoir faire de l'histoire des mathématiques (I_1) sans devoir assumer l'ensemble des conditions et des contraintes spécifiques de I_1 . | **Isso significa que o aluno deve poder fazer história da matemática (I_1) sem ter que assumir o conjunto de condições e restrições específico de I_1 .**

L'élève en tant qu'élève est soumis à une seule institution, l'enseignement considéré. Le nom d'élève se réfère à la personne en tant que soumise à cet enseignement. | **O aluno como aluno é submetido a uma só instituição, o ensino considerado. O nome do aluno se refere à pessoa como sujeito do ensino.**

L'adaptation de $E(O)$ à X a conduit à une situation qu'on peut décrire ainsi : O est un monument, y un guide, l'étude de O une visite guidée du monument. |

A adaptação de $E(O)$ a X tem levado a uma situação que pode ser descrita deste modo: O é um monumento, y um guia, o estudo de O uma visita guiada do monumento.

Un monument est un édifice digne d'admiration ; sa visite est une affaire sérieuse plutôt qu'amusante. Les élèves suivent docilement mais apprennent peu. | **Um monumento é um edifício digno de admiração; sua visita é um assunto sério, chato em vez de divertido. Os alunos seguem docilmente mas aprendem pouco.**

Pour ne pas s'ennuyer durant la visite d'une œuvre, il faut savoir à quoi cette œuvre est utile, à quoi elle sert et comment on s'en sert ; et tenter, si possible, de l'utiliser. | **Para evitar o tédio durante a visita de uma obra, temos que saber em que esta obra é útil, para que serve e como se utiliza; e se possível tentar usá-la.**

Quelles sont les *raisons d'être* de l'œuvre visitée, c'est-à-dire étudiée ? Quelle est son *utilité* ? Telles sont les questions clés à étudier. |

Quais são as razões de ser da obra visitada, isto é estudada? Qual é sua utilidade? Estas são as questões-chave a estudar.

En classe de mathématiques, nous continuons à étudier les angles, les triangles, les parallélogrammes, etc., mais nous ne savons plus à quoi ils servent. | **Na aula de matemática, continuamos a estudar os ângulos, os triângulos, os paralelogramas, etc., mas já não sabemos para que servem.**

Cet oubli de la question des raisons d'être engendre des pertes de sens en cascade. Ainsi, si nous ignorons à quoi ils servent, pourquoi mesurer les angles ?

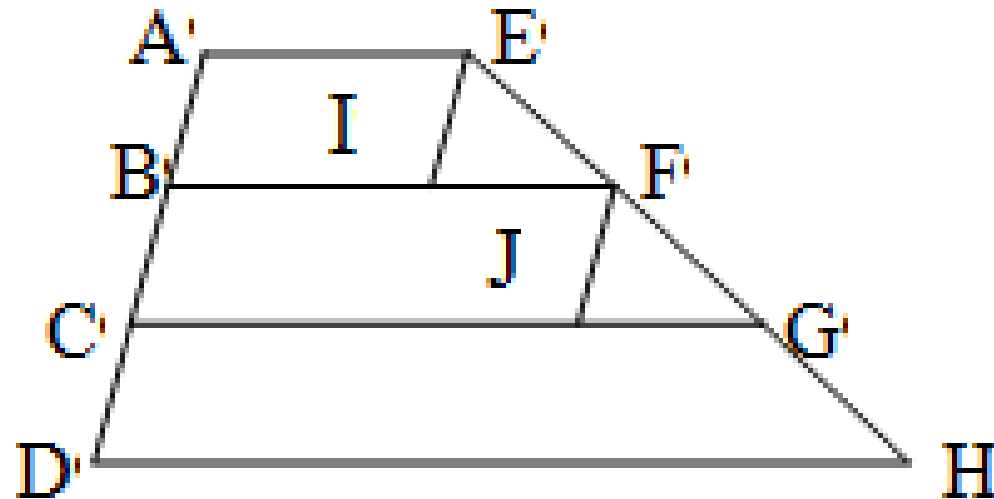
| Esse esquecimento da questão das razões de ser gera um efeito dominó de perdas de sentido. Assim se ignoramos para que servem, por que razão medir ângulos?

Quand on cherche les raisons d'être, on découvre qu'elles sont chaque fois très spécifiquement déterminées par les besoins propres au travail mathématique. | **Quando se olha para as razões de ser, descobrimos que são cada vez muito especificamente determinadas pelas necessidades próprias do trabalho matemático.**

