

Quel avenir pour l'enseignement des mathématiques ?

Yves Chevallard
UMR ADEF & IUFM d'Aix-Marseille

1. Un passé à dépasser

La place des mathématiques dans l'enseignement secondaire a été si anciennement conquise qu'on est parfois porté à y voir un droit inaliénable de la gent mathématicienne. Fruit de longues luttes entamées dès la seconde moitié du XVI^e siècle, dont les victoires s'accumulent à la fin du XVII^e siècle avec la création de chaires de mathématiques dans un nombre croissant de collèges, l'enseignement secondaire des mathématiques achève peut-être sous nos yeux un cycle de vie de longue durée ¹.

Dans cette perspective, il n'est pas déraisonnable de regarder la diminution entêtée des horaires depuis deux décennies comme un effet plus qu'une cause, écho institutionnel d'une dégradation épistémologique et culturelle corrélative de l'avènement progressif d'un rapport scolaire aux savoirs mathématiques tout à la fois formaliste et nonchalant, ludique et vaguement esthétisant. L'enseignement actuel ressemble le plus souvent à une visite guidée de monuments mathématiques autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessé d'être comprises et reconnues.

Ce processus de « *monumentalisation* » est allé de pair, dans la deuxième moitié du XX^e siècle, avec un mouvement de *purification épistémologique* qui a fait disparaître à peu près tout moyen de rendre sensible le rôle de la connaissance mathématique dans la production et la compréhension raisonnée des sociétés et de la vie des hommes.

Le problème posé par cette évolution historique n'est sans doute pas de ceux que l'on pourra résoudre à vil prix. Il suppose un profond *aggiornamento*, fondé sur une *nouvelle épistémologie scolaire*. Par delà la crise actuelle, quel avenir pourrions-nous donner à l'enseignement des mathématiques, de la maternelle à l'université ?

2. La lente dérive du continent mathématique

Depuis plusieurs années, en France et ailleurs, on observe avec inquiétude une baisse sensible de l'attrait des études scientifiques. C'est ainsi que, parmi bien d'autres témoignages, on lisait dans le quotidien régional bourguignon *Le Bien Public* du mardi 29 juillet 2003 ce cri d'alarme :

Les filières scientifiques classiques (mathématiques, physique, chimie) ne séduisent plus les étudiants. Depuis quelques années, ces filières connaissent une baisse des effectifs. « Il ne s'agit pas d'un phénomène local », précise Jean-Paul Dufour, directeur de l'UFR des sciences et des techniques à l'Université de Bourgogne. Ce problème touche toute l'Europe : « Il est apparu dans les années 1992-1995 en Allemagne, puis il est arrivé en France, en Grande-Bretagne, en Espagne, en Italie ».

Le responsable universitaire interrogé donne des chiffres : en 1995, 90 étudiants étaient inscrits, dans son UFR, en licence de physique et 130 en licence de mathématiques ; en 2002, ils ne sont plus, respectivement, que 18 et 86. En mathématiques, la baisse est de plus d'un tiers.

Entre 1995 et 2001, le nombre d'étudiants inscrits dans les DEUG scientifiques (sciences et structure de la matière, sciences de la nature et de la vie) passe de 52 478 à

¹ Voir Michèle Artaud, « Conditions et contraintes de l'existence des mathématiques dans l'enseignement général : permanences et évolutions », *Petit x*, n° 50, 1999, pp. 23-38.

32 946, soit une diminution de plus de 37 % : la perte de substance est spectaculaire. Ce tableau est bien sûr incomplet et, à certains égards, trompeur. Sur la même période, le nombre d'élèves entrant dans les classes de mathématiques supérieures reste stable, passant de 14 037 en 1992 à 14 850 en 2001 (avec un « pic » de 16492 en 1995). Plus spectaculairement, on assiste de 1985 à 2000 au *doublément* du nombre d'ingénieurs diplômés².

La complexité des évolutions constatées s'inscrit pourtant à l'intérieur d'un mouvement d'ampleur « géologique », qui éloigne des sciences de la nature et des mathématiques le centre de gravité de la formation des nouvelles générations. Dans une étude intitulée *Que faire des universités ?*³, le philosophe Alain Renaut souligne à cet égard la surcharge durable des effectifs dans les disciplines de tradition « littéraire » :

Plus d'un tiers des étudiants des cursus de lettres et sciences humaines (500 000), contre un peu moins de 350 000 en droit et sciences économiques, un peu plus de 200 000 en sciences et 140 000 dans les secteurs de santé : répartition là encore très inégale, où la proportion des inscrits en lettres et en sciences humaines, même si elle diminue quelque peu depuis un sommet atteint en 1994-1995 (38 %), est étonnamment forte dans des filières sans beaucoup de débouchés professionnels directs.

Le même auteur précise encore :

... les filières les plus peuplées sont devenues celles où l'ouverture sur des professions liées au contenu des études est par définition la moins évidente. Ainsi y a-t-il actuellement plus de 13 000 étudiants en philosophie inscrits dans nos universités, dont plus de 2 000 entament leur quatrième année...

Si l'on examine cette situation du point de vue des débouchés qu'offre le professorat de l'enseignement secondaire, la conclusion n'est guère douteuse : il y a à la fois pléthore de postulants potentiels en philosophie (par exemple) et appauvrissement à terme du « vivier » de candidats en mathématiques.

À suivre Alain Renaut, toujours, l'évolution actuelle avait été prévue dès 1970 par l'historien Antoine Prost⁴, dont les analyses peuvent nous aider à comprendre le phénomène que nous observons aujourd'hui :

[Antoine Prost] se demandait dans un article si « un enseignement supérieur de masse peut ne pas être massivement *littéraire* ». De fait, c'est aux formations « littéraires » (au sens large des humanités) que l'explosion démographique des universités a le plus largement « bénéficié », en accroissant leur public dans des proportions sans commune mesure avec celles qu'ont pu enregistrer les autres formations : comment, dès lors, ne pas envisager une corrélation et ne pas se demander « si la croissance des enseignements supérieurs littéraires n'est pas, précisément, le signe d'une mutation irréversible dans la fonction même de l'enseignement supérieur » ?

Le motif de cette évolution se trouverait dans un changement profond de la *signification sociale et culturelle des études supérieures*, qui confirmerait l'hypothèse d'Antoine Prost. C'est en tout cas vers une telle explication que s'oriente Alain Renaut, qui écrit :

Il se pourrait même, me semble-t-il, que la manière dont l'élargissement exponentiel du public universitaire a concentré ses effets dans le domaine des humanités tienne, non pas à l'illusion selon laquelle les diplômes y seraient davantage accessibles à une population plus diversifiée que dans l'université d'autrefois, mais à une profonde transformation de la demande adressée à l'institution universitaire par ce public élargi. S'essayant à cerner cette transformation, Antoine Prost formulait en 1970 une hypothèse qu'il est désormais possible d'approfondir à l'aide de ce que nous ont mieux fait percevoir encore les trois dernières décennies : « L'enseignement supérieur deviendrait un complément de culture générale sans finalité professionnelle explicite, une sorte d'équivalent de ce qu'étaient les lycées de 1920 ».

² Daniel Duverney, *Réflexion sur la désaffection des études scientifiques*, <http://smf.emath.fr/Enseignement/>, décembre 2002.

³ Bayard Éditions, Paris, 2002.

⁴ « De quelques problèmes universitaires en France et aux États-Unis », *Esprit*, février 1970.

