

Quel avenir pour les mathématiques au collège et au lycée ?

Les mathématiques dans la cité

Yves Chevallard

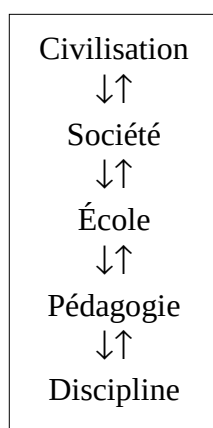
UMR P3 ADEF

1. Conditions et contraintes de l'enseignement

Le point de vue que je vais présenter sur le problème qu'énonce le titre de cet exposé est celui que l'on peut prendre depuis ce qu'on appelle la *théorie anthropologique du didactique*.

Un des aspects clés de ce point de vue est que, pour comprendre ce qui se passe dans l'enseignement des mathématiques – par exemple –, pour comprendre ce qui se passe dans une classe de mathématiques, au collège ou au lycée, il faut prendre en compte des *contraintes* et analyser des *conditions* qui viennent, si l'on peut dire, de très loin – en particulier, d'au-delà de la classe.

Plus précisément, un modèle simple de ce complexe de conditions et de contraintes constitue un outil crucial pour se déprendre d'un certain localisme institutionnel qu'on pourrait formuler ainsi : « ce qui advient dans la classe procède de facteurs qui “sont” dans la classe – la classe s'explique par la classe. » Voici donc ce modèle, qu'on nomme *échelle des niveaux de codétermination didactique*.



Ce qu'il faut entendre, c'est qu'il existe des contraintes (c'est-à-dire des conditions qui apparaissent *non modifiables*) et qu'on peut créer des conditions (c'est-à-dire des contraintes *modifiables*) en chacun des niveaux de la civilisation, de la société, de l'école, de la pédagogie et de la discipline. Ces conditions et contraintes de divers niveaux codéterminent *le* didactique, c'est-à-dire, en gros, ce que le professeur peut faire pour aider l'élève à étudier la discipline et ce que peut faire l'élève pour s'aider lui-même (et pour aider ses camarades d'étude et le professeur lui-même).

On aura compris que je me réfère ici à ce que je regarderai durant cet exposé comme une *contrainte* – du niveau de la *pédagogie* –, à savoir l'organisation scolaire aujourd'hui encore usuelle de l'étude d'une discipline : un groupe (à peu près) stable d'élèves, un professeur unique et (à peu près) permanent.

Le problème que j'examinerai si peu que ce soit est le suivant : que peut-on penser du devenir, au cours des prochaines décennies, de la discipline *mathématique* dans l'enseignement secondaire français ?

2. Les disciplines scolaires, elles aussi, sont mortelles

La discipline mathématique pourrait-elle disparaître de l'école ? (J'entends par école, ici, l'école secondaire générale, c'est-à-dire non spécialisée, généraliste.) Je me contenterai d'abord de noter que, au fil du temps, des disciplines ont disparu corps et biens ou se sont réduites à presque rien.

Du second cas de figure, l'enseignement du latin et du grec (ancien) est sans doute, pour nous, le meilleur exemple. Le tableau ci-après donne un état numérique de ces enseignements à la rentrée 2007 (http://media.education.gouv.fr/file/2008/72/3/chap4-18_33723.pdf) : en dépit des militants des langues anciennes, il s'agit là d'enseignements aujourd'hui *résiduels*.

[3] Répartition des élèves selon le nombre de langues anciennes étudiées à la rentrée 2007
(France métropolitaine + DOM, Public + Privé, y compris EREA)

	Effectif total de la classe	Nombre de langues anciennes étudiées				%
		Une seule		Les deux	Ensemble	
		Latin	Grec	Latin + Grec	Effectif	
Cinquième	763 647	172 648	-	-	172 648	22,6
Quatrième	754 611	145 651	-	-	145 651	19,3
Troisième	757 274	116 820	13 055	5 592	135 467	17,9
Total cinquième à troisième	2 275 532	435 119	13 055	5 592	453 766	19,9
Seconde générale et technologique	513 344	28 709	6 563	1 370	36 642	7,1
Première générale et technologique	480 637	20 340	4 095	932	25 367	5,3
Terminale générale et technologique	476 051	17 264	3 473	786	21 523	4,5
Première et terminale S	330 706	24 016	4 746	759	29 521	8,9
Première et terminale L	108 871	7 901	1 823	888	10 612	9,7
Première et terminale ES	196 505	5 687	999	71	6 757	3,4
Total second cycle général et technologique	1 470 032	66 313	14 131	3 088	83 532	5,7
Total Public + Privé	3 745 564	501 432	27 186	8 680	537 298	14,3

Les élèves du second degré] Repères et références statistiques - édition 2008 | 127

On sait, bien sûr, que l'étude du latin fut longtemps non seulement la base, mais *l'essentiel* de la formation « secondaire ». Dans un ouvrage intitulé *Du collège du lycée (1500-1850)*, paru chez Gallimard/Julliard en 1985, Marie-Madeleine Compère écrivait à ce propos :

Entre 1680 et 1830, la grande majorité des collégiens a fait toute sa scolarité dans les classes régies par un titulaire unique dont la seule formation était littéraire. Ils y ont passé le plus clair de leur temps à apprendre le latin. Le français n'a pas fait suffisamment de progrès pour quitter sa place de second. (p. 193)

Le contraste est saisissant ! Voici un extrait d'un courrier du 10 octobre 2007 aux professeurs de lettres classiques de leur académie par les IPR de cette discipline de l'académie de Grenoble (<http://helios.fltr.ucl.ac.be/Lettre%20d%27informationLC07vDEF3.pdf>).

L'isolement est une situation inconfortable, que connaissent bien les enseignants des disciplines dont l'horaire est réduit (Education musicale ou Arts plastiques par exemple), ou les effectifs peu nombreux (certaines langues vivantes) ; Les professeurs de lettres classiques connaissent cette solitude, en tout cas pour une partie de leur enseignement.

Quelles solutions « dépendent de nous » ? Pourquoi ne pas nouer des relations étroites entre enseignants de lettres classiques d'un même bassin ? Vous pouvez demander un stage de bassin ; il y a toute chance pour qu'il soit accepté. Mais la demande ne peut venir que de vous ! La démarche à suivre ? Demandez à votre chef d'établissement de...

Solitude des disciplines mourantes ! Imaginons un instant que ce soit là le sort qui attende les professeurs de mathématiques dans vingt ans... Sauf exception, un professeur, lauréat de l'agrégation de lettres classiques en 1965, alors que cette discipline tient encore le haut du pavé, qui pensait s'inscrire paisiblement dans la lignée de ses maîtres en latin et grec, termine sa carrière en 2002 en n'enseignant plus le grec depuis belle lurette, et en n'ayant enseigné que très peu de latin depuis une décennie et plus !

L'histoire scolaire de la *rhétorique* est plus frappante encore. Cette discipline est au cœur de la culture lettrée depuis la plus haute antiquité. Or, dans sa forme classique longtemps maintenue, elle disparaît avec la réforme de 1885 : la *dissertation* écrite supplante définitivement l'exercice immémorial du *discours* (latin puis français) de l'ancienne rhétorique, remplacée alors par l'histoire des littératures anciennes et française – la classe appelée jusque-là « de rhétorique » devenant à cette date classe de première.

Je soulignerai à cet égard deux points, en donnant chaque fois la parole à l'auteure déjà citée. Le premier point a trait au retard qui affecte la disparition de la rhétorique.

... pourquoi avoir tant tardé à remplacer par une autre une rhétorique périmée ? Les conditions dans lesquelles les nouvelles normes ont été introduites ont conforté, à notre avis, l'inertie de la machine scolaire. Tolérées comme des concessions à l'esprit du siècle, en marge de l'enseignement officiel, elles ont faussement été identifiées comme les fruits aléatoires et personnels de la parole du professeur. Ainsi plus l'ancienne rhétorique s'est maintenue, plus la nouvelle a été contrainte de s'en démarquer. Pour se débarrasser de l'étiquette scolaire, elle a abandonné jusqu'à son nom et, avançant ainsi masquée, elle a abusé jusqu'à ses protagonistes. Mais en même temps, elle a suscité les hésitations des pédagogues qui, à tous les niveaux, cherchaient à mettre cette mutation en œuvre : ils lâchaient la proie d'une discipline qui avait fait

ses preuves pendant des siècles pour l'ombre de pratiques informelles et les incertitudes d'un traitement subjectif de la littérature. (p. 213)

Il s'agit là d'une difficulté que nous pourrions retrouver avec les mathématiques dans la première moitié du XXI^e siècle : une discipline ancienne ne parvient pas à mourir, la discipline nouvelle n'arrive pas à naître.

Le second point s'inscrit en fait dans la perspective des remarques précédentes.

Quand elle est reconnue officiellement à son tour, la nouvelle rhétorique garde de son passé et le silence infamant sur son propre nom et la méfiance à l'égard de toutes les expositions claires et rationnelles qui pourraient « sentir le collège ». À preuve le laconisme des manuels qui se donnent comme guides dans l'art de la dissertation par rapport à la luxuriance détaillée des défunctes figures du discours. [...] Dès son inauguration, le manuel de dissertation se refuse à développer aucun appareil théorique et technique. Il se présente plus volontiers comme une suite d'exercices exemplaires. Le rôle le plus important revient en fait au professeur, sorte de mystagogue détenteur des secrets du métier. (pp. 214-215)

Mystagogue : celui qui initie au mystères... On aura peut-être reconnu, en ces lignes, une évolution qui semble se dessiner entre un ancien enseignement mathématique et un autre, porté à la vie par une grossesse de durée apparemment indéfinie, où le professeur semble être le seul maître d'une discipline qui demeure obscure dans ses fins comme dans ses moyens. La suite du texte cité jusqu'ici le confirmera.

Et l'élève dans tout cela ? A-t-il tant gagné à troquer contre le plat discours une dissertation aussi ésotérique ? Ce dernier exercice bénéficie un peu des mêmes préjugés illusoires que jadis le français introduit à côté du latin : sa maîtrise était supposée aussi naturelle que ne l'est ici l'aptitude à fonder un jugement littéraire. Pourtant rien n'est plus dangereux que l'implicite en matière scolaire. Quand une discipline prétend s'abstraire des règles communes, quand elle dissimule ses procédures, ceux qui déjouent le mieux ses pièges ont mis à profit leurs acquisitions extrascolaires. Par son mode d'introduction et d'enseignement, la nouvelle rhétorique, symbolisée par la dissertation, porte en germe plus d'inégalités que l'ancienne. (p. 215)

Les disciplines sont mortelles, mais leur fin de vie est souvent inutilement prolongée, tandis que la discipline nouvelle tarde à se dessiner : telle est la leçon que l'on peut tirer de cet exemple presque pur.

3. Une discipline comme une autre ?

L'un des grands problèmes de l'enseignement secondaire tient en ceci que la formation, formelle mais surtout informelle, des professeurs de chaque discipline enseignée leur a inculqué, non pas un regard lucide sur ce qu'ils nomment abusivement « leur » discipline, non pas une capacité de distanciation critique à son endroit, mais une adhésion passionnée, inconditionnelle, jalouse à une réalité qui, manifestement, dépasse cette discipline elle-même – et qui, en particulier, dépasse le simple « corporatisme ».

C'est d'abord là-dessus qu'il nous faut aujourd'hui revenir, pour déconstruire le chauvinisme épistémologique qui constitue l'un des plus redoutables obstacles à une *réception culturelle effective et paisible* des disciplines enseignées.