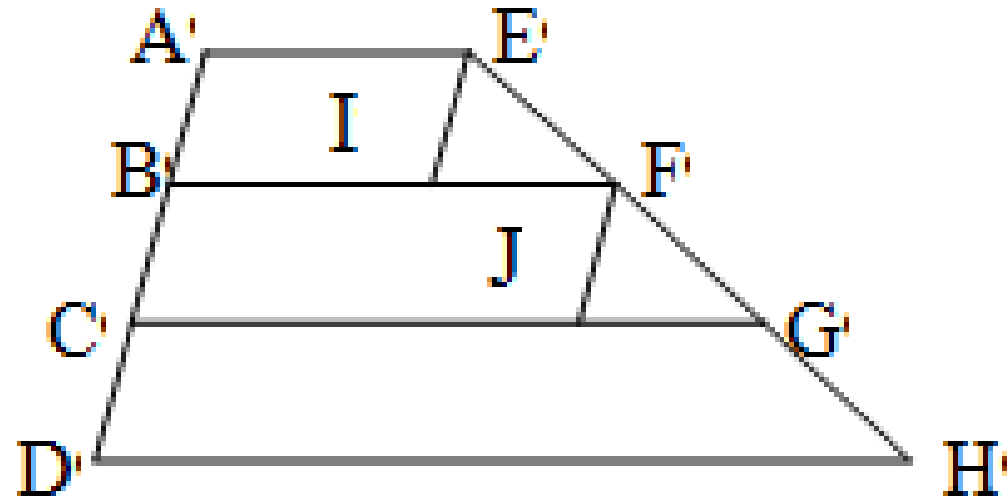
Nous quittons alors le monde enchanté
et trompeur du tourisme mathématique
et arrivons dans l'univers d'une
ingénierie de précision d'une rare
créativité. | **Então, deixamos o mundo
encantado e enganoso do turismo
matemático e chegamos no universo
de uma engenharia de precisão de
rara criatividade.**

Les parallélogrammes ne sont pas intéressants en eux-mêmes mais par ce qu'ils permettent dans le travail mathématique. Voici un exemple... | **Os paralelogramas não são interessantes em si, mas pelo que possibilitam no trabalho matemático. Aqui está um exemplo...**

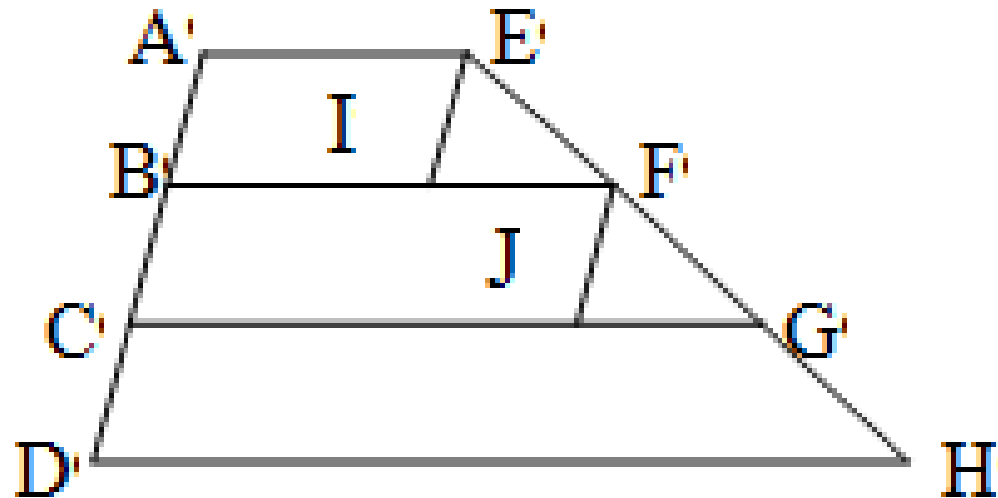
Thalès | Thales



❶ AE, BF, CG droites parallèles | **retas**
paralelas ❷ $AB \sim BC \xRightarrow{?} EF \sim FG$



① EI, FJ, AB parallèles | **paralelas** $\Rightarrow$
 AEIB, BFJC parallélogrammes |
paralelogramas $\Rightarrow EI \sim AB, FJ \sim BC$
 $\Rightarrow$ **EI $\sim$ FJ.**



$$\textcircled{2} \quad EI \sim FJ, \quad \hat{I}EF \equiv \hat{J}FG, \quad \hat{E}F \equiv \hat{F}G$$

$$\stackrel{\text{ALA}}{\Rightarrow} EIF \sim FJG \Rightarrow \mathbf{EF \sim FG}.$$

Dès lors qu'on s'intéresse aux œuvres pour ce qu'elles rendent possible, on peut poser valablement le problème du choix des œuvres « utiles » à étudier. |

Tão logo se olha as obras pelo que possibilitam, torna-se possível considerar validamente o problema da escolha das obras “úteis” para estudar.

Parce qu'elle gomme la question de l'utilité, la monumentalisation oblitère le problème du choix des œuvres utiles. Voici un exemple... |

Por que apaga a questão da utilidade das obras, a monumentalização oblitera o problema da escolha das obras úteis. Aqui está um exemplo...

$$3\sqrt{2} \stackrel{?}{=} \sqrt{18} ?$$

Avec la calculatrice : |

Com a calculadora:

$$3\sqrt{2} = 4,24264068711928514640506\dots$$

$$\sqrt{18} = 4,24264068711928514640506\dots$$

$$? \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$$

La professeure : | **A professora:**

« On ne peut pas conclure... » |

Não podemos concluir...