En consonance avec l'hypothèse d'une « littérisation » des études supérieures (mais non des études secondaires : la série L des lycées est, au contraire, en nette perte de vitesse), on constate une lente *excentration* des mathématiques et des sciences de la nature au sein du système éducatif. En France métropolitaine, le nombre des bacheliers S est passé de 140 497 en 1994 à 118 532 en 1998, soit une baisse de plus de 15 %. Après une légère remontée en 1999 et 2000, ce taux est redescendu en 2001 à son niveau de 1990, alors que, par ailleurs, le nombre des bacheliers autres que S a augmenté de près de 38 % entre 1990 et 2001. En 2003, l'effectif des lauréats du bac S (en France métropolitaine toujours) a été de 131 545, contre 125 341 en 2002 ; mais l'importance du taux de réussite 2003 (84,7 %, contre 80,2 % en 2002) masque en fait une légère diminution du nombre des *candidats* (156 367 en 2002, 155 381 en 2003). Au cours des dernières années, le tableau (ci-après) des réussites aux baccalauréats L, ES, S (en France métropolitaine augmentée des DOM) fait apparaître des évolutions contrastées : chute des effectifs en L (les études « littéraires » supérieures ne sont pas le prolongement de la série L du lycée), stabilité relative des effectifs en ES, baisse tendancielle de la série S ⁵.

	1995	1998	1999	2000	2001	2002	% filles
L	71 460	69 017	62 363	59 642	56 673	50 320	83,6
ES	76 555	74 794	75 756	75 299	75 459	78 967	65,7
S	139 031	131 302	128 166	136 214	126 653	128 905	45,6

La progressive dérive du continent mathématique (et, plus largement, « scientifique ») à l'intérieur du système éducatif est l'un des problèmes cruciaux auxquels responsables et acteurs de l'enseignement des mathématiques doivent s'affronter aujourd'hui.

3. Une réaction obsidionale

Face à cette mutation, la famille mathématique, naguère encore si prospère et sûre d'elle-même, se trouble. Devant l'effondrement annoncé du monde ancien, d'aucuns sont tentés de construire une « *arche de Noé* » *mathématique* (ou mathématico-scientifique), au prix d'une rupture franche de l'École de la république en une pluralité de filières hétérogènes, et au risque de faire de l'École l'image spéculaire d'un monde social lui-même fragmenté. Ce climat de naïve nostalgie narcissique, qui touche, semble-t-il, tous les niveaux d'activité et de responsabilité, n'ouvre guère de voie d'avenir. Surtout, il fait apparemment sans regret ni remords le sacrifice de la *diffusion des connaissances mathématiques hors du cénacle de la famille mathématique*, dans la foule bigarrée et innombrable des non-mathématiciens qui ont, qu'ils en aient conscience ou non, des *besoins mathématiques*. Du même coup, il renonce à *penser* et à affronter le problème posé par la dérive du continent mathématique pour se contenter d'en *compenser* localement – et momentanément – les effets jugés délétères pour la survie de la « famille mathématique » *stricto sensu*.

S'il est vrai que ce mouvement de repli vers l'ombilic mathématique est une réaction souvent passionnelle au mouvement d'excentration des mathématiques au sein du système éducatif français, on peut le regarder aussi comme *l'une des causes* les plus effectives d'une telle dérive. On notera d'abord, de ce point de vue, la corrélation entre deux ordres de faits : en bien des cas, la réaction à la dérive centrifuge du continent mathématique va de pair avec une propension – au moins idéologique – à l'*autarcie épistémologique*, voire à l'*autisme disciplinaire*. Pour quelques-uns même, le repliement recherché comme salvateur pourrait prendre pour devise : les mathématiques, rien que les mathématiques et, par conséquent, *pas toutes* les mathématiques ! Le mot d'ordre de pureté épistémologique conduit en effet à

⁵ On notera le déficit de filles parmi les titulaires du bac S, phénomène d'autant plus notable que les filles ont un taux de réussite supérieur à celui des garçons, 82,8 % contre 78 % en 2002 par exemple.

exclure une bonne part des mathématiques *naissantes* et même déjà des mathématiques *récentes* dès lors qu'elles ont le démérite d'apparaître comme le fruit de l'union métisse du mathématique et du non-mathématique. En cela les « mainteneurs » d'une tradition qui se meurt feignent d'ignorer le fait historique essentiel du développement des mathématiques à partir de leurs périphéries, au contact des problèmes soulevés en d'autres champs de l'activité sociale.

À titre d'illustration d'une telle posture obsidionale, on citera ici un plaidoyer *contre* l'introduction des probabilités en classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques dû à un ancien président de l'Union des professeurs de Spéciales, qui n'hésite pas à écrire : « Personnellement, la simple perspective d'un problème de probas à l'ENS Ulm me ferait changer de carrière ⁶. » Selon une rhétorique argumentative toute classique, enseigner les probabilités en CPGE serait à la fois trop et... trop peu ⁷ :

Depuis que le débat a été lancé, je me suis plongé dans divers ouvrages de probabilités. Disons que l'on peut les classer en deux catégories : les ouvrages de modélisation, les ouvrages de théorie. Les premiers (correspondant en gros au programme de probas en prépas commerciales), s'ils sont intéressants du point de vue des activités de modélisation, n'apportent strictement rien du point de vue des objectifs d'apprentissage de la démonstration et de la rigueur dont je parlais ci-dessus ; ils consistent à reconnaître sur un problème donné un cadre probabiliste déjà rencontré (probabilités indépendantes, probabilités conditionnelles, lois de Bernoulli, normale, hypergéométrique, de Poisson, uniforme, gaussienne [*sic*]) et à appliquer les formules correspondantes, avec éventuellement à la fin une réflexion sur la pertinence de la modélisation. Quant aux ouvrages de théorie ils dépassent de loin en abstraction et en pré-requis les possibilités de nos élèves (théorie de la mesure, espaces de Hilbert, chaînes de Markov, martingales, mouvement brownien, calcul différentiel stochastique, etc.). Ni les uns, ni les autres ne correspondent à nos besoins (sauf les premiers pour certains TIPE).

On aura noté l'usage stigmatisant du terme *modélisation* : l'activité de modélisation est ici présentée comme *didactiquement peu pertinente* car elle viendrait *toujours trop tôt* dans les cursus de formation, et *mathématiquement ambiguë*, voire *malsaine*, car on y manipulerait par force des mathématiques peu solides. Or, en règle générale, les germes de mathématiques nouvelles apparaissent d'abord cristallisés en des *modèles* de phénomènes souvent extramathématiques, d'où ils émergent pour s'étoffer et se déployer en autant de nouvelles *théories mathématiques* inédites, que leurs servants tenteront alors de faire accréditer comme appartenant authentiquement au continent mathématique. C'est à la reconnaissance de ces processus historiques fondamentaux de création de mathématiques que s'opposent donc, parfois avec la dernière énergie, les gardiens autoproclamés du sanctuaire mathématico-mathématique qui, jouant l'antique scénario des pressions barbares sur les marches romaines, refusent ces mathématiques tard venues – mathématiques de la frontière qui ne demandent pourtant qu'à trouver place aux marges de la cité mathématique.

4. Le temps de l'expansion : les mathématiques mixtes

L'attitude de refus parfois exacerbé à l'endroit des mathématiques métisses est, dans la longue durée historique, un fait relativement récent. Pour mieux le voir, il faut revenir aux premières décennies du XVII^e siècle, où s'inaugure un climat d'ouverture épistémologique qui durera deux bons siècles. Vers 1600 en effet un changement essentiel intervient par lequel les élites intellectuelles, renonçant prudemment à toute prétention en matière de « surnature », dont les

⁶ Denis Monasse, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand. Ce plaidoyer est présenté comme une réaction à une réunion de travail tenue à l'ENS de la rue d'Ulm le 8 juin 2000 sur le thème *Quelles mathématiques enseigner en classes préparatoires aux grandes écoles ?* On en trouvera l'intégralité à l'adresse suivante : <http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes/SMFTribunelibre3a.rtf>.

⁷ Les TIPE que mentionne l'auteur sont les *travaux d'initiative personnelle encadrés*, introduits en CPGE à la rentrée 1995 et qui ont inspiré les TPE (travaux personnels encadrés) mis en place au lycée à la rentrée 2000.