L'une des conséquences délétères de l'état de choses régnant est celle-ci : au secondaire, on n'enseigne une discipline que pour, du même mouvement, *en interdire l'usage* à qui ne l'enseigne pas. Vous avez appris, comme élève, de la biologie, de l'histoire, de l'anglais, mais vous devez vous interdire de vous en servir « en public » : seuls le « biologiste », « l'historien », « l'angliciste », respectivement, sont autorisés à le faire. Outrepassez cet interdit et vous toucherez du doigt ce que je nommerai *l'effet Zébulon* : car aussitôt surgira un « biologiste », un « historien », un « angliciste » qui vous rappellera les titres de propriété de sa corporation et votre propre impropiété !

Les territoires disciplinaires sont disjoints ; parler si peu ce que soit de tel objet tombant, selon la cartographie des savoirs scolaires, dans une zone attribuée à une autre discipline ne saurait se faire qu'en cachette – à moins qu'un « contrôleur » de l'autre discipline ne soit présent pour vérifier et garantir votre quasi-orthodoxie. Le co-disciplinaire reste ainsi ordinairement proscrit : les disciplines scolaires « appartiennent » à leur desservants, et ne doivent pas être mêlées, car, en un tel mélange, des mains impures – c'est-à-dire non purifiées par l'appartenance à la profession idoine – pourraient profaner les objets sacrés du culte.

Pour devenir lucide, réaliste, juste – sinon efficace – dans sa gestion de l'avenir, il faut aujourd'hui que notre profession apprenne à regarder la discipline mathématique comme une discipline à *l'instar des autres*, mortelle comme les autres, et en butte à de semblables avanies.

J'illustrerai d'abord brièvement l'effort qui nous est demandé à propos d'un tout autre « objet » de vénération que les mathématiques, encore qu'un lien historique bien connu coure de l'un à l'autre : je veux parler de la Grèce antique. Dans un livre paru en 1954, réédité en 1996 par les éditions Complexe (Bruxelles), et intitulé *Civilisation grecque. De l'Iliade au Parthénon*, l'helléniste André Bonnard inaugure son récit par ce portrait abrupt et, pour certains lecteurs sans doute, désenchanté.

Le peuple grec a été, en son temps, un peuple comme les autres. Il a connu, durant des siècles, le lent piétinement de la vie primitive, qui débouche, ou ne débouche pas, dans la civilisation.

Bien plus. Tout au long de son histoire et jusque dans le temps de la floraison éblouissante et multipliée de ses chefs-d'œuvre, au siècle de Sophocle, d'Hippocrate et du Parthénon, le peuple grec, y compris ce cœur vif et brûlant de la Grèce, cette « Hellade de l'Hellade » qu'est Athènes, n'a cessé d'entretenir et de cultiver des superstitions et des mœurs si étranges, si « polynésiennes », tantôt simplement grotesques, tantôt d'une atroce cruauté qu'on se croit à mille lieues de toute civilisation.

Paradoxe vivant, la Grèce antique illustre l'étonnante complexité de la notion de civilisation et l'extrême difficulté qu'eurent les hommes primitifs à s'arracher à la cécité de l'animalité pour ouvrir sur le monde un regard d'homme. (p. 7)

À l'appui de son dire, Bonnard cite plusieurs exemples de pratiques qui nous sont devenus entièrement étrangères – du moins peut-on l'espérer. J'en retiendrai une seule, que voici. La bataille de Salamine, à laquelle Bonnard se réfère, opposa en 480 av. J.-C. la flotte grecque menée par Eurybiade et Thémistocle à la flotte perse de Xerxès I^{er} (voir l'article « Bataille de Salamine » de l'encyclopédie Wikipédia).

Le matin même de Salamine, cette bataille où les Athéniens « se collant à la liberté », comme dit Hérodote, sauvèrent l'indépendance des peuples grecs, le général en chef Thémistocle, pour fixer en faveur des siens les chances du combat, offrit en sacrifice, sur le vaisseau amiral et en présence de toute la flotte, à Dionysos Mangeur-de-chair-crue, trois victimes humaines. C'étaient trois prisonniers d'une grande beauté, magnifiquement vêtus et couverts de bijoux d'or, les propres neveux du Grand Roi. Le général les égorgea de sa propre main. Ce n'était pas là un acte de représailles, mais une consécration. (p. 9)

L'auteur conclut ainsi.

On citerait bien d'autres faits du même genre et qui ne sont pas seulement au sein de la civilisation antique des survivances isolées de l'état primitif antérieur. Certaines pratiques qui nous paraissent de bizarres aberrations de sauvages sont liées étroitement à la structure fondamentale de la société. Leur permanence à travers deux millénaires, leur caractère incontesté, la bonne conscience qu'elles tiennent de la loi écrite ou du droit coutumier, la justification qu'en donnent les philosophes en disent l'importance. Cet ouvrage y reviendra, car leur entêtement à ne pas disparaître n'est pas sans expliquer, partiellement du moins, l'échec final de la civilisation grecque. (p. 9)

Ce grand exemple doit surtout nous donner à penser à propos de l'avenir de l'enseignement des mathématiques, qu'il nous faut regarder comme un enseignement *comme les autres*, dépouillé de ces privilèges – ancienneté, noblesse intellectuelle, valeur formatrice, etc. – que nous nous plaçons à lui attribuer.

4. Un enseignement laïque : non pas faire aimer, mais s'adresser au désir

Je voudrais souligner ici, tout particulièrement, un point qui en surprendra plus d'un. Il est devenu banal chez les professeurs de dire que leur mission la plus essentielle serait de « faire aimer » à leurs élèves la matière qu'ils enseignent. S'ils y réussissaient, les élèves deviendraient, sinon des puits de science, du moins des puits d'amour – ayant à aimer les mathématiques, la géographie, la grammaire du français, celle de l'anglais ou de l'allemand, la biologie, le solfège, la chimie, l'instruction civique, etc. Or l'ambition ainsi proclamée n'est pas seulement promise à un échec éclatant, comme chacun le sait. Elle est fondamentalement *illégitime*, du moins dans la problématique qui est censée être la nôtre : celle d'une République *laïque*.

La laïcité interdit en effet tout enseignement qui viserait à manipuler les *sentiments* de quiconque. Elle proscriit la *volonté* d'emprise sur la liberté de conscience, en quelque matière que ce soit. Ce que l'École de la République demande aux élèves, c'est de *connaître*, non d'aimer ou de détester, ceci et cela. Dans un enseignement consacré au religieux, on pourra éventuellement demander aux élèves de savoir expliquer ce qui, dans la théologie catholique, distingue la *grâce* du *miracle*, mais on ne leur demandera pas de *croire* à la grâce ou aux miracles – non plus bien sûr que de s'avouer catholique ou de se défendre de l'être.

Ce n'est pas que l'on n'ait pas de sentiments – chacun en a. Mais c'est que ces sentiments ne sauraient être *l'objet*, *la fin de l'instruction*. On ne demande pas à l'élève d'aimer ou de détester l'histoire ou les mathématiques mais de savoir additionner des fractions (de façon justifiée) ou de pouvoir expliquer (par exemple) la situation militaire à la veille de la bataille du Chemin des Dames. Le professeur n'a pas à faire aimer ou détester mais à faire connaître, ce qui est un rien plus difficile !

Notons que le professeur lui-même n'a pas à être interrogé – par quiconque – sur ses propres sentiments. Aime-t-il ceci, déteste-t-il cela ? Cela lui appartient et n'appartient qu'à lui. Ce qui lui est demandé est de savoir faire connaître aux élèves les mathématiques qu'il a mission de leur enseigner. Ses sentiments – *les positifs aussi bien que les négatifs* – peuvent certes, en quelques cas, amoindrir sa capacité à enseigner ; mais c'est sur celle-ci seulement que l'on doit lui demander des comptes. Le reste lui appartient en propre.

Le mot *laos*, d'où procèdent l'adjectif *laïc* et le substantif *laïcité* désigne en grec ancien, non pas le *demos*, réduit à la communauté politique ayant droit de cité, non pas l'*ethnos*, défini par l'origine supposée commune, mais l'ensemble des « gens », sans exclusive : la laïcité est inclusive, elle n'écarte pas tel ou tel parce que ses croyances et ses sentiments ne seraient pas conformes à une certaine orthodoxie. Parler de « mathématiques pour tous », comme on le fit jadis, ce n'est pas évoquer un état où chacun serait *épris* de mathématiques mais un mouvement institutionnel qui n'écarterait *a priori* personne de la connaissance mathématique.

Bien entendu, d'aucuns croiront répliquer habilement en demandant au nom de quoi on étudierait tel savoir si ce n'est pas parce qu'on aime ce savoir ! Il y a là un paralogisme qui devient, en ce point, sophisme. Pourquoi acheter une maison si ce n'est parce qu'on aime les maisons ? Pourquoi manger si ce n'est parce qu'on aime manger ? Pourquoi prendre des médicaments si ce n'est parce qu'on aime les médicaments ? Pourquoi dormir si ce n'est parce qu'on aime dormir ? Pourquoi faire appel à un plombier si ce n'est parce qu'on aime les plombiers ? Nous sommes là à un point tournant de notre réflexion.

À la notion d'*amour* – aujourd'hui, il est vrai, ubiquitaire –, il nous faut en effet substituer une autre notion : celle de *désir*. Ce n'est pas parce que le plombier aime la plomberie qu'il est *socialement désirable*, mais bien parce qu'il est capable de réparer le robinet qui fuit. Qu'il aime effectuer une telle intervention ou ne goûte guère la chose ne regarde que lui, tant que ses sentiments ne se concrétisent pas en un travail *bousillé*. Le serrurier appelé à l'improviste parce que l'on se trouve à la porte de chez soi n'est pas désirable parce qu'il *aime* ouvrir les serrures mais bien parce qu'il *sait* le faire.

Je peux ne pas éprouver *a priori* de sentiments positifs à l'endroit de tel savoir tout en étant vivement désireux de l'étudier, et cela pour de tout autres raisons, non égotistes mais au contraire éminemment partageables. Albert Einstein étudia le calcul tensoriel dans le livre de Gregorio Ricci-Curbastro et Tullio Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (paru en 1900), non parce qu'il aimait la chose, mais parce que c'était là l'outil désirable pour construire la théorie de la relativité générale. Au reste, il commit dans son utilisation des erreurs que Levi-Civita releva. Dans la correspondance qui s'ensuivit, Einstein écrivait : "I admire the elegance of your method of computation; it must be nice to ride through these fields upon the horse of true mathematics while the like of us have to make our way laboriously on foot." Il admirait cette élégance, mais ne la désirait pas suffisamment, peut-on penser, pour faire autre chose, quant à lui, que l'admirer.

Un professeur de mathématiques n'est pas socialement désirable parce qu'il aimerait les mathématiques mais parce qu'il est (supposé) capable d'enseigner des mathématiques. Et cela parce que d'aucuns trouvent socialement désirables que les mathématiques soient enseignées. Mais pourquoi en serait-il ainsi ?

5. Désir d'étudier et pannes du désir

Qu'est-ce qui fait que l'enseignement – et l'étude – d'une discipline soit socialement désirable ? Une discipline, il est vrai, peut être à la mode dans un certain public à une certaine époque pour des raisons de désirabilité *culturelle* : il peut être chic, il peut même être enivrant d'étudier telle ou telle matière. Ainsi fut-il autrefois excitant, voire surclassant, d'étudier la psychanalyse lacanienne. Cela joue sans doute, mais il s'agit là, je crois, d'un épiphénomène – d'un phénomène *utile*, qu'il faut essayer de comprendre pour en exploiter les vertus, mais d'un indice plutôt que d'une cause.

Nous sommes rendus ainsi à la limite d'une autre sorte de désirabilité à l'endroit des disciplines véritablement enseignées au secondaire, qui vise à utiliser certaines d'entre elles pour se frayer un chemin voulu scolairement habile, indépendamment de toute désirabilité « épistémologique ». Cette désirabilité *scolaire* a été facilitée par la prolifération des options, instituées au nom de la différenciation « personnalisée » des parcours scolaires. Mais on voit que cela ne saurait véritablement suffire à assurer la promotion d'une matière, qui n'obtient par là qu'une place souvent très minoritaire. Ainsi, pour les « élèves du second degré », l'édition 2008 des *Repères et références statistiques sur les enseignements, la formation et la recherche* (http://media.education.gouv.fr/file/2008/13/0/RERS-2008_34130.pdf) indique-t-elle ceci.