« ... parce qu'il pourrait se faire que, par exemple, les quarantièmes décimales soient différentes ! » |

« ... porque poderia ser que, por exemplo, os dígitos quadragésimos sejam diferentes! »

Or cela n'est pas possible ; voici pourquoi : | **Mas isso não é possível; aqui está o porquê:**

$$a, b, c \in \mathbb{Z}^*, a\sqrt{b} \neq \sqrt{c}$$

$\Downarrow$

$$|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| = \frac{|a^2b - c|}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} \geq \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$



$$a\sqrt{b} \neq \sqrt{c} \Rightarrow |a\sqrt{b} - \sqrt{c}| \geq \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$



$$|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| < \frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} \Rightarrow a\sqrt{b} = \sqrt{c}.$$

$$a = 3, b = 2, c = 18$$



$$\frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \frac{1}{3 \times 1,5 + 4,5} = \frac{1}{9} > 0,1$$



$$\begin{array}{l} 3\sqrt{2} = 4,2... \\ \sqrt{18} = 4,2... \end{array} \Rightarrow 3\sqrt{2} = \sqrt{18}.$$

Deux axes principaux d'évolution ont été annoncés. Nous en arrivons au second axe, dans lequel l'exposé $E(O)$ cesse d'être le protagoniste principal. |

Dois eixos principais foram anunciados. Passemos agora ao segundo eixo, onde a exposição $E(O)$ deixa de ser o protagonista principal.

Ici commence la présentation des grandes lignes du *modèle général* proposé par la TAD du fonctionnement d'un système didactique $S(X ; y ; O)$. |

Aqui começa a apresentação das grandes linhas do *modelo geral* proposto pela TAD do funcionamento de um sistema didático $S(X ; y ; O)$.

Formellement, l'étude d'une œuvre O consiste à formuler des questions Q_ℓ à propos de cette œuvre et à étudier ces questions pour leur apporter des réponses R_ℓ . |

Formalmente, o estudo de uma obra O consiste em formular questões Q_ℓ sobre esta obra e em estudar essas questões para dar respostas R_ℓ .

Quand un système didactique $S(X ; y ; O)$ ou $S(X ; y ; Q_\ell)$ fonctionne, on dira que le système *enquête* sur l'œuvre O ou la question Q_ℓ . |

Quando um sistema didático $S(X ; y ; O)$ ou $S(X ; y ; Q_\ell)$ funciona, diremos que o sistema *investiga* sobre a obra O ou a questão Q_ℓ .

Un problème cardinal est celui du *topos*, mot grec signifiant « lieu » : pour chaque geste d'étude, que sont le *topos* de X (et de chaque $x \in X$) et le *topos* de y ? | **Um problema cardeal é o do *tópos*, palavra grega que significa “lugar”: para cada “gesto” de estudo, que são o *tópos* de X (e de cada $x \in X$) e o *tópos* de y ?**

Dans le cas classique, y enquête d'abord sur les questions Q_ℓ . Puis il présente à X ses propres réponses R_ℓ . Il reste aux élèves à étudier R_ℓ . | **No caso clássico, primeiro y investiga sobre as questões Q_ℓ . Depois apresenta a X suas próprias respostas R_ℓ . Resta aos alunos estudar R_ℓ .**

Quand une institution I ou une personne x propose une réponse R à une question Q , cette réponse est notée R_I ou R_x . |

Quando uma instituição I ou uma pessoa x propõe uma resposta R a uma questão Q , esta resposta é denotada por R_I ou R_x .

Quand un système didactique $S(X ; y ; Q)$ produit une réponse, celle-ci est notée $R^\heartsuit$ et on écrit : $S(X ; y ; Q) \hookrightarrow R^\heartsuit$. |

Quando um sistema didático $S(X ; y ; Q)$ produz uma resposta, esta é denotada por $R^\heartsuit$ e se escreve assim:
 $S(X ; y ; Q) \hookrightarrow R^\heartsuit$.

La « formule » $S(X ; y ; Q) \hookrightarrow R^\heartsuit$. est appelée *schéma herbartien réduit*, en référence au philosophe et pédagogue Johann Friedrich Herbart (1776-1841). |

A “fórmula” $S(X ; y ; Q) \hookrightarrow R^\heartsuit$ é chamada de *esquema herbartiano reduzido*, com referência ao filósofo e pedagogo Johann Friedrich Herbart (1776-1841).