Églises conservent le monopole brutal⁸, se vouent à l'étude du monde d'ici-bas. De ce basculement un historien fait en peu de mots la peinture suivante⁹ :

C'est au début du XVII^e siècle que l'on construit de nouveaux cadres de pensée, dans une nouvelle perspective : le droit, la politique et surtout la science et la philosophie se libèrent de la théologie, des autorités traditionnelles et plus généralement d'une rationalité de soumission pour élaborer des méthodes destinées à satisfaire les intérêts temporels des hommes. Désormais, il s'agit moins de s'intégrer à l'ordre des choses que d'en maîtriser le fonctionnement à son profit, et les principes comptent moins que les effets, vérifiés par l'expérience.

Le renoncement porte aussi sur les affaires de la Cité, dont l'État garde l'absolu monopole¹⁰. Ainsi nombre d'intellectuels se font-ils « philosophes naturels », en donnant pour unique objet à leur soif de connaissance et d'action la seule *nature*. À propos de cette révolution scientifique et culturelle, dont les hérauts ou les artisans les plus illustres sont en Angleterre Francis Bacon (1561-1626) et, en Italie, Galilée (1564-1642), l'historien déjà cité note¹¹ :

Autant ou plus que la Renaissance, la première moitié du XVII^e siècle européen est marquée par un effort exceptionnel des hommes pour s'approprier leurs conditionnements. Peut-être n'y avait-il pas eu, depuis l'Antiquité, de savant, de philosophe, d'homme politique ou de juriste aussi importants, aussi novateurs que Galilée, Descartes, Richelieu ou Grotius. Les principaux penseurs ne sont plus des héritiers – théologiens, philosophes contemplatifs, sages, érudits, lettrés –, propagateurs ou restaurateurs de l'ordre originel, comme ce fut le cas de Thomas d'Aquin à Calvin et d'Érasme à Montaigne. Ce ne sont pas encore des politiques, comme le seront Hobbes, Spinoza, Locke, Voltaire et Rousseau : il n'est pas encore possible de prétendre changer l'ordre social – surtout dans la France absolutiste. Mais on peut déjà chercher à maîtriser la nature. Ce sont donc des savants – Bacon, Galilée, Descartes, Gassendi –, ardemment engagés dans une activité dont leurs prédécesseurs réprouvaient la prétention et dédaignaient les applications. C'est avec eux qu'apparaît la science moderne.

C'est dans ce contexte d'effervescence intellectuelle que, par un essai fameux, publié en 1618, intitulé *Il Saggiatore* (« L'Essayeur »), Galilée installe les mathématiques au cœur de la connaissance du monde naturel, traçant ainsi le programme de travail des siècles à venir¹² :

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne unamente parola ; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Pour Bacon, ses contemporains et ses successeurs, le continent mathématique est essentiellement *ouvert* à des aventures scientifiques à la rencontre du mathématique et du non-mathématique, ce que résume alors une expression clé, celle de *mathématiques mixtes*. Ces mathématiques s'établissent, sur le continent mathématique, à la périphérie des

⁸ Le 17 février 1600, Giordano Bruno est brûlé vif sur le Campo dei Fiori à Rome.

⁹ Jean Rohou, *Le XVII^e siècle, une révolution de la condition humaine*, Éditions du Seuil, Paris, 2002, p. 201.

¹⁰ En 1764 encore, un arrêt du conseil du Roi fera défense « d'imprimer sur les matières d'administration, sous peine d'être poursuivi » (André Morellet, *Mémoires sur le dix-huitième siècle et sur la Révolution* (1822), Mercure de France, Paris, 2000, p. 158).

¹¹ *Op. cit.*, p. 202.

¹² « La philosophie est écrite dans ce grand livre qui continuellement est ouvert devant nos yeux – je veux dire l'univers –, mais qui ne se peut comprendre si l'on n'apprend pas d'abord la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique, et les caractères sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques, sans l'aide desquels il est impossible d'en comprendre un seul mot ; sans lesquels on ne fait que s'agiter en vain en un obscur labyrinthe. »

mathématiques « pures »¹³ et, dans *The Advancement of Learning* (1605), Bacon les présente ainsi¹⁴ :

Les mathématiques sont soit pures soit mixtes [c'est-à-dire mêlées de matière]. Appartiennent aux mathématiques pures les sciences qui traitent de la quantité définie, absolument séparée de tout axiome de philosophie naturelle ; il y en a deux, la géométrie et l'arithmétique. La première traite de la quantité continue, la seconde de la quantité discrète. Les mathématiques mixtes ont pour objet quelques axiomes ou parties de la philosophie naturelle, et elles s'occupent de la quantité déterminée en tant que celle-ci leur est annexe et secondaire. Car nombreuses sont les parties de la nature qui ne peuvent être découvertes de manière suffisamment sagace, ni mises en évidence de manière suffisamment fine, ni adaptées à l'utilité d'une manière suffisamment adroite, sans l'aide et l'intervention des mathématiques. De cette espèce sont l'optique, la musique, l'astronomie, la géographie, l'architecture, la science des machines, et quelques autres.

Et Bacon d'ajouter¹⁵ :

Quant aux mathématiques mixtes, je me permettrai simplement cette prédiction : de plus nombreuses espèces de ces mathématiques ne peuvent manquer d'apparaître à mesure que la nature sera davantage découverte. En voilà assez de la science naturelle, ou de sa partie spéculative.

Un siècle et demi plus tard, la notion de mathématiques mixtes figure encore en bonne place dans l'article MATHEMATIQUE OU MATHEMATIQUES rédigé par d'Alembert pour l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (1751-1772) qu'il dirige avec Diderot :

Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle *Mathématiques pures*, considère les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue : dans le premier cas, les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second, Géométrie [...] La seconde classe s'appelle *Mathématiques mixtes* ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers [...]. Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c.

Cette notion sera formalisée par d'Alembert dans l'article APPLICATION de l'*Encyclopédie*, où il s'appuie sur l'exemple de la « catoptrique » (l'optique des miroirs), qui, à l'instar des autres mathématiques mixtes, se déploie de façon entièrement mathématique une fois reconnues un petit nombre de vérités expérimentales :

Une seule observation ou expérience donne souvent toute une science. Supposez, comme on le sait par l'expérience, que les rayons de lumière se réfléchissent en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion, vous aurez toute la Catoptrique [...]. Cette expérience une fois admise, la Catoptrique devient une science purement géométrique, puisqu'elle se réduit à comparer des angles et des lignes [...]. Il en est de même d'une infinité d'autres.

On retrouve ainsi que le sous-continent des mathématiques mixtes peut être étendu presque indéfiniment. Les mathématiques mixtes vont en effet étendre leur empire, entraînant avec elles les mathématiques pures, même si celles-ci trouvent en elles-mêmes certaines des raisons de leur progrès. Les besoins mathématiques engendrés par le souci de penser mathématiquement le réel (naturel, social ou... mathématique), de l'engendrer et d'agir sur lui constitue le premier moteur du processus historique de création et de développement des mathématiques.

¹³ L'expression « mathématiques mixtes » ne sera remplacée qu'au XIX^e siècle par l'expression, aujourd'hui courante, de mathématiques *appliquées*.

¹⁴ Francis Bacon, *Du progrès et de la promotion des savoirs*, traduction de Michèle Le Doeuff, Gallimard, Paris, 1991, pp. 130-131.