L'anglais est étudié par 5 000 000 d'élèves, soit 93 % de ceux qui étudient une première langue vivante. Il est davantage choisi dans les établissements privés (95 %) que dans les établissements publics (93 %). Sa prédominance déjà importante se renforce encore en 2007. L'allemand est choisi par moins de 8 % des élèves ; les autres premières langues concernent moins de deux élèves sur cent. (p. 123)

Bien entendu, une langue peut se faire une place comme deuxième (voire troisième) langue vivante : c'est le cas de l'espagnol, qui « attire » quelque 70 % des élèves à ce titre, l'allemand n'arrivant qu'à 15 % environ, comme le précise le document déjà cité.

Le bilan de l'apprentissage des langues vivantes dans le second degré montre que, quelle que soit la place qu'elles occupent dans le choix des élèves (première, deuxième ou troisième langue), l'anglais est enseigné à 97 % des élèves, l'espagnol à 40 %, l'allemand à 15 %, l'italien venant ensuite loin derrière (4 %). On notera qu'en 2007 l'étude de l'allemand, qui ne cessait de baisser depuis plusieurs années, s'est stabilisée. (p. 123)

Il n'est guère facile de distinguer le désir « instrumental scolaire » du désir appelé plus haut « épistémologique » mais que je nommerai maintenant *praxéologique*, c'est-à-dire le désir d'une discipline (et des savoirs qui lui sont soumis) en tant que moyens de *comprendre* certains types de situations du monde (c'est le *logos* qui est dans « praxéologie ») et d'*agir* en leur sein (c'est la *praxis* à laquelle renvoie la première partie du mot).

C'est un désir praxéologique qui porte ainsi Einstein vers le calcul tensoriel. D'une manière générale, c'est la volonté de réaliser un certain projet Π qui porte un collectif X à « désirer praxéologiquement » une discipline Δ . Cette problématique est évidemment très large : je peux désirer apprendre tel jeu de société parce qu'il m'apparaît comme une condition *sine qua non* de mon entrée dans une certaine société dont je souhaite ardemment devenir membre. Le désir praxéologique s'articule à des projets *quelconques*, que l'on pourra juger nobles, ou bas, ou simplement futiles, ou carrément ignobles !

Ce qui nous importe ici, au plus large, ce sont les disciplines qui pourraient être l'objet d'un désir praxéologique *large*, non pas unanime, certes, mais assez fortement majoritaire – et cela même si ce désir est motivé par des projets personnels ou collectifs *divers*.

Avant d'aller plus loin, je voudrais donner un exemple. Longtemps, dans notre société, le *dessin* fut l'objet d'un vif désir praxéologique de la part du public populaire, parce qu'il apparaissait comme la clé d'un grand nombre de métiers de l'artisanat. Dans le bilan, établi en février 1800, des « écoles centrales » départementales, qui précédèrent les lycées napoléoniens (créés en 1802) et qui proposaient des enseignements « à la carte », on pouvait lire ceci (d'après Dominique Julia, *Les trois couleurs du tableau noir. La Révolution*, Belin, 1981).

Le cours de dessin se trouve le premier ; il est le plus fréquenté de tous. Un grand nombre d'écoles comptent 100, 200, et même 300 élèves ; celle de l'Hérault en a 348. La durée de ce cours est et doit être indéfinie.

Il est séparé de la chaîne des études ; la plupart des élèves qui le suivent sont des fils d'artisans qui commencent ainsi leur état d'orfèvre, d'architecte et de menuisier, quelques-uns de peintre, et qui n'ont l'intention de faire aucune autre espèce d'études dans les écoles centrales... (p. 279)

Le même bilan nous renseigne sur l'attractivité du cours de mathématiques.

Après le cours de dessin, c'est celui qui offre les résultats les plus satisfaisants. On s'y ressent, dans les départements les plus éloignés, de l'influence de l'École polytechnique établie à Paris, et cet exemple peut faire juger du bon effet que produiraient de semblables établissements pour les sciences morales, ou pour les lettres. L'enseignement des mathématiques dure presque partout deux ans à 8 leçons par décade... (p. 280)

En 1801, avant la création des lycées, une réforme des écoles centrales avait été préparée qui n'eut pas d'application. À propos du nouveau plan d'études élaboré sous l'influence de Destutt de Tracy (1754-1836), Dominique Julia note ceci.

Le cours de dessin en revanche a cessé d'être considéré comme la base d'acquisition des connaissances. Il est désormais relégué au rôle de « délassement » accessoire. Cette conception est parfaitement cohérente avec la fonction de ségrégation sociale dévolue aux écoles centrales par Destutt de Tracy le cours de dessin était en effet, en raison de ses applications pratiques, le plus « populaire » des enseignements dispensés au double sens du terme : il attirait le plus grand nombre d'élèves, et parmi eux une clientèle issue des milieux de l'artisanat. (pp. 277-279)

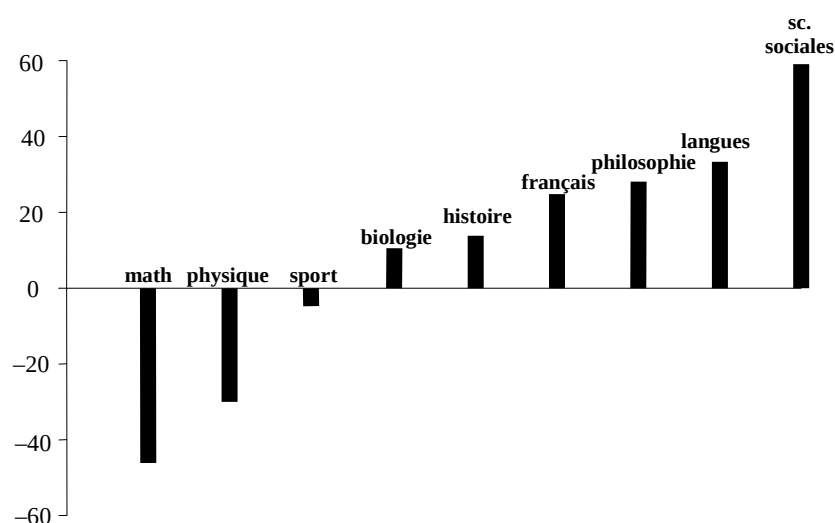
Ici, on retire des disciplines enseignées l'une d'elles parce que le désir praxéologique dont elle fait l'objet provient d'un public que l'on veut écarter. À propos des mathématiques, Napoléon

lui-même dira dans le *Manuel du chef* (composé d'aphorismes choisis par Jules Bertaut, 1917) :

Vous vous rappelez que mon désir est que l'École polytechnique coûte peu. Il est dangereux pour des Français qui n'ont pas de fortune de leur donner des connaissances en mathématiques trop étendues. (p. 43 de l'édition Payot & Rivages, 2009)

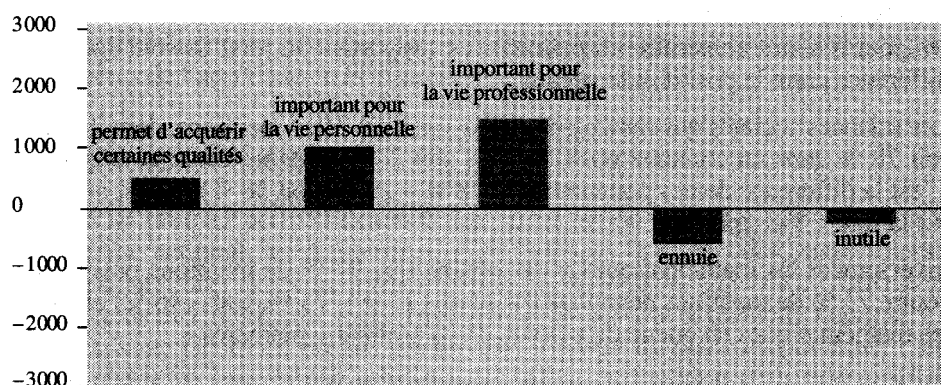
Le propos peut paraître énigmatique. Il témoigne en tout cas du « jeu » existant entre l'offre praxéologique scolaire et la demande praxéologique « profane ». Si l'offre comporte telle discipline, elle pourra attirer tel public. Si l'on veut écarter tel public, on écartera telle discipline. Mais que se passe-t-il si l'offre ne rencontre aucune demande ? Si le désir praxéologique, dans les différents publics possibles, ne s'articule pas (ou plus) à l'offre proposée ? Si le désir décline ? Sans doute peut-on voir alors se maintenir, un certain temps, une apparence de désir, du fait d'un public captif et de sa docilité traditionnelle. Mais les symptômes se multiplient de cette panne du désir, de cette inappétence pour une offre praxéologique scolaire de plus en plus difficile à faire accepter.

Il semble que tel soit aujourd'hui largement le cas, en France. Je rappellerai ici les conclusions de l'étude due à Roger Establet, Jean-Luc Fauguet, Georges Felouzis, Sylviane Feuilladiou et Pierre Vergès sous le titre *Radiographie du peuple lycéen. Pour changer le lycée* (ESF, 2005), qui analyse les réponses recueillies lors de la consultation nationale sur le thème « Quels savoirs enseigner au lycée ? ». Voici par exemple un graphique extrait de ce travail (p. 65) montrant les « différences entre les citations positives et les citations négatives » à propos des principales disciplines enseignées dans les voies générales et technologiques. Là où les sciences sociales reçoivent 78 % de citations positives et 22 % de citations négatives (la différence est donc de + 56 points), les mathématiques sont citées positivement dans 27 % des cas, négativement dans 73 % : la différence est négative, égale à – 46 points.

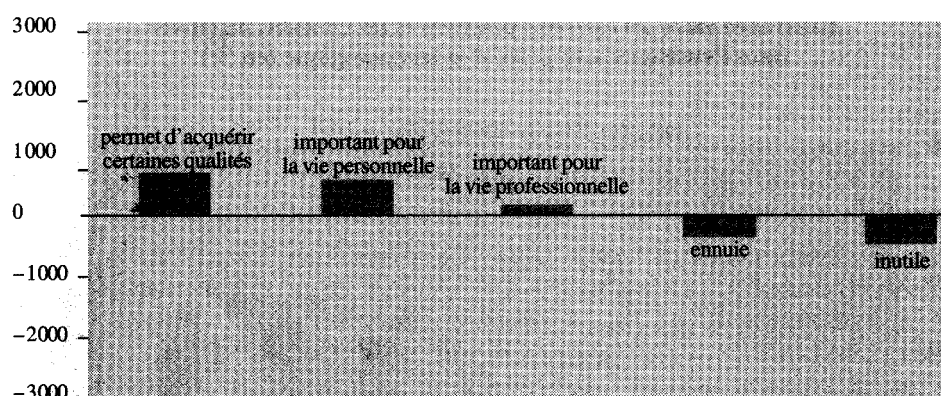


Si les mathématiques sont particulièrement visées, il est bon d'affiner la comparaison avec l'ensemble des disciplines proposées : les graphiques ci-après donnent à cet égard un aperçu intéressant. Voici un premier rapprochement (p. ...).