Si y impose à X sa réponse R_y , alors $R^\heartsuit = R_y$. Dans ce cas, les élèves ne prennent part ni au choix des questions Q_ℓ , ni à leur étude. | **Se y impõe a X sua resposta R_y , então $R^\heartsuit = R_y$. Neste esquema, os alunos não participam, nem da escolha das questões Q_ℓ , nem de seu estudo.**

Une rupture historique va affecter la
seconde étape, l'étude de Q_ℓ . |

**Uma ruptura histórica vai afetar a
segunda etapa, o estudo de Q_ℓ .**

Considérons l'œuvre O centrale en géométrie formée autour de la notion d'angle. Dans le schéma « moderne », y choisit la question suivante : |

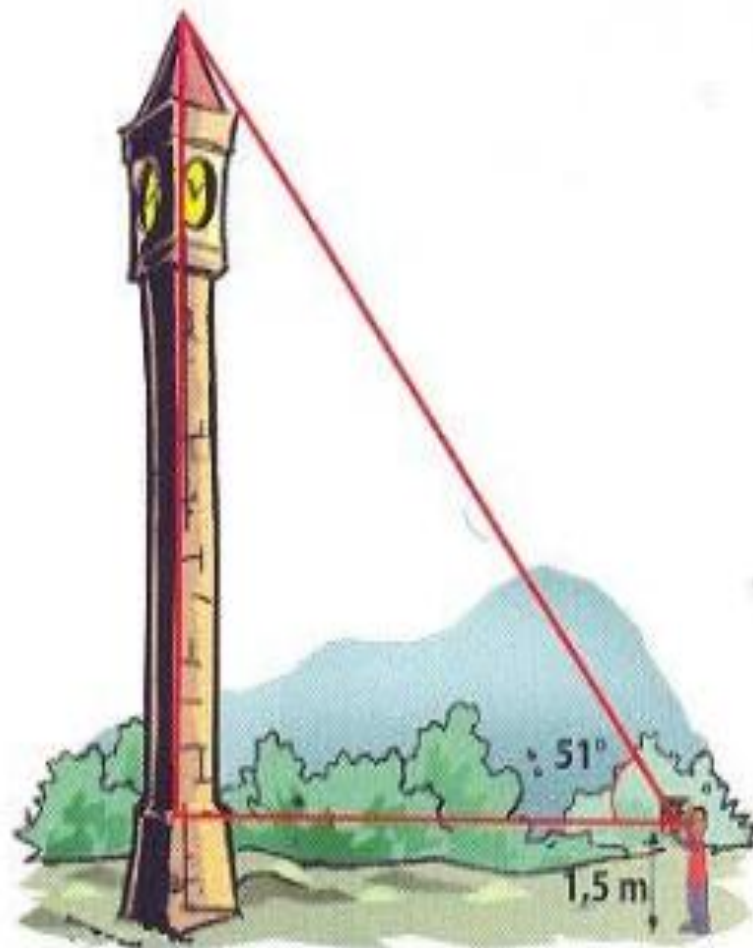
Consideremos a obra O central em geometria formada em torno da noção de ângulo. No esquema “moderno”, y escolhe a seguinte questão:

*Comment mesurer la hauteur de la tour depuis le sol ? C'est cette question qui va en même temps conduire à la notion d'angle et à son utilité. | **Como determinar a altura de uma torre a partir do solo? É esta questão que vai simultaneamente conduzir à noção de ângulo e à sua razão de ser.***

La figure ci-après illustre au contraire l'enseignement classique : la notion d'angle est supposée connue et la réponse est donnée avec la question. |

A figura a seguir ilustra pelo contrário o ensino clássico: a noção de ângulo é supostamente conhecida e a resposta vem dada com a questão.

Portanto na situação proposta no problema, basta medir uma distância e um ângulo, com o teodolito construído, para calcular a distância desejada.



La structure de l'enseignement classique est aussi apparente dans cette présentation : | **A estrutura do ensino clássico esta igualmente evidente nesta apresentação:** *“Agora, mostraremos métodos para o cálculo de distâncias inacessíveis, que vão utilizar os conceitos de trigonometria aprendidos entre as Aulas 29 e 43.”*

Ce cas diffère du cas où $R^\heartsuit = R_y$ et il est maintenant nécessaire d'introduire le *schéma herbartien semi-développé* :

Este caso difere do caso onde $R^\heartsuit = R_y$ e agora é necessário introduzir o *esquema herbartiano semidesenvolvido*:

$$[S(X ; y ; Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^\heartsuit.$$

La lettre *M* désigne le *milieu didactique* ou *milieu pour l'étude* (de la question *Q*, pour *X*), c'est-à-dire l'ensemble des moyens d'étude disponibles. |

A letra *M* designa o meio didático ou meio para o estudo (da questão *Q*, para *X*), isto é, todos os meios disponíveis para o estudo.

Dans le cas de la tour et des angles, le milieu M est composé des... |

No caso da torre e dos ângulos, o meio M consiste em...