¹⁵ *Ibid.*

5. Le temps de la rétraction : mathématiques et applications

L'idée même que le mathématique naît du non-mathématique est demeurée longtemps présente et active dans la culture mathématique commune. C'est ainsi que, dans une étude intitulée *La mesure des grandeurs* (1935), Henri Lebesgue (1875-1941) rappelle en ces termes l'origine empirique de l'arithmétique, qui n'en appartient pas moins au noyau des mathématiques « pures »¹⁶ :

L'arithmétique [...] n'utilise qu'un très petit nombre d'expériences, dont chacune a été répétée un nombre prodigieux de fois par chaque homme, depuis qu'il y a des hommes. Aussi nous savons, sans hésitation, dans quels cas elle ne s'applique pas. Dans ces derniers cas, l'idée d'appliquer l'arithmétique ne nous effleure pas un instant ; nous ne pensons à appliquer l'arithmétique que lorsqu'elle s'applique, si bien que nous oublions qu'il y a des cas où elle ne s'applique pas : deux et deux font quatre, affirmons-nous. « Dans un verre je verse deux liquides, dans un autre deux liquides. Je verse le tout dans un vase, contiendra-t-il quatre liquides ? – C'est de la mauvais fois, dites-vous, ce n'est pas une question d'arithmétique.

– Dans une cage je mets deux animaux, puis encore deux animaux ; combien la cage contient-elle d'animaux ? – Votre mauvais foi, dites-vous, est plus éclatante encore ; cela dépend de l'espèce de ces animaux, l'un d'entre eux pourrait dévorer les autres ; il faut aussi savoir si le décompte doit avoir lieu immédiatement ou dans un an, alors que les animaux pourraient être morts ou avoir eu des petits. En somme, vous parlez de collections desquelles on ne sait si elles sont immuables, si chaque objet y garde son individualité, s'il n'y a pas des objets qui apparaissent ou qui disparaissent.

– Qu'est-ce à dire, sinon que certaines conditions doivent être remplies pour que l'arithmétique s'applique ? Quant à la règle, pour reconnaître si elle s'applique, que vous venez de me donner, elle est certes excellente pratiquement, expérimentalement, mais elle n'a aucune valeur logique. Elle est l'aveu que l'arithmétique s'applique quand elle s'applique. Et c'est pourquoi on ne peut pas démontrer que deux et deux font quatre, ce qui est pourtant la vérité par excellence, car jamais nous ne nous trompons en l'utilisant.

Lebesgue n'ignore certes pas que l'arithmétique s'est constituée en une *organisation mathématique* autonome, axiomatique et formelle. Mais même lorsqu'on en arrive à ce niveau d'élaboration mathématique, la base expérimentale reste active, non plus alors dans l'organisation mathématique elle-même, mais dans l'*organisation didactique* nécessaire pour la constituer¹⁷ :

Dans les exposés purement logiques, où l'arithmétique s'occupe de symboles vidés de toute signification, c'est grâce seulement à un axiome que deux et deux font quatre. Je n'ai pas à parler ici de ce genre d'exposés, mais je puis bien dire que, si leur importance mathématique est considérable, s'ils nous ont beaucoup appris, ils me paraîtraient voués à un insuccès absolu si on voulait les considérer comme élucidant la notion de nombre sans faire appel à l'expérience. Dans ces jeux logiques, il faut, en effet, manier des collections de symboles, réalisés ou pensés peu importe, et c'est alors qu'interviennent toutes nos connaissances, acquises grâce à l'expérience, relatives aux collections, c'est-à-dire aux nombres.

De Bacon à Lebesgue, de l'évidence au rappel insistant que s'est-il donc passé ? Le continent mathématique parcouru en tous sens et avec tant d'enthousiasme depuis la deuxième moitié du XVI^e siècle va se réduire peu à peu après 1800, parce que, en même temps que les mathématiques « pures » connaissent un formidable développement, les mathématiques mixtes s'en détachent une à une en prenant leur autonomie épistémologique et leur indépendance institutionnelle. L'adjectif « mixte » va ainsi être progressivement remplacé par « appliqué » – la nuance est significative. Si la huitième édition (1853-1860) de l'*Encyclopædia Britannica* subdivise toujours les mathématiques en pures et mixtes, la neuvième édition (1875-1889) distingue les mathématiques pures des mathématiques

¹⁶ Henri Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard, Paris, 1975, pp. 5-6.

¹⁷ *Op. cit.*, p. 6.

appliquées. En 1908, certes, l'*Oxford English Dictionary* mentionne encore l'expression « *mixed science* », mais c'est pour en dire qu'elle est devenue obsolète, « *except for mixed mathematics* ». En France et ailleurs, l'expression de mathématiques mixtes semble avoir entamé plus tôt encore son déclin : dès 1810, Joseph-Diez Gergonne (1771-1859) crée ses *Annales de mathématiques pures et appliquées*. En Allemagne, August Leopold Crelle (1780-1855) lance en 1826 le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, « journal de mathématiques pures et appliquées » vite surnommé, devant l'inflation théoricienne qui s'y donne libre cours, *Journal für die reine unangewandte Mathematik*, « journal de mathématique pures inappliquées ».

Il y a les mots et il y a les choses. Dans un *Dictionnaire des mathématiques appliquées* paru en 1874, l'auteur, H. Sonnet, « docteur ès sciences, inspecteur de l'académie de Paris, professeur d'analyse et de mécanique à l'École centrale des arts et manufactures, ancien répétiteur de mécanique industrielle à la même école », offre à ses lecteurs un vaste panorama des mathématiques mixtes, puisqu'il y expose l'application des mathématiques « à l'architecture, à l'arithmétique commerciale, à l'arpentage, à l'artillerie, aux assurances, à la balistique, à la banque, à la charpente, aux chemins de fer, à la cinématique, à la construction navale, à la cosmographie, à la coupe des pierres, au dessin linéaire, aux établissements de prévoyance, à la fortification, à la géodésie, à la géographie, à la géométrie descriptive, à l'horlogerie, à l'hydraulique, à l'hydrostatique, aux machines, à la mécanique générale, à la mécanique des gaz, à la navigation, aux ombres, à la perspective, à la population, aux probabilités, aux questions de bourse, à la topographie, aux travaux publics, aux voies de communication, etc., etc. » Déjà, pourtant, tout un ensemble de domaines scientifiques ont pris leur indépendance et quitté le sous-continent des mathématiques mixtes. Dans sa préface, l'auteur précise :

On désigne sous le nom de *Mathématiques appliquées* un ensemble de connaissances qu'il est plus facile d'énumérer que de réunir sous une définition précise. Cette définition n'embrasse pas, en effet, toutes les applications des mathématiques ; car l'Astronomie, par exemple, ainsi que la Physique appliquée, constituent des sciences à part, quoiqu'elles empruntent l'une et l'autre le secours de la Géométrie et de l'Analyse.

On saisit là le phénomène qui, sur deux siècles environ, va progressivement vider les mathématiques mixtes de leurs contenus : des domaines qui relevaient des mathématiques *lato sensu* finissent par s'émanciper, et prennent leur autonomie scientifique. Ainsi en va-t-il par exemple de l'*astronomie*, par contraste avec la *cosmographie*, qui, elle, demeure l'affaire du « mathématicien appliqué ». Trois degrés donc : mathématique mixte, application des mathématiques, science autonome. Tout au long du XIX^e siècle, de nouveaux domaines scientifiques prennent ainsi leur indépendance. Les « mélanges » physico-mathématiques chers à d'Alembert semblent devenus instables, et leurs composants se séparent, selon un mouvement d'ensemble dont un historien des mathématiques mixtes prend acte en ces termes¹⁸ :

More and more “pure” mathematical theories of physics were developed to be “applied” to more and more physically obtained data. By 1875 theories were no longer “mixed” with experience, they were “applied” to experience.