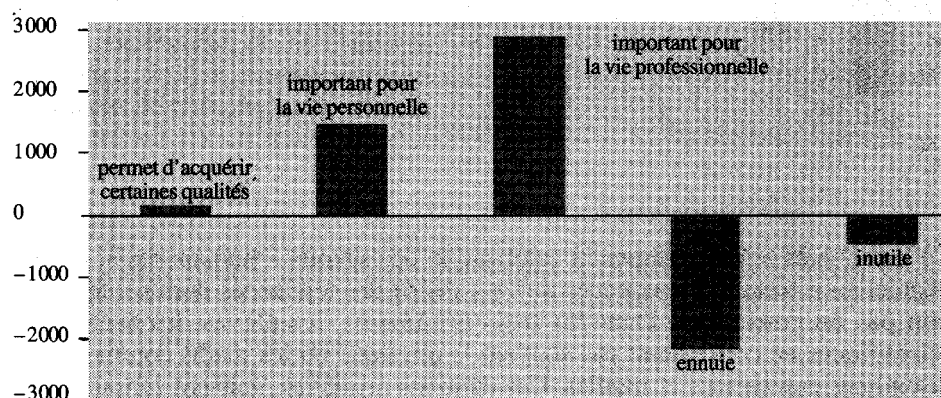
Figure 2
Valeurs attribuées aux différentes disciplines



Valeurs attribuées aux sciences sociales



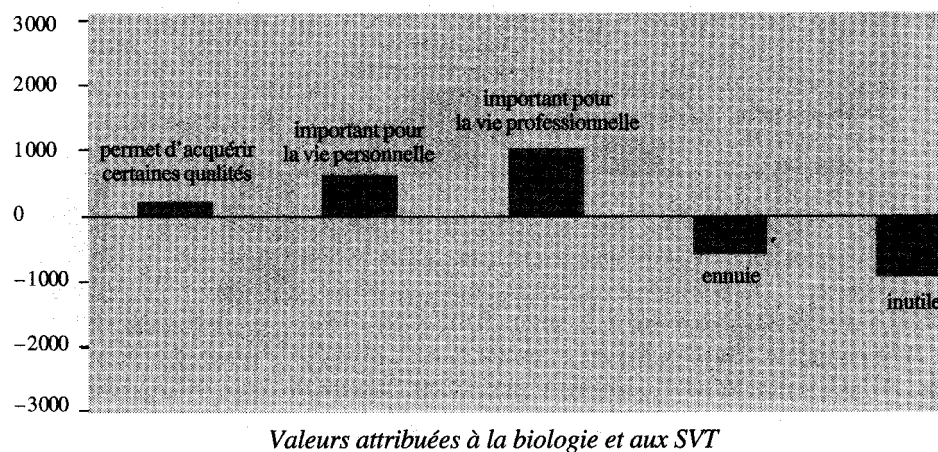
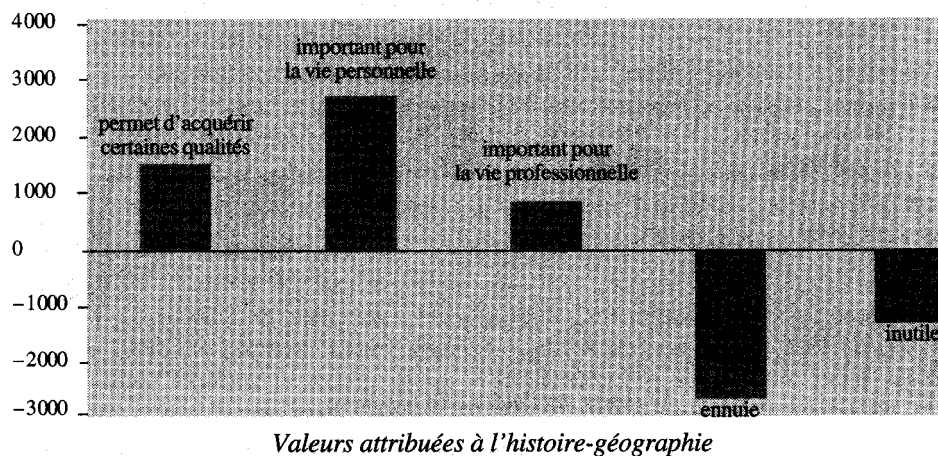
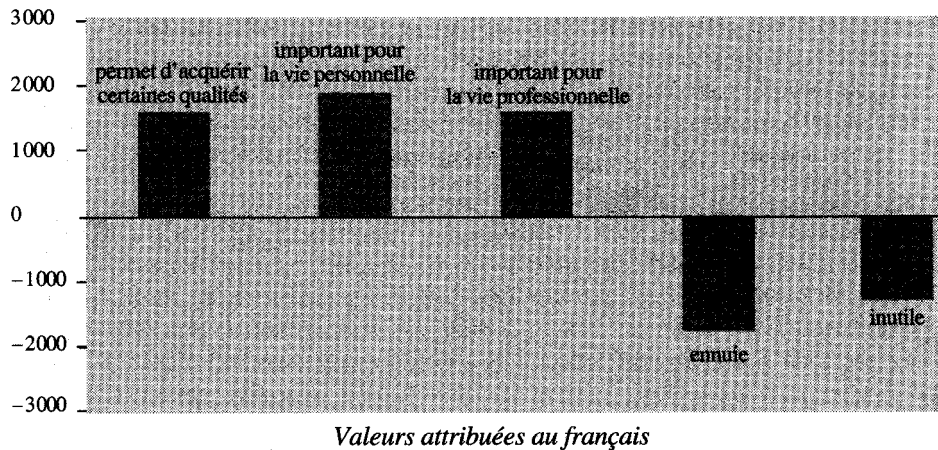
Valeurs attribuées à la philosophie



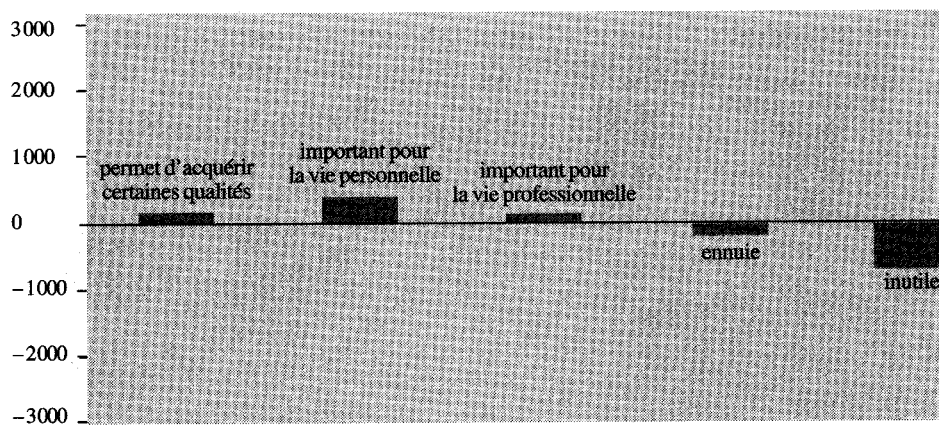
Valeurs attribuées aux langues

La comparaison est instructive. Le caractère « inutile » est faible dans les trois cas ; mais le fait que « on s'y ennuye » est nettement plus fort pour les langues, lesquelles ont pourtant la plus haute importance « pour la vie professionnelle ».

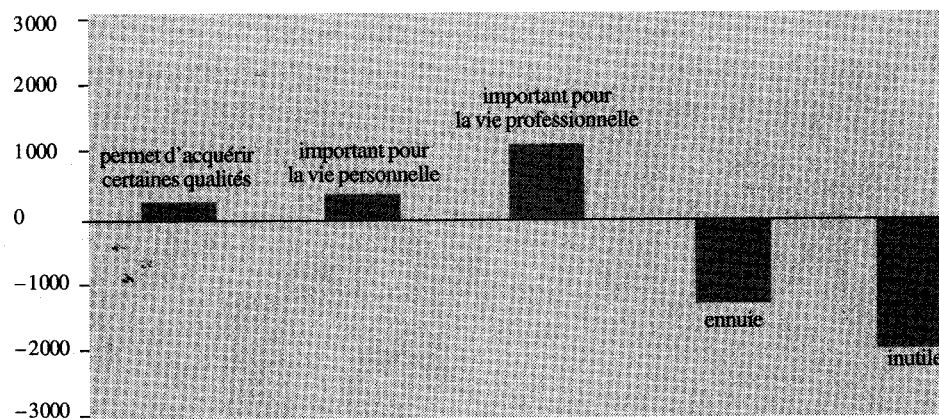
Alors que l'importance pour la vie professionnelle l'emporte sur l'importance pour la vie personnelle pour ce qui est des sciences sociales et, plus encore, des langues, l'ordre s'inverse pour le français et pour l'histoire-géographie, « matières » scolaires dont l'inutilité est non négligeable et qui engendrent de l'ennui.



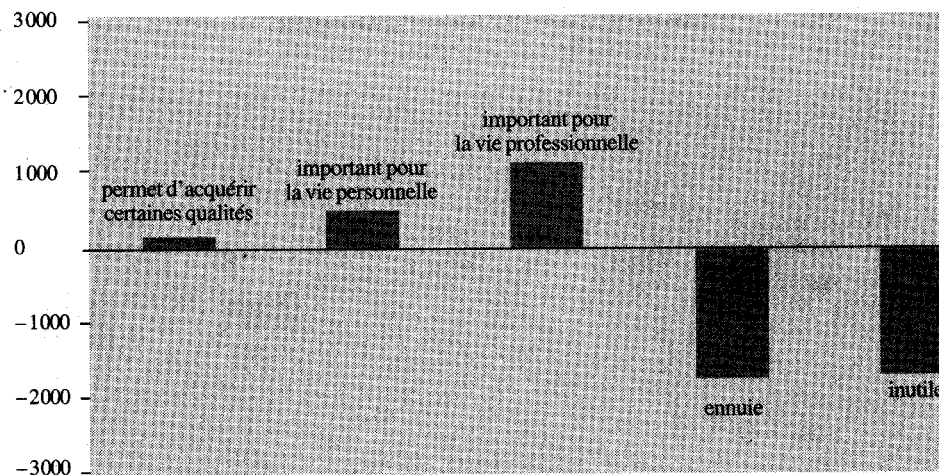
Le « profil » des SVT est plus aplati que celui des langues, du français ou de l'histoire-géographie, mais beaucoup moins que celui de la philosophie. Les trois dernières disciplines sont le sport, la physique et... les mathématiques. Quel est le verdict à leur endroit ? Voici.



Valeurs attribuées au sport



Valeurs attribuées à la physique



Valeurs attribuées aux mathématiques

Comme on le voit, le sport (l'EPS, en fait) a un profil très aplati (à l'instar de la philosophie). La physique est proche des mathématiques, lesquelles sont plus ennuyeuses et aussi inutiles !

On notera que les mathématiques, de même que la physique, le sport, les SVT, les langues ou même les sciences sociales, et contrairement à l'histoire-géographie, au français, voire à la philosophie, ne sont pas regardées comme permettant « d'acquérir certaines qualités ». En même temps, selon une loi à laquelle seul le sport échappe, les disciplines ainsi

« formatrices » sont déclarées plus importantes « pour la vie personnelle » que « pour la vie professionnelle ».

N'allons pas plus loin dans cet examen, qui montre, si l'on en doutait, une panne générale du désir à l'endroit de l'offre praxéologique scolaire. L'intérêt des disciplines enseignées a cessé d'être clair : le sentiment de leur inutilité triomphe. Dans ce que j'appellerai la vie sociale exotérique, celle qui se montre et se voit (par contraste avec les vies « ésotériques », encloses dans des institutions largement opaques), ces disciplines et les connaissances qu'elles commandent semblent dépourvues de toute pertinence : « On n'a pas besoin de... pour... » paraît être le leitmotiv silencieux, mais non moins prégnant, du regard commun sur les savoirs de l'école. Comme une monnaie qui n'a cours qu'en un minuscule royaume, les savoirs enseignés semblent n'avoir de valeur qu'à l'école, perdant toute valeur dès qu'on en franchit les limites. Il y a ainsi une dramatique perte de crédit de la puissance praxéologique « mondaine » des disciplines proposées à l'école.