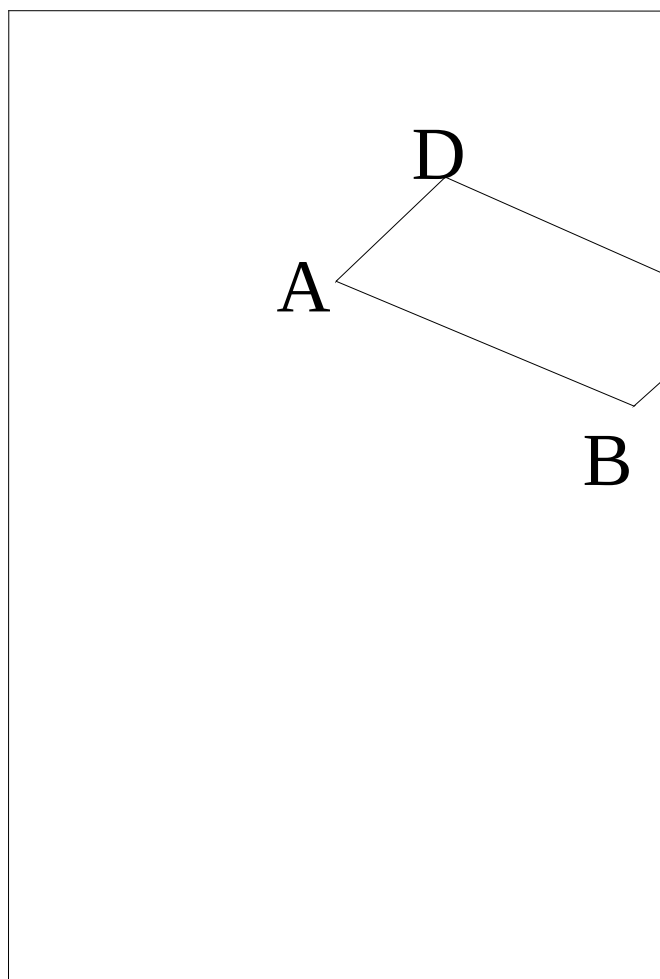
“conceitos de trigonometria aprendidos entre as Aulas 29 e 43”.

En d'autres termes, une partie essentielle du milieu est donnée par *y* à l'avance. | **Em outras palavras, uma parte essencial do meio é dada por *y* com antecedência.**

La situation est différente dans la problématique « moderne ». Exemple... | **A situação é diferente na problemática “moderna”. Exemplo...**

Question Q : *Comment tracer la diagonale $[AC]$ du parallélogramme $ABCD$? (Le point C est hors de la feuille.)* |

Questão Q: *Como traçar a diagonal $[AC]$ do paralelograma $ABCD$? (O ponto C está fora da folha.)*



Ici l'œuvre utile est ce théorème : *les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Mais ce théorème n'est pas connu des élèves à l'avance.* | **Aqui a obra útil é o seguinte teorema: as diagonais de um paralelograma bissectam-se. Mas este teorema não é conhecido pelos alunos com antecedência.**

Ils devront imaginer cette propriété (à mettre dans M) à partir de sa pertinence évidente et devront la regarder comme une *conjecture à démontrer*. | **Eles deverao imaginar essa propriedade (para colocar em M) a partir de sua óbvia relevância e deverao considerá-la como uma *conjectura por demonstrar*.**

Dans le cas précédent, ce qu'est une réponse R peut être précisé à l'aide d'un concept central en TAD, le concept de *praxéologie*. |

No caso anterior, o que é uma resposta R pode ser especificado utilizando um conceito central em TAD, o conceito de *praxeologia*.

Une praxeologie est une entité formée de quatre composantes. |

Uma praxeologia é uma entidade formada por quatro componentes

La première composante est un *type de tâches*, noté *T*. |

O primeiro componente é um tipo de tarefas, denotado por *T*.

Dans le cas du parallélogramme, *T* se formule ainsi : *tracer la diagonale [AC] du parallélogramme ABCD dont le point C est hors de la feuille.* |

No caso do paralelograma, *T* se formula assim: *traçar a diagonal [AC] de um paralelogramo ABCD cujo ponto C está fora da folha.*

La deuxième composante est une *technique*, notée par la lettre grecque τ (tau), un savoir-faire qui permet d'accomplir les tâches t du type T . |

O segundo componente é uma *técnica*, denotado por a letra grega τ (tau), um know-how que possibilita realizar as tarefas do tipo T .

Dans le cas du parallélogramme, τ peut se formuler ainsi : *construire le milieu I de la diagonale $[BD]$ et tracer la demi-droite $[AI)$.* |

No caso do paralelograma, τ pode formular-se assim: *construir o ponto médio da diagonal $[BD]$ e traçar a semirecta AI .*

La troisième composante est une *technologie*, notée par la lettre grecque θ (thêta), soit un discours sur la technique τ qui justifie cette technique. |

O terceiro componente é uma *tecnologia*, denotada por a letra grega θ (theta), isto é um “discurso” sobre a técnica τ que justifica esta técnica.

Dans le cas du parallélogramme, θ contient l'assertion clé $\theta^\heartsuit$: *les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.* |

No caso do paralelograma, θ contém a asserção chave $\theta^\heartsuit$: *as diagonais de um paralelogramo bissectam-se.*

La quatrième composante est une *théorie*, notée Θ (thêta), c'est-à-dire un discours sur la technologie θ qui vise à justifier cette technologie. |

O quarto componente é uma *teoria*, denotada por Θ (theta), isto é um discurso sobre a tecnologia θ que procura justifica esta tecnologia.