Que se passe-t-il, simultanément, dans l'enseignement primaire et secondaire ? Une évolution semblable s'y observe, quoique en décalage dans le temps. Les mathématiques mixtes, en effet, y demeurent longtemps fortement présentes : ainsi, il y a cinquante ans encore, la *statique* figurait-elle toujours au programme de mathématiques des classes terminales, avec,

¹⁸ Gary I. Brown, « The Evolution of the Term “Mixed Mathematics” », *Journal of the History of Ideas*, vol. 52, n° 1, janvier-mars 1991, pp. 81-102.

notamment, le thème des *machines simples*¹⁹, qui ne disparaîtra des programmes de mathématiques qu'au début des années 1960. La tradition d'ouverture épistémologique est bien illustrée par le programme de mathématiques du 10 juillet 1925 pour les « classes de mathématiques » (c'est-à-dire pour les classes terminales scientifiques). Ce programme se divise en huit domaines : les quatre premiers (arithmétique, algèbre, trigonométrie, géométrie) relèvent pour l'essentiel des mathématiques pures, tout en contenant certains thèmes appliqués traditionnels, relevant en particulier des mathématiques *financières* (intérêts composés, annuités, etc.) ; mais les quatre autres domaines seraient vraisemblablement regardés aujourd'hui par nombre de professeurs de mathématiques comme étrangers à leur compétence « naturelle » : *géométrie descriptive et géométrie cotée, cinématique, statique, cosmographie*.

Sur la carte des mathématiques enseignées, à vrai dire, certaines des régions précédentes étaient d'ores et déjà en difficulté. Les auteurs anonymes d'un ouvrage de préparation au baccalauréat publié au début des années 1940 notent par exemple :

Le programme relatif à la Géométrie Descriptive et à la Géométrie Cotée du Cours de Mathématiques Élémentaires est très restreint et prête peu aux problèmes. En fait, depuis 10 ans, le nombre de problèmes donnés sur ce sujet aux Examens est à peu près nul. Il faut cependant en prévoir de possibles...

Mais d'autres régions du continent mathématique résisteront plus longtemps au processus d'épuration. Ainsi la cinématique survécut-elle jusqu'au milieu des années 1980. Quant à la cosmographie, rebaptisée astronomie, elle demeurera longtemps présente dans les classes terminales littéraires, pour n'en disparaître qu'avec les programmes de 1994.

Une remontée dans un passé plus lointain confirmerait cette longue présence, à côté des domaines traditionnels de mathématiques pures, de domaines tout aussi traditionnels relevant des mathématiques mixtes. Un exemple entre tous est celui de la *topographie*, présente dans les programmes de mathématiques tout au long du XIX^e siècle et au-delà, sous des noms variables – *arpentage* ou *levé de plans* surtout. La grande réforme de 1902, qui mit en place l'enseignement secondaire « moderne », n'abolit pas cette tradition. Les programmes de 1905, qui, pour ce qui est des mathématiques, retouchèrent les programmes de 1902 sans doute trop vite rédigés, soulignaient l'importance de l'étude *in situ* de la topographie en même temps que sa fonction de motivation de l'étude de la géométrie :

Dans le même ordre d'idées, il est recommandé d'exercer les élèves à l'exécution de levés de plan, ce que l'on pourra faire sans sortir de l'établissement. Il est facile de tracer une droite joignant deux points situés dans des salles différentes, de mesurer la distance de ces points, etc. ; on insistera d'ailleurs sur l'intervention, dans ces applications, des théorèmes qui ont pu sembler être d'ordre purement spéculatif.

Au début du XX^e siècle, dans sa *Géométrie dans l'espace* (1901), deuxième volume de ses *Leçons de géométrie élémentaire* (dont le premier volume, intitulé *Géométrie plane*, avait paru en 1898), Jacques Hadamard (1865-1963) consacrait encore tout un « livre », divisé en trois chapitres (relatifs respectivement à la *planimétrie*, au *nivellement* et à l'*arpentage*), à des *Notions sur la topographie*²⁰. Pourtant la topographie disparaîtra des programmes de mathématiques dans les premières décennies du XX^e siècle²¹, après un compagnonnage de plus d'un siècle : de savoir républicain pour tous, la topographie est devenue aujourd'hui un

¹⁹ Levier, treuil, cabestan, bascule du commerce, poulies, palan, moufle, etc.

²⁰ *Op. cit.*, p. 282-313. La topographie, qui est « l'art de déterminer la forme d'un terrain », suppose le levé de plan, que le grand mathématicien présente ainsi : « Lever le plan d'un terrain, c'est noter tous les éléments qui déterminent la forme et les dimensions de ce plan. Lorsqu'on a levé le plan d'un terrain, on est à même de construire, sur le papier, une figure semblable à la projection horizontale de ce terrain, avec un rapport de similitude donné ».

²¹ Elle ne figure plus, on l'a vu en passant, dans le programme de 1925 pour les classes terminales scientifiques.

savoir professionnel spécialisé, chichement diffusé²². Victime d'une fureur purificatrice que la « réforme des mathématiques modernes » contribua à accélérer (même si nombre des artisans de cette réforme, formés dans un autre état historique du système scolaire, n'en imaginaient pas toute la puissance liquidatrice), la tradition est aujourd'hui éteinte d'ouvrir la classe de mathématiques à des savoirs métis, que nous avons désappris à penser comme mathématiques.

6. Mathématiques à visiter, mathématiques à vivre

Les restructurations internes à l'univers des sciences n'ont pas seulement affaibli les relations des mathématiques avec les si nombreux domaines de connaissance et d'action avec lesquels elles entretenaient un commerce bilatéral fécond. Les grandes réorganisations de la fin du XIX^e siècle renforcent plus généralement la séparation entre une culture « scientifique » soucieuse de manière presque exclusive des réalités physiques ou biologiques et une culture « littéraire » qui s'attribue l'exclusivité de la réflexion sur le monde social et la vie des hommes (du moins dans cette partie qui échappe au monopole maintenu des pouvoirs religieux). Fondé par le *Grand partage* tragiquement mis en place autour de 1600, le conflit n'a cessé de rebondir, tout au long du XIX^e siècle, entre une culture scolaire « classique », qui avait façonné les élites sociales depuis des siècles, et une culture « moderne » qui ne parvenait pas à se faire reconnaître au même niveau de dignité sociale et de légitimité culturelle. De ce blocage témoigne vers la fin du XIX^e siècle le projet, porté notamment par Louis Liard (1846-1917), de faire accréditer par l'École, à l'occasion de la grande réforme de 1902, la notion d'*humanités scientifiques*, c'est-à-dire l'idée qu'il y aurait, comme l'on dirait aujourd'hui, deux « entrées » dans la culture, que l'École proposerait concurremment, deux entrées conduisant à des univers scolaires distincts mais, en principe, nullement disjoints, bien que chacun tende à se présenter comme un ensemble formatif complet. Conjugué avec le confinement culturel en partie volontaire des mathématiques enseignées au sein de l'univers des sciences, cette séparation apparaît comme l'un des facteurs clés du dépérissement actuel de l'enseignement des mathématiques et de sa perte d'attraction à l'endroit des générations montantes. Telle est du moins la thèse que nous défendons ici.

Avant d'aller plus loin sur cette voie, toutefois, notons ce qui peut sonner comme un paradoxe. À cause de leur confinement culturel même, la culture scientifique et plus spécifiquement la culture mathématique ont fonctionné *aussi* comme des lieux francs pour tous ceux qui, étrangers par la naissance à la haute culture et n'en maîtrisant pas les codes, ou rebutés par l'idée même d'une telle acculturation, ont désiré s'élever *socialement* sans avoir pour autant à assumer *culturellement* un monde étrange et étranger, souvent vécu comme un danger au plan identitaire (y compris psychologiquement) et avec lequel, surtout, le choix des sciences et singulièrement des mathématiques leur permettait presque miraculeusement de n'avoir qu'un commerce des plus réduits, sans s'interdire pour autant de cultiver à leur façon un jardin secret un peu sauvage, maintenu séparé du « grand monde ». Cela a sans doute longtemps suffi à produire, année après année, le contingent des travailleurs scientifiques indispensables, de l'élite des chercheurs à l'armée innombrable des professeurs. Mais cela ne suffit guère pour que les mathématiques vivent bien au sein d'une société dont elles se sont progressivement retirées. Quels sont donc les symptômes les plus sensibles de cette souffrance tout à la fois culturelle et épistémologique ?