6. L'inadéquation des mathématiques enseignées : un exemple

Le cas des mathématiques est particulièrement frappant. Dans la vie sociale ordinaire, exotérique, toute trace de mathématiques semble avoir été soigneusement éliminée ou, du moins, dissimulée, à l'égal de quelque réalité obscène, qui offenserait la pudeur, porterait atteinte aux bonnes mœurs et serait contraire aux règles élémentaires de la convivialité. Quiconque ne se contente pas d'évoluer dans le petit monde enchanté des professeurs de mathématiques et des mathématiciens en reçoit tous les jours la preuve. Au demeurant, il s'agira là d'un fait essentiel à prendre en compte si l'on souhaite rétablir un jour les circuits du désir praxéologique dans notre société.

Pourquoi en est-il ainsi ? Le problème est vaste : sans doute faut-il remonter jusqu'au niveau de la *société* et même de la *civilisation* pour identifier les conditions et les contraintes clés. Je m'en tiendrai ici aux trois niveaux solidaires de l'école, de la pédagogie et de la discipline elle-même. Peut-on alors ébaucher un diagnostic sur ce qui, dans l'enseignement scolaire des mathématiques, pourrait concourir au discrédit praxéologique des mathématiques enseignées ?

J'ai insisté au cours des années récentes sur un déficit dévastateur de l'enseignement *actuel* des mathématiques. La formation secondaire doit pourvoir les élèves d'une partie déjà substantielle de la puissance praxéologique utile à leur vie personnelle et professionnelle ultérieures (pour reprendre ici les catégories de l'étude citée plus haut) : elle doit leur apporter une intelligence instruite du monde et, du même mouvement, une capacité raisonnée d'agir en son sein. Or c'est cela qui, concernant les mathématiques au moins, semble bloqué.

Je commencerai par un exemple à la fois très sensible et très précis. J'ai observé un jour un professeur de mathématiques proposer à ses élèves d'une classe de 3^e (donc des élèves de 14 ans environ) de comparer les nombres $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$. L'objectif de cette demande était

d'amener les élèves, après des cheminements plus ou moins complexes et peut-être incertains, à l'identité $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ (pour a et $b \geq 0$). Chose qui n'aurait pu se produire lorsque j'étais moi-même collégien ou lycéen, certains de ces élèves ont utilisé leur calculatrice, obtenant par exemple ceci.

F1+ Tools	F2+ Algebra	F3+ Calc	F4+ Other	F5 PrgmIO	F6+ Cl&an UP	
■ $3 \cdot \sqrt{2}$ 4.24264068712						
■ $\sqrt{18}$ 4.24264068712						
MAIN DEG EXACT FUNC 2/30						

Le professeur a alors refusé leur conclusion – les deux nombres sont égaux – pour un motif qui peut être exprimé ainsi : « Bien sûr, les deux nombres $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$ ont, selon votre calculatrice, les mêmes premières décimales ; mais il se pourrait qu'ils diffèrent à la 40^e ou à la 50^e décimale par exemple ! Vous ne pouvez donc pas conclure qu'ils sont égaux. »

Cet épisode appelle plusieurs commentaires. Le premier sera brutal : le propos prêté ici au professeur est *mathématiquement absurde*. Pourquoi cela ? Regardons d'abord cette suite d'égalités (où a, b et $c \in \mathbb{N}^*$) :

$$|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| = |a\sqrt{b} - \sqrt{c}| \frac{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{|a^2b - c|}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Si $a\sqrt{b} - \sqrt{c} \neq 0$, on a nécessairement : $|a^2b - c| \geq 1$. Conclusion : ou bien les deux nombres $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ sont égaux, ou bien ils sont à une distance l'un de l'autre supérieure ou égale à

$$\frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Lorsque a, b et c sont ceux de l'exemple évoqué, on a :

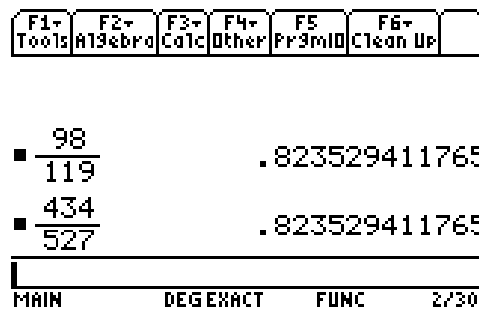
$$\frac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{1}{3\sqrt{2} + \sqrt{18}} > \frac{1}{3 \times 1,5 + 5} > \frac{1}{10}.$$

En d'autres termes, ou bien $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$ sont égaux, ou bien leur différence est, en valeur absolue, *supérieure* à 0,1 ; or ce qu'indique la calculatrice, c'est que leur distance est *inférieure* à 0,000 000 0001. Conclusion : les deux nombres sont égaux.

Une deuxième observation est que cette erreur mathématique du professeur – et je crois pouvoir dire : *de nombre de professeurs*, sinon de tous – est due à deux facteurs massifs. Premièrement, ces mathématiques-là, si simples soient-elles, sont « inédites » : c'est la

volonté de comprendre *mathématiquement* un phénomène numérique lui-même inédit, lié à l'intrusion de la calculatrice dans la vie mathématique scolaire, qui les engendre. Deuxièmement, le corpus mathématique enseigné n'a pas été mis à jour afin d'inclure ces connaissances-là : les mathématiques enseignées sont sur ce point inadéquates à la vie mathématique *réelle* des élèves. Avant de commenter ce fait, je voudrais en donner rapidement d'autres illustrations.

Le cas le plus « classique », si l'on peut dire, concerne la comparaison de fractions. Voici un autre écran de calculatrice.



Peut-on en conclure que les deux fractions, $\frac{98}{119}$ et $\frac{434}{527}$, ont la même valeur ? On sait que la fraction différence peut s'écrire, en valeur absolue, sous la forme

$$\frac{N}{119 \times 527}$$

où N est un entier naturel. Si l'on suppose $N > 0$, on a :

$$\frac{N}{119 \times 527} \geq \frac{1}{119 \times 527} = \frac{1}{62\,713} > \frac{1}{100\,000} = 10^{-5}.$$

Or la calculatrice indique que la distance entre $\frac{98}{119}$ et $\frac{434}{527}$ est inférieure à 10^{-11} . On doit donc conclure que $\frac{98}{119} = \frac{434}{527}$.

Voici un autre cas, amené par un professeur qui, dans le cadre de sa formation à l'IUFM, avait soulevé (par écrit, le mardi 27 mars 2007) la question que voici.

En 2^{de}, on demande aux élèves de savoir à quel ensemble (**N**, **Z**, **D**, **Q**, **R**) un nombre appartient. Il se pose le problème de montrer que a/b appartient ou non à **D**, c'est-à-dire peut se mettre sous la forme $c/10^n$. Pour cela, je ne vois comme technique (décrite sommairement) que 1) décomposer a et b en facteurs premiers, 2) réduire la fraction a/b , 3) regarder le dénominateur de la fraction réduite : si des facteurs premiers différents de 2 et 5 apparaissent, alors la fraction a/b n'est pas le représentant d'un

décimal. Une autre technique pourrait consister à regarder le développement décimal à la calculatrice et voir si ce développement est périodique ou non. Problème : on se heurte aux problèmes d'affichage de la calculatrice. Y a-t-il une autre technique envisageable ?

Le problème évoqué est celui de savoir, étant donné deux nombres entiers strictement positifs a et b , si la division de a par b « tombe juste » ou non. À nouveau, nous nous trouvons ici devant un manque (collectif) de connaissances mathématiques (simples) pour faire face à des conditions « pédagogiques » nouvelles : l'utilisation de calculatrices.

Considérons par exemple la division de $a = 119$ et $b = 56$. La calculatrice de mon téléphone mobile m'indique que $119 \div 56$ vaudrait 2,125. La division, ici, « tombe juste » : on peut par exemple le vérifier en effectuant la multiplication $2,125 \times 56$, qui donne bien 119.

Prenons maintenant, non pas $a = 119$ mais $a = 117$; cette fois, interrogé sur le quotient $117 \div 56$, le même instrument de calcul affiche ceci : 2,0892857. La division tombe-t-elle juste, ou bien l'instrument mobilisé, ayant atteint le maximum de ses possibilités, fournit-il une valeur approchée, qu'il arrondit ? Consultons une autre calculatrice, plus puissante, celle qu'utilisent des élèves de collège : elle affiche, elle, 2,089285714. La seconde hypothèse était donc la bonne !

On tombe alors sur une difficulté, celle-là même qu'évoque l'auteur de la question : peut-être la division de 117 par 56 tombe-t-elle juste, mais peut-être cela ne se produit-il que, disons, à la 50^e, voire à la 100^e décimale ! Comment savoir ?

C'est là qu'on peut faire entrer en piste un théorème mathématique à la fois facile à établir et « inconnu » jusqu'ici : en l'espèce, si la division de a par 56 tombait juste, cela se produirait *au plus tard* à la 6^e décimale – je laisse le lecteur établir ce résultat. Comme il n'en est rien, on peut conclure que cette division se poursuivra indéfiniment.

D'où vient le nombre 6, ici ? Il s'agit du plus petit entier n tel que 2^n soit supérieur ou égal au diviseur 56 : on a en effet $2^4 = 16$, $2^5 = 32$ et $2^6 = 64$. Considérons maintenant la division de 917 par 789 (par exemple). Le plus petit entier n tel que 2^n soit supérieur ou égal à 789 est 10 (on a $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$). La calculatrice du collège, sollicitée, fait cette désespérante réponse : $917 \div 789$ vaudrait 1,162230672. Neuf décimales, dont huit sûres, quand il nous faudrait 11 décimales sûres pour conclure !

N'oublions pas alors que le monde autour de nous est truffé de moyens de calcul ; sur votre ordinateur, ainsi, vous disposez d'une calculatrice bien plus puissante, qui affiche, elle, 1,1622306717363751584283903675539 : l'affaire est faite, la division ne tombe pas juste ! (On notera en passant que la dernière décimale affichée par la calculatrice de collège n'était pas exacte.)

Si, toutefois, on ne dispose que d'une calculatrice de collège, rien n'est perdu, à condition que l'on veuille bien accomplir une petite étude mathématique simple. Demandons à cette calculatrice le quotient de 917000 par 789 ; elle affiche 1162,230672. Apparemment aucun progrès n'a été fait. Calculons alors $917000 - 1162 \times 789$: cela vaut 182 ; et demandons à la même calculatrice le quotient de 182 par 789 : elle affiche 0,230671736. Nous avons gagné *trois* décimales (et peut-être quatre) : un peu d'arithmétique montre en effet que le quotient de 917 par 789 s'écrit 1,1622306717363, la dernière décimale n'étant pas, *a priori*, sûre. En fait, l'affichage donné par la calculatrice de l'ordinateur montre que la dernière et 13^e décimale affichée ici est juste ; mais cela importe peu : 12 décimales suffisaient. L'affaire est réglée.

Une conséquence cruciale du retard des mathématiques enseignées par rapport, déjà, aux situations *de classe* peut être exprimée ainsi : en se comportant comme le professeur que j'évoquais à propos des calculs avec des radicaux, *on abandonne les élèves*. Que doit-on entendre par là ? Les élèves ne peuvent qu'observer ceci : chaque fois que (par exemple) deux fractions se révéleront égales, la calculatrice *les donnait égales* ; chaque fois qu'elles se révéleront inégales, la calculatrice *les donnait inégales* ; et pourtant ces régularités-là *seraient une illusion* ! Face à un phénomène troublant, les élèves sont abandonnés à eux-mêmes ; de fait, on leur interdit même de tenter de penser ce qu'ils ne peuvent que constater, avec interdiction de s'en prévaloir et même de le mentionner. Les mathématiques enseignées montrent ici, sur le point évoqué, leur *impuissance praxéologique* – comme si, en effet, elles étaient « inutiles ».