La composante théorique d'une praxéologie est fondamentale mais presque toujours difficile à expliciter car elle est en général cachée, « abstraite », morcelée. | **A componente teórica de uma praxeologia é fundamental, mas quase sempre difícil de explicitar porque é geralmente oculta, “abstrata”, fragmentada.**

En géométrie élémentaire, Θ contient par exemple cette « croyance » clé : les propriétés des figures ne dépendent pas de leur taille (« postulat de Wallis »). |

Na geometria elementar, Θ contém por exemplo esta chave “crença”: as propriedades das figuras não dependem de seu tamanho (“postulado de Wallis”).

Une praxéologie $\mathcal{P}$ est l'ensemble formé par ces quatre composantes et est notée $\mathcal{P} = [T / \tau / \theta / \Theta]$. ($\mathcal{P}$ est ici une praxéologie *ponctuelle*, formée autour du « point » T .) | **Uma praxeologia $\mathcal{P}$ é o conjunto formado por essas quatro componentes e é denotada por $\mathcal{P} = [T / \tau / \theta / \Theta]$. ($\mathcal{P}$ é aqui uma praxeologia *pontual*, em torno do “ponto” T .)**

Dans le cas du parallélogramme (où $R^\heartsuit \cong \mathcal{P}$), M ne contient pas $\theta^\heartsuit$ mais doit offrir des ressources idoines, tel un logiciel de géométrie pour vérifier $\theta^\heartsuit$.

| No caso do paralelograma (onde $R^\heartsuit \cong \mathcal{P}$) M , que não contém $\theta^\heartsuit$, deve oferecer recursos idôneos, tal como um software de geometria para comprovar $\theta^\heartsuit$.

La structure praxéologique de la réponse guide l'étude parce que toute étude doit présenter certains « moments » dédiés à des fonctions didactiques spécifiques. |

A estrutura praxeológica da resposta guia o estudo porque todo estudo deve conter certos “momentos” dedicados a funções didáticas específicas.

Une étude permettant d'arriver à $R^\heartsuit \cong \mathcal{P}$ comporte divers moments (de première rencontre, exploratoire, technologico-théorique, du travail de la technique, etc.) | **Um estudo que permite chegar a $R^\heartsuit \cong \mathcal{P}$ consta de varios momentos (do primeiro encontro, exploratório, tecnológico-teórico, do trabalho da técnica, etc.)**

Mais je ne développerai pas ce point
ici : pour plus d'informations, consultez
le livre écrit avec Marianna Bosch et
Josep Gascón... | **Não vou desenvolver
este ponto aqui: para mais
informações, consulte o livro escrito
com Marianna Bosch e Josep
Gascón...**

Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, ICE/Horsori, Barcelone, 1997 |

Estudar Matemáticas. O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem, Artmed Editora, Porto Alegre, 2001

Une organisation didactique comme celle qui guide l'étude du parallélogramme « tronqué » est appelée une « Activité d'étude et de recherche » (AER). | **Uma organização didática como aquela que guia o estudo do paralelograma “truncado” é chamada uma “Atividade de estudo e de pesquisa” (AEP).**

Un enseignement « par AER » donne aux élèves un *topos* plus significatif dans le processus d'étude. Pourtant, une telle forme d'enseignement pose plusieurs problèmes. | **Um ensino “por AEP” dá aos alunos um *tópos* mais significativo no processo de estudo. No entanto, essa forma de ensino acarreta vários problemas.**

Pour chaque œuvre O à étudier, y doit trouver une question Q susceptible de faire apparaître O comme un outil décisif pour construire la réponse $R^\heartsuit$. |

Para cada obra O para estudar, y deve encontrar uma questão Q suscetível de fazer aparecer O como uma ferramenta crítica para construir a resposta $R^\heartsuit$.

C'est chaque fois l'occasion de mettre en lumière une raison d'être de O, ce qui est une bonne chose. Mais il faut recommencer ce type de travail indéfiniment !

| Sempre é a oportunidade para destacar uma razão de ser de O, o que é uma coisa boa. Mas devemos indefinidamente repetir este tipo de trabalho!

Si y doit diriger l'étude des angles, il devra trouver une question pour l'œuvrette définie par les expressions « angle saillant » et « angle rentrant ». |

Se y deve dirigir o estudo da obra “Os ângulos”, deverá encontrar uma questão para a “obrita” definida por as expressões “ângulo saliente” e “ângulo entrante”.

C'est là un problème d'ingénierie didactique, et plus précisément d'*analyse praxéologique*, que je laisse ouvert volontairement... |

Esto é um problema de engenharia didática, e mais precisamente de análise praxeológica, que deixo aberto voluntariamente...