La rétraction progressive du corpus mathématique enseigné sur le pré carré des mathématiques pures va de pair avec un phénomène plus fondamental, plus subtil, mais non moins ravageur : l'*immotivation* croissante des mathématiques enseignées. Désireux de

²² Ainsi l'enseigne-t-on dans les classes de lycée professionnel préparant au BT ou au BEP de topographie, dans les formations de génie civil en IUT et IUP, etc.

modéliser simplement le travail mathématique en général, le mathématicien Georges Bouligand (1889-1979) a autrefois souligné la tension essentielle entre d'une part l'activité de *résolution de problèmes* et d'autre part l'activité d'élaboration d'une *synthèse* qui mette en forme l'organisation mathématique issue de la résolution des problèmes étudiés²³. Ainsi écrivait-il²⁴ :

L'évolution globale des mathématiques [apparaît] comme la résultante à chaque époque de deux formes d'activité [...] orientées, la première vers les problèmes (P), la seconde vers la synthèse (S).

Bouligand inscrit sa formule du « dualisme problèmes-synthèse » dans un schéma historique que l'on peut décrire rapidement en utilisant le vocabulaire propre à l'auteur cité. Une *activité mathématique* autonome émerge sur la base d'une activité originellement située à mi-chemin entre expérimentalisme et déductivisme, lorsque apparaissent des lacunes à première vue infranchissables mais que le mathématicien va pourtant s'efforcer de combler. Dès lors, physique et mathématique se séparent, « en dépit de leurs objets communs ». La mathématique s'arrête sur des difficultés que la physique ignore (ou croit pouvoir ignorer), s'en empare, mène la chasse aux faux concepts qu'elle s'efforce de remplacer par une conceptualisation propre. Ainsi établit-elle un premier *répertoire* où se rangent côte à côte *notions, méthodes, résultats* – répertoire qui, cependant, n'est pas encore « la synthèse ». Cette dernière résulte de l'organisation du répertoire et porte autant sur les *concepts* et les *axiomes* (l'axiomatique est l'étape ultime de la synthèse) que sur les *groupements de problèmes*. La synthèse, cependant, *est toujours à reprendre* : sous l'impulsion de nouveaux problèmes, qui se présentent d'abord isolés, un matériel opératoire emprunté à la synthèse disponible est mobilisé afin de construire la solution des problèmes nouvellement étudiés ; mais les impulsions ainsi apportées par la résolution de ces problèmes relancent alors la synthèse, en une dialectique dont Bouligand propose une analyse fine des conditions de possibilité et des mécanismes concrets.

La *tension dialectique* entre problèmes et synthèse existe surtout pour le *créateur*, à une extrémité, et pour l'*utilisateur*, à l'autre extrémité. Pour ce passeur qu'est l'enseignant, du moins dans une certaine tradition scolaire, cette tension n'est pas de mise et a tôt fait de se dissoudre par la *disparition des problèmes*, au bénéfice – si l'on peut dire – de la seule synthèse, qui devient « le cours ». Les problèmes, qui sont le nerf de la guerre de la science-en-train-de-se-faire, et qui font la valeur d'usage de la science faite, ne sont plus alors, au mieux, que des « *applications* » d'une « synthèse » toute faite que nombre d'enseignants se contentent d'exposer soigneusement, méthodiquement, scrupuleusement, au lieu d'en montrer les *raisons d'être* en partant des *problèmes générateurs*. Lorsque les choses ainsi s'inversent, l'enseignement se voue quasiment tout entier à la mise en place de ce qui n'est plus la synthèse d'un outillage conceptuel et technique spécifique et des réponses qu'il permet d'apporter à certains problèmes, mais une « *théorie* » *contemplative qu'on n'en finit pas d'installer dans sa gloire*. De manière fort peu surprenante, le plaidoyer anti-probabilités mentionné plus haut fournit de ce mécanisme une excellente illustration. L'auteur déjà cité écrit en effet :

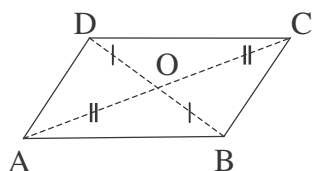
La déstabilisation des programmes entraînée par l'introduction des probabilités se payera cher au niveau des écoles : comment parler de mouvement brownien à des gens qui ignorent les espaces de Hilbert ou les fonctions continues non dérivables limites uniformes de suites de fonctions, comment parler de calcul différentiel stochastique à des gens qui ne maîtrisent pas le calcul différentiel et les équations différentielles ordinaires, comment parler d'intégrale de Ito à des gens qui ne connaissent rien à celle de Stieltjes, comment parler de processus de Markov à des gens qui ne maîtrisent pas l'algèbre linéaire et les itérations de matrices, comment faire de la théorie de la mesure à des gens qui ne maîtrisent pas la

²³ Georges Bouligand, « Regards sur la formation mathématique », in F. Le Lionnais (éd.), *Les grands courants de la pensée mathématique*, Albert Blanchard, Paris, 1962, pp. 532-542.

²⁴ *Loc. cit.*, p. 534.

topologie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. Laissons les professeurs de prépas se centrer sur les apprentissages fondamentaux des mathématiques : arithmétique, algèbre générale, algèbre linéaire et bilinéaire, suites et séries numériques, fonctions d'une variable, suites et séries de fonctions, calcul et géométrie différentielles. Ainsi, les enseignants des cycles suivants disposeront de bases solides pour les approfondissements, y compris en probabilités.

Les synthèses, qui étaient des *réponses* mises en forme aux *questions* qui faisaient problème, bientôt *ne répondent plus à rien* et, désormais, ne renvoient plus qu'à elles-mêmes. *On a les réponses, mais on a perdu les questions !* Tout notre enseignement secondaire – et notre enseignement supérieur, en grande partie – est atteint profondément par ce mal, que l'on

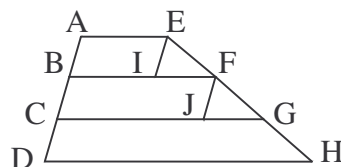
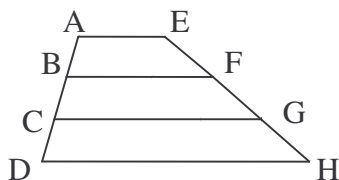


illustrera ici sur un exemple très simple (du niveau du « cycle central » du collège : 5^e et 4^e). Le parallélogramme est l'une des figures emblématiques de la géométrie élémentaire. Son étude systématique se fait en 5^e, classe où les élèves en étudient notamment les propriétés « caractéristiques » : dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles et de même

longueur et, réciproquement, un quadrilatère convexe dans lequel deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur est un parallélogramme ; dans le parallélogramme ABCD les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu O et, réciproquement, un quadrilatère dans lequel les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme ; etc. Mais *pourquoi* étudier cela ? Quelles *raisons* avons-nous de le faire ? Question cruciale dans une culture mathématique vivante, non réduite à des rites dont on n'entend plus le sens ! Les manuels d'autrefois posaient la question et y apportaient une réponse simple, fondamentale, sobrement mathématique (et non bêtement esthétisante : « Le parallélogramme, c'est une jolie figure, il est formateur d'en étudier les propriétés, etc. »). Ainsi l'auteur d'un *Traité de géométrie élémentaire* publié en 1885 note-t-il dans le chapitre intitulé *Des parallèles et des parallélogrammes*, sous le titre *Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes*, que ces théorèmes servent essentiellement à démontrer que deux segments sont de même longueur, ou que deux angles sont égaux, ou que deux droites sont parallèles. Plus explicitement, un manuel de collège des années 1950 fait, à l'intention de ses lecteurs, l'évocation suivante :

Au cours d'un problème nous arrivons, par exemple, à prouver que le quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. Immédiatement nous tirons de ce fait les conséquences suivantes : 1) ABCD est un parallélogramme ; 2) Par suite : AD et BC sont égaux et parallèles, AB et DC sont égaux et parallèles, $\widehat{A} = \widehat{C}$; $\widehat{B} = \widehat{D}$.