7. Une forteresse vide à réarmer

L'exemple précédent illustre une idée qui a de l'avenir : *on peut, il faut* remettre les mathématiques enseignées *en marche*. En parcourant un ouvrage récent dû à Michel Soufflet, ancien président de l'APMEP, et intitulé *Les mathématiques de tous les jours* (Vuibert, 2009), j'ai été frappé par le passage suivant.

En cours de chimie, les élèves de première S apprennent que les atomes de la molécule de méthane forme [sic] un tétraèdre régulier de telle sorte que l'atome de carbone est au centre, les atomes d'hydrogène formant avec celui-ci un angle d'environ 109°.

Un élève m'a demandé un jour comment on pouvait calculer cet angle. J'ai débordé, hésité, craignant de m'engager dans un calcul un peu long et puis je me suis souvenu qu'un tétraèdre régulier s'inscrit dans un cube. À partir de là, tout devient très simple si on choisit un repère orthonormé constitué de trois côtés d'un cube. (p. 175).

L'auteur montre (p. 176) que l'angle en question a pour cosinus $-\frac{1}{3}$. La calculatrice donne alors pour valeur de l'angle en degrés

109,4712206344906913692459993399...

On ne voit pas, au passage, en quoi on peut parler en ce cas – comme en d’autres – de « mathématiques *de tous les jours* » : il est symptomatique, je crois, que, dès que les mathématiques enseignées sont mises en jeu pour produire des connaissances, on parle de « vie de tous les jours », entendant par là une vie étrangère à la « vie mathématique ordinaire » de la classe.

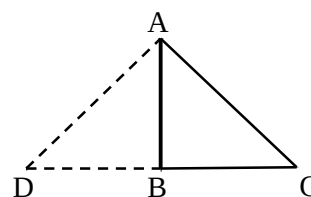
Par contraste, l’enseignement des mathématiques ressemble aujourd’hui à une boutique dont les employés ne sauraient plus clairement à *quoi servent* – ou peuvent servir – ce qu’ils vendent pourtant tous les jours, dans ce qui ressemble fort à une vente forcée. Imaginons que l’on expulse tout ce dont on ne sait pas dire explicitement à *quoi c’est utile* ! À quoi servent les angles ? Pourrait-on s’en passer ? Et la notion de droites parallèles ? Et de droites sécantes ? Pourquoi, de même, distingue-t-on les angles saillants et les angles rentrants ? À quoi est utile le théorème de l’angle inscrit ? Celui sur la somme des angles d’un triangle (du plan) ? Pourquoi faire disparaître les radicaux figurant au dénominateur d’une expression fractionnaire ? Pourquoi réduire une fraction à « sa plus simple expression » ? Pourquoi s’intéresse-t-on tellement aux triangles ? En quoi le fait que les hauteurs d’un triangle se coupent en un même point est-il utile ? Pourquoi s’intéresser aux « propriétés du parallélogramme » ? À quoi sert de savoir que, sur un intervalle donné, telle fonction est croissante ? Etc.

Tout de ce qui compose l’univers mathématique a une ou plusieurs *raisons d’être* ; connaître cet univers, c’est *d’abord* connaître ces raisons d’être. C’est là un principe auquel on ne saurait déroger : un enseignement des mathématiques *vivant* est un enseignement qui connaît (et sait faire connaître) les raisons d’être de chacun des « objets », grands ou petits, qui s’y rencontrent.

Mais l’un des obstacles, ici, tient à ceci que ces raisons d’être peuvent paraître *minuscules*, faites de *détails* qui, dans une culture sensible surtout aux grandes idées, aux larges horizons, apparaissent ternes et, finalement, décevants. Je voudrais illustrer rapidement cette remarque en choisissant dans la liste ébauchée plus haut. Considérons les notions d’angles saillants et d’angles rentrant. Voici un usage typique de ces notions, telles que les mettaient en jeu une certaine construction déductive de la géométrie du plan (dans laquelle, au stade où cette démonstration apparaît, on ignore encore le théorème sur la somme des angles d’un triangle).

Théorème. Dans un triangle rectangle, les angles adjacents à l’hypoténuse sont aigus.

Démonstration. Soit un triangle ABC rectangle en B. Soit D le symétrique de C par rapport à (AB) : le triangle CAD est isocèle. L’angle $\widehat{CAD}$ étant *saillant* ($< 2D$), l’angle moitié, soit $\widehat{CAB}$, est *aigu*. On montre de même que $\widehat{BCA}$ est aigu.



Ce qu'il « faut savoir », ici, à propos des angles saillants (et, donc, des angles rentrants) tient en deux « faits » mathématiques : 1) les angles d'un triangle sont *saillants* ; 2) l'angle *moitié* d'un angle saillant est *aigu*.

On voit ainsi que les « raisons d'être » se trouvent dans les détails : c'est pour cela que, contre une vision des mathématiques exaltée, grandiose, enflée, j'ai parlé de *plomberie* mathématique. Voici de ce travail de plombier mathématicien un autre exemple, relatif au parallélogramme. Les raisons de s'intéresser au parallélogramme étaient autrefois explicites dans les manuels.

Dans un *Traité de géométrie élémentaire* de 1885, au chapitre *Des parallèles et des parallélogrammes*, l'auteur consacre un bref paragraphe à indiquer l'*Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes*.

Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes. Ces théorèmes servent à en démontrer d'autres qui ont pour objet de prouver :

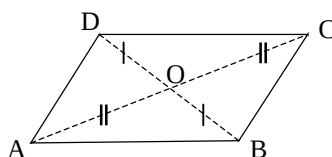
- 1° Que deux droites sont égales ;
- 2° Que deux angles sont égaux ;
- 3° Que deux droites sont parallèles.

Un manuel de collège des années 1950, quant à lui, offre à ses lecteurs le commentaire suivant.

Application. Si un quadrilatère convexe possède l'une quelconque de ces propriétés nous pouvons affirmer

- 1° qu'il est un parallélogramme ;
- 2° qu'il possède par suite toutes les propriétés ci-dessus.

Exemple. Au cours d'un problème nous arrivons, par exemple, à prouver que le quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

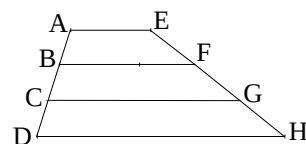


Immédiatement nous tirons de ce fait les conséquences suivantes :

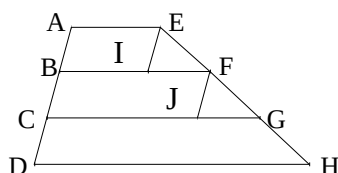
- 1° ABCD est un parallélogramme
- 2° Par suite : AD et BC sont égaux et parallèles ; AB et DC sont égaux et parallèles ;
 $\hat{A} = \hat{C}$; $\hat{B} = \hat{D}$.

Voici maintenant un exemple typique d'emploi de cet outil de plombier mathématicien que sont les propriétés classiques du parallélogramme.

Théorème. Si les droites (AE), (BF), (CG), (DH), ..., sont parallèles, et si $AB = BC = CD = \dots$, alors on a aussi $EF = FG = GH = \dots$



Démonstration. On considère d'abord les points I et J, où (EI) et (FJ) sont parallèles à (AB). Les quadrilatères AEIB et BFJC sont donc des parallélogrammes ; il en résulte que l'on a d'une part $EI = AB$, d'autre part $FJ = BC$, en sorte que, puisque $AB = BC$, on a $EI = FJ$. On considère alors les triangles EIF et FJG. On a $EI = FJ$ et, pour des raisons de parallélisme, $\hat{E} = \hat{F}$ et $\hat{I} = \hat{J}$; d'après le 1^{er} cas d'égalité des triangles, EIF et FJG sont donc égaux [= isométriques], en sorte que $EF = FG$, CQFD.



Je voudrais maintenant, par un dernier exemple, toucher en même temps à deux notions. Considérons l'expression numérique

$$A = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}.$$

La tradition veut qu'on ne laisse pas le nombre A sous cette forme mais qu'on l'écrive sous la forme « simplifiée » $A = \sqrt{3} - 1$. Une raison souvent avancée pour justifier cette transformation est que cela faciliterait le calcul de valeurs approchées de A . Cette réponse a perdu de sa pertinence aujourd'hui : la calculatrice affiche immédiatement un nombre de décimales dont le calcul, autrefois, n'était pas même envisagé, au moins au secondaire. Ainsi obtient-on

$$A = 0,73205080756887729352744634150587\dots$$

pour l'une comme l'autre expressions.

Mais on peut aller plus loin : il *n'est pas vrai* que la forme que nous appellerons *canonique* de A soit la plus adéquate quand on veut déterminer des valeurs décimales approchées de A . Supposons ainsi que nous calculions en prenant pour valeur approchée de $\sqrt{3}$ le décimal 1,7. Il vient d'une part

$$\sqrt{3} - 1 \approx 0,7$$

ce qui est une valeur approchée « par défaut », et d'autre part

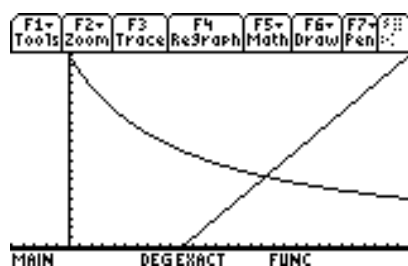
$$\frac{2}{\sqrt{3} + 1} \approx \frac{2}{2,7} = 0,74074\dots$$

ce qui est une valeur approchée par excès. On aura noté surtout que cette seconde valeur est bien meilleure que la première : l'erreur est, dans le premier cas, plus de trois fois plus importante que dans le second cas. Il faut donc chercher ailleurs la raison d'être du geste réflexe de « chasser les radicaux du dénominateur ».

Avant de le faire, essayons d'élucider le phénomène constaté. C'est là que l'on va rencontrer un usage fondateur de la notion de *fonction*, de celle de fonction *croissante* (ou *décroissante*) sur un intervalle, et enfin de celle de fonction *plus ou moins* croissante (ou décroissante), c'est-à-dire celle de *pente*. Posons en effet

$$f(x) = x - 1 \text{ et } g(x) = \frac{2}{x + 1}.$$

On voit que la première valeur approchée de A n'est autre que $f(1,7)$, tandis que la seconde est $g(1,7)$. Or f croît et g décroît dans un intervalle contenant $\sqrt{3}$ et $1,7$, ce que confirment les représentations graphiques de f et g ci-après.



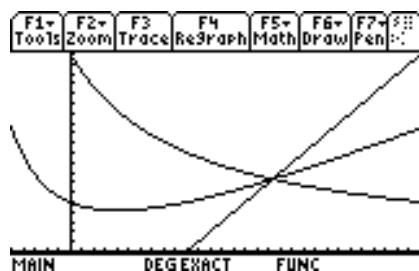
Comme $1,7 < \sqrt{3}$, on pouvait ainsi *prévoir* que l'on aurait (ainsi qu'on l'a constaté)

$$0,7 = f(1,7) < f(\sqrt{3}) = A = g(\sqrt{3}) < g(1,7) < 0,741.$$

Surtout, on peut penser à fabriquer une autre fonction, f_1 , telle que $f_1(\sqrt{3}) = A$, et qui, pour $x = 1,7$, donne une valeur *plus proche* de A que $f(1,7)$ et $g(1,7)$. Posons en effet

$$f_1 = \frac{f + g}{2}.$$

La représentation graphique de f_1 montre que cette fonction est croissante dans un intervalle contenant $1,7$ et $\sqrt{3}$, et que sa *pente* autour de $\sqrt{3}$ est moindre que celle de f .