Pour dépasser ces difficultés, une autre voie a été explorée : au lieu d'étudier des questions isolées (comme la question de la tour)... | **Para superar estas dificuldades, outro caminho foi explorado: em vez de estudar questões isoladas (como a questão da torre)...**

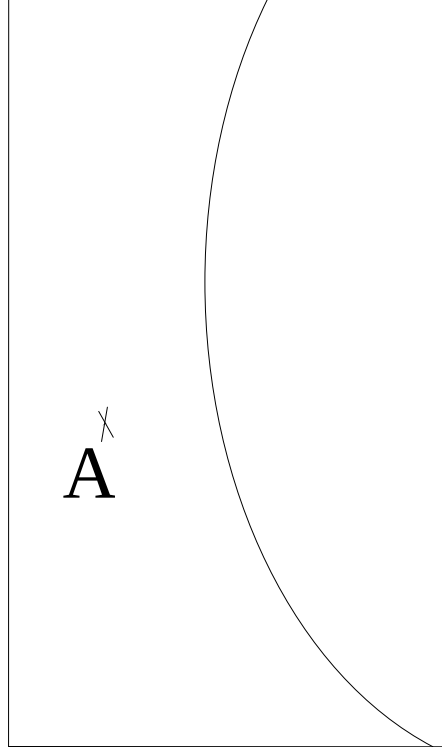
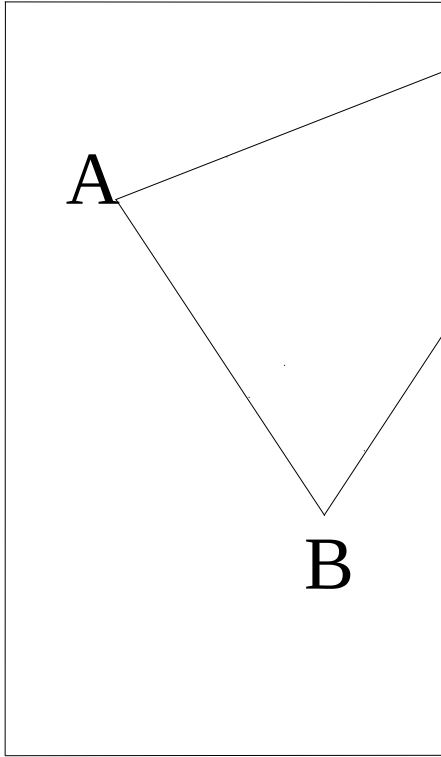
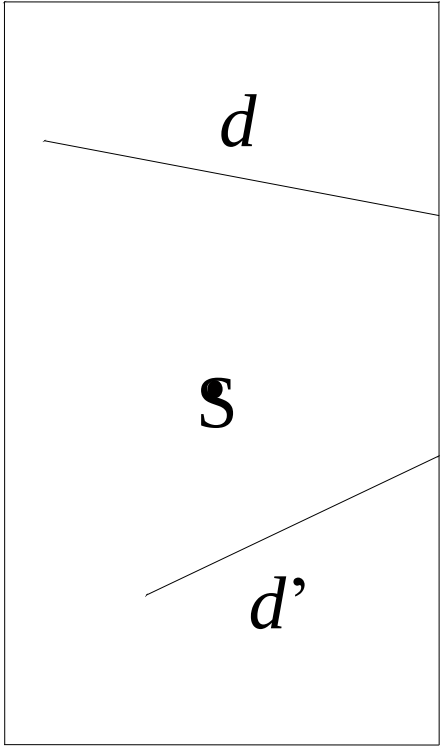
... étudier un ensemble $\mathcal{Q}$ de questions connexes entre elles, comme par exemple les problèmes (classiques) de distances inaccessibles ($\mathcal{Q}_0$). |

... estudar um conjunto $\mathcal{Q}$ de questões conexas entre si, como por exemplo os problemas (clássicos) de distâncias inacessíveis ($\mathcal{Q}_0$).

D'autres questions relèvent d'un même *schéma de questions*, comme les problèmes de constructions graphiques "impossibles" ($\mathbb{Q}_1$)... | **Outras questões pertencem ao mesmo *esquema de questões*: os problemas de construções gráficas "impossíveis" ($\mathbb{Q}_1$)...**

... tel le problème du parallélogramme tronqué ou comme les problèmes suggérés par les figures énoncés ci-dessous : |

... como o problema do paralelograma truncado ou como os problemas sugeridos por as figuras abaixo



Dans ce cas, le schéma herbartien s'écrit
 $[S(X ; Y ; \mathcal{Q}) \rightharpoonup \mathfrak{M}] \hookrightarrow \mathcal{R}^\heartsuit$, avec $\mathcal{Q} =$
 $\{ Q_1, Q_2, Q_3, \dots \}$ et $\mathcal{R}^\heartsuit = \{ R_1^\heartsuit, R_1^\heartsuit, R_2^\heartsuit,$
 $R_3^\heartsuit, \dots \}$. |

**Neste caso, o esquema herbartiano se
 escreve $[S(X ; Y ; \mathcal{Q}) \rightharpoonup \mathfrak{M}] \hookrightarrow \mathcal{R}^\heartsuit$, com
 $\mathcal{Q} = \{ Q_1, Q_2, Q_3, \dots \}$ e $\mathcal{R}^\heartsuit = \{ R_1^\heartsuit, R_1^\heartsuit,$
 $R_2^\heartsuit, R_3^\heartsuit, \dots \}$.**