Complétons la leçon du manuel par un exemple plus développé. Sur la figure ci-dessous à gauche, les droites (AE), (BF), (CG), (DH) sont parallèles et les segments [AB], [BC], [CD] ont même longueur ; on veut démontrer que les segments [EF], [FG] et [GH] aussi ont même longueur. La chose peut se faire ainsi. On considère (ci-dessous, à droite) les points I et J, avec (EI) et (FJ) parallèles à (AB).



Les quadrilatères AEIB et BFJC sont des parallélogrammes (d'après la définition usuelle du parallélogramme). Il en résulte que l'on a d'une part $EI = AB$, d'autre part $FJ = BC$, en sorte que, puisque $AB = BC$, on a $EI = FJ$. Les segments [EI] et [FJ] ayant même longueur et même direction, le quadrilatère convexe EIJF est un parallélogramme (d'après une propriété

caractéristique du parallélogramme rappelée plus haut). Il en résulte que $EF = IJ$ et que (IJ) est parallèle à (FG) : le quadrilatère $FIJG$ est donc, lui aussi, un parallélogramme. Par suite, on a $IJ = FG$, et donc $EF = IJ = FG$, CQFD.

Si l'on veut échapper à un enseignement *insensé* des mathématiques, il convient ainsi de retrouver, pour chaque objet mathématique à enseigner – notion, notation, technique, résultat, etc. –, ce qu'on a appelé plus haut son *utilité*, ses *raisons d'être*, ses *motivations*, identifiées à ses *fonctionnalités*. Pourquoi, ainsi, étudie-t-on avec tant d'insistance, en géométrie plane, le *triangle* ? Pourquoi, de même, s'obstine-t-on à vouloir « chasser les radicaux » des dénominateurs des fractions numériques ? Dans le premier cas, on s'approchera de la réponse si l'on est déjà capable de rapprocher la question soulevée de celle-ci : pourquoi, en géométrie *dans l'espace*, met-on tant d'énergie à étudier le *tétraèdre* ? Dans le deuxième cas, on sera sur la voie de la vérité en soulevant d'autres questions de même forme : pourquoi simplifier une fraction, développer une écriture algébrique, décomposer un vecteur sur une base, etc. ? Tout ainsi doit retrouver son sens, sa place, sa pertinence – celle que fonde le bon usage de la connaissance.

Il ne suffit pas pourtant de *déclarer* les raisons d'être d'une entité mathématique : encore faut-il organiser la *rencontre vécue* avec elle dans une *situation* où son utilité – pour résoudre d'une certaine façon des problèmes d'un certain type – s'impose de façon éclatante. Dans la formation du citoyen, il s'agit là d'une exigence fondatrice, qui conditionne le développement de la capacité, si essentielle dans tous les aspects de la vie sociale, à affronter un problème sans pour autant avoir reçu sur le sujet un enseignement en bonne et due forme ! Par contraste, le mode d'enseignement qui s'est induré dans la formation scolaire crée usuellement chez qui lui est soumis une référence exclusive, non critique, au schéma « cours puis exercices », lequel laisse sans réaction – et donc sans réponse – face à une question *inédite*, par exemple parce que l'automatisme intellectuel engendré par ce schéma porte à croire qu'une telle question ne peut être qu'affaire d'opinion, de goût, etc., et donc non susceptible d'un abord « scientifique » – puisque, sinon, « la chose se saurait ». Tel semble être aujourd'hui le manque essentiel *tant du côté des élèves que des professeurs*.

Contre la domination de la structure binaire Cours-Exercices, à l'authenticité épistémologique rien moins que certaine (elle décrit de manière figée une mise en forme elle-même contestable du *produit* du travail mathématique, non l'organisation du travail de *production* lui-même), il convient alors de faire vivre une organisation didactique qui, pour reprendre la terminologie de Bouligand, assume le dualisme problèmes-synthèse en organisant la *rencontre en situation* avec la matière des savoirs à étudier, dans le cadre d'*activités d'étude et de recherche* (AER) incluant des *inventaires* régulièrement actualisés, préparatoires à une *synthèse* qui assure la mise en forme des produits de l'activité, pour aboutir à une organisation de savoir que l'on soumettra à un « *travail* » réglé qui autorise tant la mise au point et l'évaluation de l'organisation émergente que l'amélioration et l'évaluation de la maîtrise que l'on en a. S'impose ainsi une structure *ternaire* de l'étude (AER-Synthèse-Exercices et problèmes) qui dessine à gros traits l'organisation didactique de base d'un enseignement rénové de la *production* des mathématiques – et non des seuls *produits* mathématiques.

La prégnance du schéma Cours-Exercices est pourtant telle qu'elle engendre une pesante inintelligence du schéma ternaire évoqué. Sous l'emprise d'une interprétation « psychologique » du rôle des « activités » (les élèves, êtres tout de faiblesse, en auraient besoin pour comprendre et apprendre), qui occulte leurs véritables raisons d'être, de nature épistémologico-didactique (c'est comme cela qu'un savoir se construit, et cela *pour quiconque*), on a notamment substitué aux AER (qui, en saine épistémologie, devraient être le *cœur* du travail mathématique) des « activités préparatoires » qui dégénèrent parfois en un simple « échauffement » et dont le nom même laisse entendre que l'essentiel est ailleurs –

dans le « cours » *du professeur* qui se substitue alors à la synthèse *faite par la classe sous la direction du professeur*, synthèse désormais dépourvue d'objet faute d'AER produisant les éléments à « synthétiser ».

Parce que les activités « préparatoires », d'allure souvent ludique, sont souvent aussi peu significatives au plan mathématique, règne véritablement un abord *culturel-mimétique* des œuvres mathématiques : le savoir à étudier est présentée formellement comme une réalité *culturelle* (les mathématiciens s'intéressent aux triangles, aux tétraèdres, chassent les radicaux des dénominateurs, réduisent les fractions, etc.), à l'instar d'un monument dont les usages véritables ont été oubliés ; puis certains emplois formels en sont travaillés de manière tout aussi immotivée : c'est le moment *mimétique* de la formation (on se met à réduire des fractions, à développer des expressions algébriques, etc.). Ce mimétisme bloque l'abord *en situation*, dont on trouve déjà une évocation à la fin du XVIII^e siècle, dans une période propice à la critique du monde ancien ²⁵ :

Je pense que les nouveaux livres élémentaires devront différer des anciens beaucoup plus encore par la méthode que par les objets [...] Enseigner, ce n'est pas dicter ce qu'il faut croire, c'est faire observer ce qui a été senti : ce n'est pas inculquer des opinions traditionnelles, ce n'est pas même révéler à un élève les résultats des recherches que l'on a faites avant lui [...]. La synthèse est le despotisme de l'enseignement ; l'analyse [...] au contraire, n'exigeant d'autre docilité que l'attention, ramène sans cesse l'esprit humain à l'usage le plus actif de ses facultés.

Le développement de cette problématique – l'abord en situation de la connaissance mathématique, le projet indépassable de faire des mathématiques enseignées, non des mathématiques *racontées* par le professeur (et *récitées* par l'élève), mais des mathématiques *vécues* et *pensées ensemble* – appelle un ensemble de notions, d'analyses, de savoir-faire qu'apporte la *théorie des situations didactiques*, qu'on ne fera ici que mentionner ²⁶.