Ces courbes montrent aussi que, lorsqu'on prend 1,7 pour valeur approchée de $\sqrt{3}$, l'expression

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

est « meilleure » pour calculer la valeur de A que l'expression $\sqrt{3}-1$. On a de fait :

$$f_1(1,7) = \frac{1,7-1}{2} + \frac{1}{1,7+1} = 0,35 + \frac{1}{2,7} = 0,720\dots$$

Le procédé utilisé pour fabriquer f_1 peut être itéré. On a :

$$f_1(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \frac{x^2+1}{x+1}.$$

Posons $f_2 = \frac{f_1+g}{2}$. On obtient ici

$$f_2(1,7) = 0,175 + \frac{1}{5,4} + \frac{1}{2,7} = 0,175 + \frac{1}{1,8} > 0,73\dots$$

On a $f_2(x) = \frac{1}{4} \frac{x^2+5}{x+1}$; on peut établir que l'on a :

$$\frac{f_2(x')-f_2(x)}{x'-x} = \frac{(x'+1)(x+1)}{4} [(x'-x)(x+1) + x^2 + 2x - 5].$$

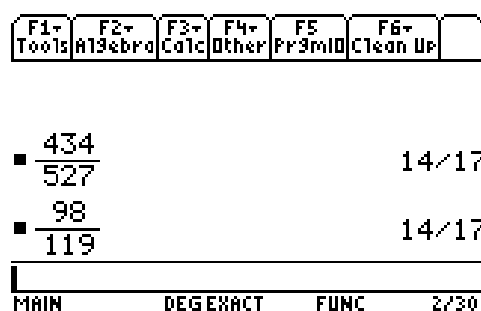
Comme, pour $x > 1,5$, on a $x^2 + 2x - 5 > 0,25$, on peut conclure que f_2 est croissante pour $x > 1,5$, et on peut donc prendre pour valeur approchée de A

$$g_1(x) = \frac{1}{2} f_2(1,7) + \frac{1}{2} g(1,7) = 0,0875 + \frac{1}{10,8} + \frac{1}{5,4} + \frac{1}{2,7} = 0,0875 + \frac{7}{10,8} = 0,736\dots$$

On a ici $g_1(x) = \frac{1}{8} \frac{x^2+13}{x+1}$; un calcul analogue au précédent montre que g_1 décroît dans un intervalle contenant 1,7 et $\sqrt{3}$, en sorte qu'on peut conclure que $0,73 < A < 0,736$. On voit en ce point qu'il est inepte de prétendre que la précision de la valeur calculée « ne saurait être meilleure que celle des valeurs à partir desquelles on calcule » : tout dépend du procédé de calcul !

Pourquoi donc ne pas laisser une fraction non simplifiée, ou ne pas abandonner sans plus de façon une expression avec un radical au dénominateur, ou laisser une expression algébrique « en désordre », etc. ? Je ne ferai ici qu'indiquer la raison d'être qui concerne tous les

formalismes mathématiques, qui est d'apporter réponse à la question suivante : « Comment reconnaître si *deux objets* mathématiques d'un certain type, désignés d'une certaine façon, *sont ou ne sont pas le même objet* ? » Dans un grand nombre de cas, il existe une écriture « canonique » de l'objet ayant la propriété cruciale suivante : tout objet du type possède une unique écriture canonique ; deux objets du type sont ou ne sont pas le même objet selon qu'ils ont ou n'ont pas la même écriture canonique. Par exemple, les écritures fractionnelles $\frac{98}{119}$ et $\frac{434}{527}$ désignent-elles le même nombre ? Pour le savoir, traditionnellement, on passe à l'écriture canonique, qui est ici la forme simplifiée de la fraction, que les calculatrices « scientifiques » fournissent aujourd'hui à la demande.



Je le répète : un enseignement vivant doit pouvoir exhiber les raisons d'être de ce qu'il promeut. C'est là un minimum. La route reste longue cependant pour recréer une véritable désir praxéologique à l'endroit des mathématiques.

8. Une voie incertaine mais à tenter

Comment sortir de l'état actuel de dégénérescence de l'enseignement des mathématiques ? Pour cela, peut-on définir en quelque sorte ce qu'en jargon moderne on nommerait *des fondamentaux* de tout enseignement possible ? Peut-on, sur une telle base, tenter de réinitialiser un désir praxéologique adressé à la discipline mathématique, en certaines de ses parties au moins ? Tels sont les problèmes que j'évoquerai rapidement maintenant.

Ce qui fait la puissance praxéologique d'un savoir, ce sont les *problèmes* qu'il permet de résoudre ; ce sont les questions auxquelles il permet d'apporter réponse. C'est le désir – s'il existe ! – de résoudre mathématiquement tel problème (et non « l'amour » idéalisé de telle ou telle notion mathématique) qui conduit à recourir à tel ou tel outil de plomberie mathématique.

De cela, on pourra voir une illustration dans la reproduction ci-dessous d'une page tirée d'une *Géométrie élémentaire* pour le cours moyen parue en 1921. L'énoncé du « Problème III », c'est-à-dire d'un *type* de problèmes – « mesurer la distance d'un point donné à un autre inaccessible » – comporte ici l'indication des outils de plomberie mathématique à utiliser : les « triangles semblables ». Le « Problème IV » est en vérité le même problème, mais sa

technique de résolution mobilise un autre outillage : le graphomètre, et ce qu'il faut pour tracer une épure qui fournira la distance cherchée, au facteur d'échelle près.

308. Problème III. — *Mesurer la distance d'un point donné à un autre inaccessible, en se servant des propriétés des triangles semblables.*



FIG. 323.

Soit AB la distance à mesurer. Au point A, on élève à AB une perpendiculaire AC, et en un point C quelconque de cette droite, on élève CD perpendiculaire à AC. On choisit un point arbitraire D sur CD et on détermine le point E, intersection des alignements AC et BD.

Les deux triangles rectangles ABE et ECD étant semblables comme ayant en E

un angle aigu égal, donnent la proportion :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE}$$

d'où l'on tire :

$$AB = \frac{AE \times CD}{CE}$$

Il est facile de mesurer les droites AE, CD et CE et, par suite, de déterminer AB.

309. Problème IV. — *Mesurer la distance d'un point donné à un autre inaccessible, en se servant du graphomètre.*

Soit AC la distance à mesurer (fig. 324). On choisit une base AB telle que du point B on puisse voir le point C ; puis on mesure AB et, avec le graphomètre, les angles BAC et ABC.



FIG. 324.

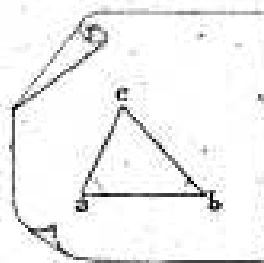


FIG. 325.

Après cela, on trace sur le papier une droite ab égale à la base AB réduite à l'échelle (fig. 325), et aux extrémités de cette droite, on construit les angles bac et abc respectivement égaux à BAC et à ABC. En mesurant à l'échelle la droite ac du triangle ainsi obtenu on a la distance AC demandée.

Plusieurs problèmes se pose. Le premier est le suivant : ces problèmes, qui permettent aux mathématicques d'exhiber leur puissance praxéologique, peuvent-ils encore aiguïser la curiosité d'une majorité d'élèves d'aujourd'hui en résonnant avec leur vie présente ou anticipée ? Le second s'énonce ainsi : faut-il « construire » à l'avance les outils de plomberie mathématique qui seront utiles, ou au contraire *motiver* leur considération et leur étude par le besoin que le désir de résoudre de tels problèmes ne manquera pas d'engendrer ?

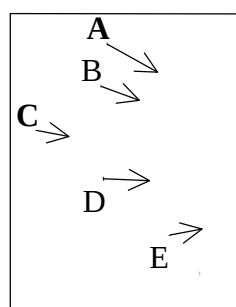
Arrêtons-nous d'abord un instant sur le second problème. Désireux de modéliser simplement le travail mathématique en général, le mathématicien Georges Bouligand (1889-1979) a autrefois souligné la tension génératrice essentielle entre d'une part l'activité de résolution de *problèmes* et d'autre part l'activité d'élaboration d'une *synthèse* qui mette en forme, fonde, organise les outils « mathématiques » appelés par la résolution des problèmes étudiés. Ainsi écrivait-il dans « Regards sur la formation mathématique » : « L'évolution globale des mathématiques [apparaît] comme la résultante à chaque époque de deux formes d'activité [...] orientées, la première vers les problèmes (P), la seconde vers la synthèse (S). »

Pour ce qui est de la synthèse, précise Bouligand, un premier *répertoire* est établi où se rangent côte à côte *notions, méthodes, résultats*, répertoire qui, cependant, n'est pas encore « la synthèse ». Cette dernière résulte de l'organisation du répertoire et porte autant sur les *concepts* et les *axiomes* (l'axiomatique est l'étape ultime de la synthèse) que sur les *groupements de problèmes*.

La synthèse, cependant, *est toujours à reprendre* : sous l'impulsion de nouveaux problèmes, qui se présentent d'abord isolés, un matériel opératoire emprunté à la synthèse disponible est mobilisé afin de construire la solution des problèmes nouvellement étudiés ; mais les impulsions ainsi apportées par la résolution de ces problèmes relancent alors la synthèse, en une dialectique dont Bouligand propose une analyse fine des conditions de possibilité et des mécanismes concrets.

Cette dialectique, on le voit, commence par les problèmes. Or l'enseignement scolaire, traditionnellement, marche à l'envers, si l'on peut dire : d'abord vient la « synthèse », qui n'est plus en ce cas synthèse de quoi que soit, et procède d'un pur histrionisme mathématique. Les « problèmes » ne sont alors que des « applications » du « cours » : la dialectique problèmes/synthèses se bloque. Au stade ultime de dégénérescence, les applications, comme mises en œuvre *remarquables* de la plomberie mathématique, disparaissent même.

On postulera ici que la reconstitution des circuits du désir praxéologique à l'endroit des mathématiques appelle un renversement historique qui mette au premier plan les problèmes étudiés, ou plutôt les *groupements de problèmes*. Dans une telle configuration curriculaire, on devra donc *déclarer* ces types de problèmes, comme aujourd'hui on déclare des notions ou des théorèmes (et parfois des techniques), dans les programmes officiels.



La première couche de types de problèmes, en outre, devra être faite de problèmes *non internes aux mathématiques*, mais *mathématisables* (en partie au moins), ce qui fournira le point de départ de la dialectique problèmes/synthèses. À titre d'exemple sans doute désuet, on peut citer ici les problèmes de *construction graphique*, qui ont depuis l'antiquité nourri la tradition mathématique, et dont je me contenterai de donner un exemple plus contemporain : un illustrateur a dessiné deux personnages A et C, qui regardent un certain point P au loin ; il veut situer le regard

d'autres personnages, B, D, E, qui doivent aussi regarder P ; comment peut-il faire, étant entendu que le point P se trouve hors de la feuille où il dessine ?

Bien entendu, le répertoire des types de problèmes proposés est une variable *décisive* d'une « nouvelle alliance » entre la société et son école. Le travail collectif à accomplir sur la création d'un répertoire de ces « grands problèmes » générateurs de l'enseignement des mathématiques se situe au même niveau d'exigence que celui ordinairement requis pour constituer un programme d'enseignement formulé en termes de synthèse (notions, théorèmes, techniques), à ceci près qu'il s'agit d'un travail à *réinitialiser historiquement*, à conduire à nouveaux frais, avec toujours en tête le critère de la capacité de ces grands problèmes à susciter un désir praxéologique dans la société et, en particulier, chez les jeunes générations.