L'ensemble $\mathcal{G} = \mathfrak{M} \cup \{ R_1^\heartsuit, R_2^\heartsuit, R_3^\heartsuit, \dots \}$
 est dit *engendré* par l'étude de $\mathcal{Q}$. Si $\mathcal{Q} =$
 $\mathcal{Q}_0$ ou $\mathcal{Q}_1$, on peut montrer que $\mathcal{G}$ contient
 tous les outils classiques de la géométrie
 élémentaire. | **O conjunto $\mathcal{G} =$**
 $\mathfrak{M} \cup \{ R_1^\heartsuit, R_2^\heartsuit, R_3^\heartsuit, \dots \}$ é dito *gerado*
por o estudo de $\mathcal{Q}$. Se $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0$ ou $\mathcal{Q}_1$, se
pode mostrar que $\mathcal{G}$ contém todas as
ferramentas da geometria elementar.

La problématique générale de l'organisation de l'étude mentionnée jusqu'ici peut être formulée ainsi : |

A problemática geral da organização do estudo mencionada até agora pode ser formulada assim:

étant donné une œuvre O (ou un ensemble d'œuvres $\mathcal{O}$), trouver et faire étudier une question Q (ou un ensemble de questions $\mathcal{Q}$) qui engendre O (ou $\mathcal{O}$). |

dada uma obra O (ou um conjunto de obras $\mathcal{O}$), encontrar e fazer estudar uma questão Q (ou um conjunto de questões $\mathcal{Q}$) que gere O (ou $\mathcal{O}$).

Une organisation didactique comme celle qui devrait guider l'étude de Q_0 ou Q_1 est appelée un « Parcours d'étude et de recherche » (PER). | **Uma organização didática como aquela que deveria guiar o estudo de Q_0 ou Q_1 é chamada uma “Percurso de estudo e de pesquisa” (PEP).**

Dans la problématique classique (et moderne), les œuvres déterminent le processus d'étude : les questions jouent un rôle secondaire. |

Nesta problemática clássica (e “moderna”), as obras determinan o processo de estudo: as questões desempenham um papel secundário.

La TAD a conduit à considérer une nouvelle rupture, dans laquelle œuvres et questions échangent leur rôle et où les questions ont le rôle directeur. |

A TAD levou a considerar uma nova ruptura, onde obras e questões trocam seus papéis e onde questões têm liderança.

Après le *paradigme de la visite des œuvres*, nous entrons ainsi dans un nouveau paradigme : le *paradigme du questionnement du monde*. |

**Após o *paradigma da visita das obras*,
então entramos em outro paradigma:
o *paradigma do questionamento do mundo*.**

Dans ce paradigme, un professeur n'est pas jugé sur la liste des œuvres rencontrées et étudiées dans sa classe mais sur la liste des questions étudiées |

Neste paradigma, um professor não é julgado pela lista das obras encontradas e estudadas na sua classe mas pela lista das questões estudadas.

Cette ruptura, où une œuvre est un moyen et non une fin, pourrait provoquer le plus grand changement depuis des siècles dans le rapport à la connaissance et à l'ignorance. |

Esta ruptura, onde uma obra é um meio, não um fim, poderia causar a maior mudança durante séculos na relação ao conhecer e ao ignorar.

Ce nouveau rapport est certainement plus approprié aux besoins cognitifs de la masse des gens. Mais cela ne suffit pas et une autre rupture est aujourd'hui nécessaire. | **Esta nova relação é certamente mais apropriada para as necessidades cognitivas da massa das pessoas. Mas isso não é suficiente e outra ruptura é hoje necessária.**

Ce changement affecte le milieu M dans le schéma herbartien semi-développé :

$$[S(X ; y ; Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^\heartsuit. |$$

Essa mudança afeta o meio M no esquema herbartiano semidesenvolvido:

$$[S(X ; y ; Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^\heartsuit.$$

Si nous « développons » M , ceci apparaît :

$$M = \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \} \mid$$

Se “desenvolvemos” M aparece isso:

$$\mathbf{M = \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \}}$$

Quand nous remplaçons M par son expression développée, nous obtenons le *schéma herbartien développé*.

$$[S(X ; y ; Q) \leadsto \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \}] \hookrightarrow R^\heartsuit.$$

Quando substituímos M por sua expressão desenvolvida, obtemos o *esquema herbartiano desenvolvido*.

$$[S(X ; y ; Q) \leadsto \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \}] \hookrightarrow R^\heartsuit.$$

Le milieu M contient des œuvres O_{n+1} ,
..., O_m comme nous l'avons vu déjà ;
mais il contient encore des réponses $R_1^\diamond$,
 $R_2^\diamond$, ..., $R_n^\diamond$ rencontrées « dans la
culture ». | **O meio M contém obras**
 O_{n+1} , ..., O_m como já vimos; mas
também contém respostas $R_1^\diamond$, $R_2^\diamond$, ..., à
questão Q encontradas “en la
cultura”.

Ceci est un changement fondamental
que nous discuterons maintenant... |

**Esta é uma mudança fundamental
que iremos discutir agora...**