7. Les mathématiques retrouvent le monde

« Redonner sens » aux mathématiques et aux sciences, au fait de les enseigner (d'un côté) et de les apprendre (de l'autre), telle est l'une des formulations les plus usuelles du problème d'ensemble auquel l'état de la société et des mathématiques nous confronte aujourd'hui. En bien des cas, une question de mathématiques *Q* naît au sein d'une « situation du monde » dans laquelle certaines personnes doivent accomplir une certaine tâche *non mathématique* – mais, en quelque façon, *mathématiquement problématique* – engendrée par une activité sociale que l'on se borne alors à *évoquer* et qui se trouvera bientôt expulsée de la scène mathématique ou n'y figurera plus qu'à titre de lointain décorum. Ainsi, alors même que les mathématiques et les sciences nourrissent leur développement des problèmes que soulève la vie sociale dans son infinie diversité, celle-ci n'y apparaît-elle au mieux, dans l'état actuel des choses, que comme un horizon dénué de signification à l'endroit des gestes propres aux disciplines de connaissance qui y trouvent pourtant leur premier moteur. Les mathématiques, on l'a suggéré, se retirent alors du monde ; et le monde, en conséquence, s'éloignent des mathématiques. Que faire ?

On posera ici que la résolution des difficultés associées au confinement culturel des mathématiques passe désormais par la reconnaissance du principe socio-épistémologique suivant : contrairement au postulat fondant le Grand partage, toute science – « de la Nature » ou « de l'Homme et de la Société » – doit être regardée, pensée, vécue comme ayant pour objet d'étude un certain système, à la fois spécifique et évolutif, *de conditions et de contraintes de la vie et du développement des sociétés humaines et des individus qui les*

²⁵ Déclaration de Daunou, le 17 avril 1793, devant la Convention ; cité in Christine Fauré, *Ce que déclarer des droits veut dire*, PUF, Paris, 1997, pp. 83-84.

²⁶ Voir Guy Brousseau, *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, Grenoble, 1998.

composent. Toute science, ainsi, entretient un commerce déterminé avec la vie sociale, et son étude ne saurait sans en contrefaire la réalité la couper de cet ancrage vital ²⁷.

Donnons tout de suite, et faute de mieux, deux exemples très simples de contraintes de nature mathématique sur la vie « des hommes et des sociétés ». Un groupe de travail d'une institution internationale comporte sept personnes ; faute d'avoir pu se mettre d'accord sur une langue de travail commune, chacune d'elle s'exprimera dans sa langue, des interprètes assurant une traduction simultanée pour les autres membres du groupe. Si l'on suppose les sept langues toutes différentes, si l'on suppose aussi que chaque interprète ne traduit que dans un sens (du portugais vers le grec mais pas du grec vers le portugais, par exemple), le nombre d'interprètes nécessaires sera égal au nombre de *couples* de langues : les sept personnes seront donc entourées de... quarante-deux interprètes – conclusion qui fait apparaître judicieuse la recherche d'un compromis quant aux langues de travail du groupe ! Second exemple, qui porte sur une question de probabilité : si, dans un ensemble humain qui réalise exactement la parité entre les sexes (la proportion d'hommes y est égale à la proportion de femmes), on veut constituer une instance composée de quatre personnes, et si l'on est attaché au principe de parité (deux hommes et deux femmes), il faudra l'assumer expressément : car, à s'en remettre au hasard, on aurait en ce cas 5 chances sur 8 de devoir accepter une répartition non paritaire !

Les exemples précédents évoquent, en quelque sorte, des interventions *directes* de savoirs mathématiques dans l'organisation de la vie sociale. En bien des cas cependant, les mathématiques élucident et concourent à faire évoluer les conditions et contraintes de la vie des institutions sociales de manière *indirecte*, en élucidant et en concourant à faire évoluer des conditions et contraintes de nature biologique, ou chimique, ou physique, ou... mathématique, etc., qui pèsent sur la vie des institutions et des hommes. Ainsi retrouve-t-on tout le spectre des interventions possibles des mathématiques au service de l'intelligence et de la maîtrise des conditions et contraintes de la vie des sociétés.

La problématique des mathématiques comme sciences de certaines conditions et contraintes de la vie des hommes (pris dans leurs assujettissements institutionnels, psychologiques, biologiques, physiques, etc.) peut être résumée en un schéma déjà ébauché : la vie sociale, dans tous ses aspects, conduit à envisager des questions Q auxquelles il convient d'apporter des réponses R . La chose requiert la constitution de *systèmes didactiques* $S(X, Y, Q)$, où X est le collectif qui *étudie* Q et Y l'équipe qui *dirige l'étude* de Q par X (on peut avoir $Y = \emptyset$). C'est le système didactique $S(X, Y, Q)$ qui va créer une réponse R à la question Q , ce qu'on peut noter : $S(X, Y, Q) \Rightarrow R$. Comme il en va aujourd'hui au lycée dans les TPE et, au collège, dans les IDD (itinéraires de découverte), la question Q n'est pas nécessairement une question de mathématiques, ou de physique, etc. La *production* d'une réponse R suppose des *savoirs* $R_1, \dots, R_n$ et plus généralement des *œuvres* $O_1, \dots, O_m$ que leur mise en jeu *motive* en leur conférant par cela même une certaine raison d'être, selon une dynamique qu'on peut noter ainsi : $S(X; Y, Q)_{|R_1, R_2, \dots, R_n, O_1, O_2, \dots, O_m} \Rightarrow R$.

Permettre aux mathématiques enseignées de sortir de leur splendide isolement pour retrouver le monde, alors, c'est non seulement faire « travailler » les mathématiques sur des questions Q non nécessairement mathématiques (comme il en va dans les TPE ou les IDD), mais les y faire travailler de concert avec d'autres savoirs, en une symphonie *codisciplinaire* où les mathématiques concourent avec d'autres disciplines à élucider des conditions et contraintes de toute nature qui déterminent la production de réponses R à des questions Q .

²⁷ Inversement et pour les mêmes raisons, on ne saurait étudier la vie des hommes et des sociétés sans prendre en compte les contraintes physiques, chimiques, biologiques, mathématiques qui la déterminent et que les sciences correspondantes – physique, chimie, biologie, mathématiques – élucident et, souvent, permettent de déplacer ou d'annuler. Cette exigence devrait avoir une incidence sensible sur la formation des acteurs et des producteurs des SHS (sciences de l'Homme et de la Société), qui se doit d'inclure une initiation appropriée aux sciences des contraintes et conditions de nature mathématique, physique, chimique, biologique, etc., de la vie des sociétés.

Le même schéma vaut en vérité tout autant si la question posée, Q , est de nature mathématique. Dans tous les cas, on s'efforcera d'observer le plus rigoureusement possible un « principe de symétrie » qui, parmi les savoirs $R_1, \dots, R_n$ et les œuvres $O_1, \dots, O_m$ *potentiellement* utiles dans la production de R impose de n'en exclure *a priori* aucun, quelle qu'en soit la « nature » (mathématique ou autre), et oblige de même à intégrer dans la réponse R produite (ou dans l'organisation de savoir dont elle est un fragment fonctionnel) les savoirs et les œuvres que sa production aura *effectivement* mobilisés. Ainsi se bâtit la « synthèse », ce *trésor mathématique* – mixte – alimenté par tous mais dont la bonne gestion est l'objet spécifique du « souci mathématicien » propre à la classe de mathématiques. À ce jeu, il se peut, certes, que certaines parties des mathématiques traditionnellement honorées dans une logique monumentaliste ne soient pas « sauvées » : car le principe de symétrie, qui, localement, fait dépendre le sort d'un savoir mathématique de sa mobilisation effective dans l'AER menée à bien, devient ici le critère décisif. Quant aux voies et moyens d'une telle mobilisation, on n'en dira rien de plus ici ; ils sont aujourd'hui l'objet spécifique d'une *scienza nova* qui devrait être l'allié le plus sûr dans la difficile reconquête à entreprendre : la didactique des mathématiques.