Je mentionnerai ici un exemple qu'illustre le projet de programme de mathématiques de la classe de seconde (http://eduscol.education.fr/D0015/consult_Maths.htm) rendu public le 16 mars 2009. À l'instar du programme actuel (entré en vigueur en 2000-2001), ce programme comporte des *thèmes d'étude*, parmi lesquels figure celui des *phénomènes d'évolution*. Ce qui est ici un simple thème d'intervention de notions supposées élaborées *par ailleurs* pourrait, dans la perspective que j'ébauche, constituer l'un des grands problèmes « portant » un enseignement des mathématiques en donnant lieu à un ou plusieurs *parcours d'étude et de recherche* (PER). (L'un des problèmes étudiés pourra être par exemple celui de l'évolution du nombre N de molécules *non* endommagées lorsqu'une cellule vivante est soumise à une dose D de radiations ionisantes, nombre dont on découvrira qu'il *décroît exponentiellement* selon une loi de la forme $N = N_0 e^{-kD}$, avec $k > 0$.)

Le « grand problème » de l'évolution me permettra d'illustrer un autre fait essentiel. D'une façon sans doute non fortuite, le repliement de l'enseignement des mathématiques sur les objets au détriment des problèmes est contemporain d'un phénomène assez large de *démathématisation* de la culture exotérique, ce qui ne peut que diminuer encore le désir praxéologique envers les mathématiques. Voici un exemple de ce silence sur les mathématiques rencontré dans un ouvrage de haute vulgarisation signé d'un spécialiste, Michel Lamy, et intitulé *La diversité du vivant* (Le Pommier-Fayard, 1999).

Il existe une grande diversité de populations que les écologistes ont proposé de séparer en deux groupes, selon la stratégie mise en œuvre face aux facteurs de l'environnement : STRATÉGIES r et K (r représente le taux d'accroissement naturel de la population et K la CHARGE BIOTIQUE maximale, c'est-à-dire le nombre maximal d'individus que peut supporter le milieu).

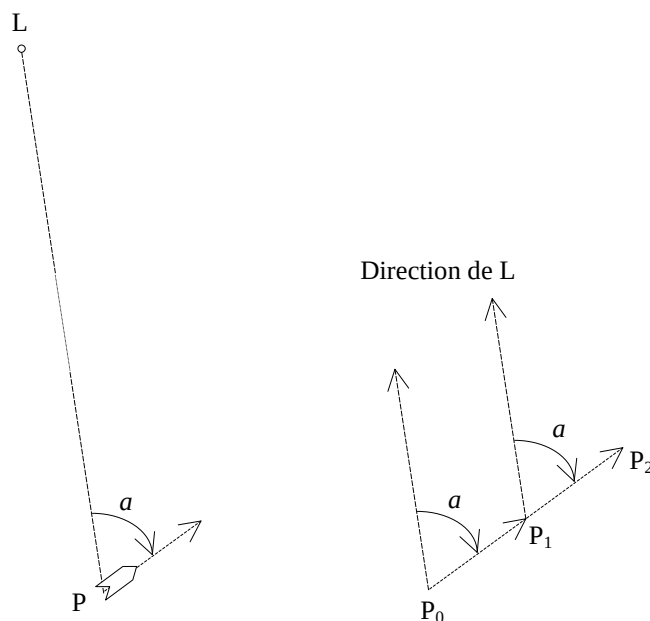
Les populations à stratégie r ont un taux de natalité important, des jeunes à développement rapide, mais un taux de mortalité élevé sous l'influence des facteurs externes et en particulier de la prédation. Ce sont des populations dont la densité n'excédera jamais la capacité du milieu. C'est le cas des insectes dont les populations sont naturellement régulées par les parasites et les prédateurs.

Les populations à stratégie K ont un taux de natalité peu élevé, un développement lent et une grande longévité. Elles subissent une faible pression de prédation et, de ce fait, leur densité peut devenir importante et excéder les capacités du milieu (donc dépasser K). Comme indiqué précédemment, il en résulte un effet de stress (surpopulation) conduisant à un dérèglement hormonal et à des avortements assurant une autorégulation de la densité de la population. Les mammifères, par exemple, ont développé une stratégie de ce type.

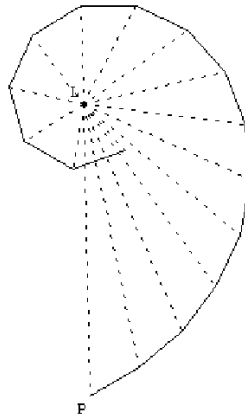
On a voulu généraliser ces règles en faisant de tous les invertébrés des populations à stratégie r et de tous les vertébrés des populations à stratégie K. Or, non seulement les exceptions sont nombreuses, mais, de plus, si les conditions environnementales changent, la population peut elle aussi changer de stratégie...

De façon exemplaire, il ne reste plus, ici, qu'une trace d'un modèle mathématique dont le lecteur ne saura rien de plus : les lettres r et K . Il s'agit en fait du modèle proposé par Pierre-François Verhulst en 1838, qui s'écrit classiquement $\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$: on se reportera par exemple à l'article « Modèle évolutif r/K » de l'encyclopédie Wikipédia. Devant ce phénomène ubiquitaire, on doit espérer que la revitalisation de l'enseignement des mathématiques irai de pair avec *une levée progressive de la censure culturelle* sur les faits mathématiques.

La ligne de développement proposée ne peut manquer de soulever un problème à la fois banal et crucial, que j'illustrerai sur un autre exemple encore. Dans un atelier pour des élèves de 4^e, on se pose la question suivante : « Pourquoi les insectes de nuit se précipitent-ils sur les sources de lumière ? » L'une des théories qui prétendent expliquer ce phénomène est la « théorie de la Lune ». Son hypothèse de départ est qu'un insecte de nuit se guide, pour voler, sur une source de lumière L , selon le principe suivant : le papillon P vole en faisant un angle a constant avec la direction de la lumière (voir ci-après).

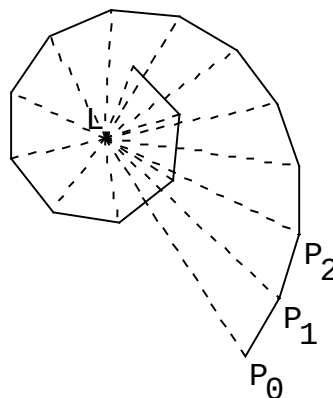


Si la lumière L est « à l'infini », si L est la Lune par exemple, les droites successives (PL) sont (pratiquement) *parallèles* entre elles et le papillon vole alors en ligne droite (les angles correspondants sont égaux). Si la lumière est à distance finie (s'il s'agit d'une ampoule sous le porche d'une maison par exemple), le papillon fait un angle constant avec la droite (PL) , et cela l'entraîne dans un mouvement en spirale autour de L (ci-après).



Dans le premier cas, l'étude du problème proposé – que se passe-t-il si l'on suppose que la trajectoire fait un angle constant par rapport à la source de lumière ? –, la « synthèse » devrait mettre en avant une réciproque inhabituelle d'un théorème « bien connu », celui qui caractérise le parallélisme de deux droites coupées par une sécante commune faisant avec elles des angles *correspondants* égaux : cette réciproque inconnue énoncerait que, si des droites (P_0P_1) et (P_1P_2) font avec deux parallèles des angles « correspondants » *égaux*, alors P_0 , P_1 et P_2 sont alignés.

Que se passe-t-il dans le second cas ? On peut établir graphiquement le fait que le vol est « en spirale ». À un certain niveau, une mathématisation plus poussée peut-être la suivante. On suppose que l'insecte « fait le point » régulièrement, cette régularité étant entendue comme l'égalité des angles $\widehat{P_0LP_1} = \widehat{P_1LP_2} = \dots$



Les triangles P_0LP_1 , P_1LP_2 , etc., sont semblables : on passe de P_0 à P_1 par la similitude s de centre L , d'angle $\alpha = \widehat{P_0LP_1} = \widehat{P_1LP_2} = \dots$ et de rapport $k = LP_1/LP_0$. On a ainsi, avec des notations évidentes, $z_1 = k e^{i\alpha} z_0$, $z_2 = k e^{i\alpha} z_1$, ..., et, plus généralement, $z_{n+1} = k e^{i\alpha} z_n$, et donc,

pour tout $n \geq 1$, $z_n = k^n e^{in\alpha} z_0$. Il vient donc $z_n = r_0 k^n e^{i(n\alpha + \theta_0)}$. Posons $\theta_n = n\alpha + \theta_0$; on a $n = \frac{\theta_n - \theta_0}{\alpha} = \frac{\theta_n}{\alpha} + \left(-\frac{\theta_0}{\alpha}\right)$ et donc $z_n = r_0 k^{\theta_n/\alpha} k^{-\theta_0/\alpha} e^{i\theta_n} = (r_0 k^{-\theta_0/\alpha}) e^{(\ln k/\alpha)\theta_n} e^{i\theta_n}$. En coordonnées polaires, on a donc $r_n = a e^{b\theta_n}$ où $a = r_0 k^{-\theta_0/\alpha} = r_0 e^{-(\ln k/\alpha)\theta_0}$ et $b = \ln k/\alpha$. Les points P_0, P_1, P_2 , etc., se trouvent ainsi sur la *spirale logarithmique* d'équation polaire $r = a e^{b\theta}$. (On notera que si $b = 0$, c'est-à-dire si $k = 1$, la courbe est un cercle.) La spirale logarithmique est une entité mathématique qui a été bien étudiée et depuis longtemps : ainsi on démontre, à l'aide des outils de la géométrie différentielle élémentaire, que, si un point P décrit une courbe telle que la droite (LP) et la tangente en P à la courbe font un angle constant, la courbe est une spirale logarithmique ou un cercle (voir par exemple Guy Laville, *Courbes et surfaces*, Ellipses, 2004, p. 52).

Le fait de se rendre disponibles les outils mathématiques utiles participe de ce que je nommerai la *viabilisation mathématique* de l'étude d'un problème. Quel que soit le niveau de l'étude (et, corrélativement, de l'outillage mathématique utilisé), cette viabilisation, indispensable, identifie, élabore et organise les principaux composants mathématiques qui entreront ultérieurement dans la synthèse. Cette viabilisation est l'affaire *de la classe* : ainsi l'étude de ce qui se passe quand les droites (PL) conservent la même direction ou lorsque, au contraire, le point L est « à distance finie » fait-elle partie du PER dirigé par le professeur : elle devra produire deux résultats distincts, à des niveaux distincts de traitement mathématique.

Mais un autre niveau de viabilisation existe, que j'appellerai le niveau de *l'infrastructure mathématique*, celle qui, par exemple, rend disponibles les *systèmes de nombres* utiles, ou, encore, à un autre niveau, la *structure vectorielle du plan*. La classe, en ce cas, devra étudier, non un *problème*, mais une *œuvre* (mathématique), élaborée spécialement pour permettre le travail des classes de tel niveau, comme certaines œuvres mathématiques sont élaborées spécialement pour permettre le travail des ingénieurs, ou des chimistes, ou des biologistes, etc. Bien entendu, l'étude de cette œuvre conduira à étudier un grand nombre de problèmes dont la plupart seront *intramathématiques*. Le relèvement de l'enseignement des mathématiques suppose ainsi tout un travail infrastructurel, dont la réforme des mathématiques modernes a, il y a un demi-siècle, illustré le genre superlativement, mais qu'il s'agit aujourd'hui de reprendre à nouveaux frais en adéquation avec les besoins de viabilisation mathématique effectivement éprouvés.

À cela j'ajouterai encore la création d'une *infrastructure didactique*, que j'ai évoquée en citant la notion de PER – et dont cet exposé participe si peu que ce soit. En tout, la reconstruction à entreprendre comporte ainsi trois dimensions solidaires : celles de la construction d'un répertoire de grands problèmes ; celle de la création d'une infrastructure mathématique et didactique idoine ; celle de l'étude en classe des grands problèmes ainsi que des œuvres mathématiques indispensables à la viabilisation mathématique du travail conduit dans le cadre d'une infrastructure didactique adaptée.