

Pour en finir avec une certaine phobie culturelle

par Yves Chevallard

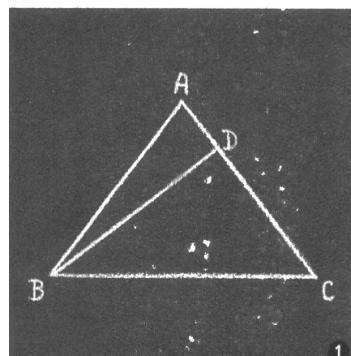
La polémique sur les mathématiques et leur rôle dans l'enseignement secondaire est une activité saisonnière solidement établie. On en connaît les termes, qui ne laissent guère d'espoir. D'un côté, les mathématiques constitueraient un passage obligé sur la route de la réussite scolaire et sociale. De l'autre, leur difficulté ne serait plus à dire. Pour tout cela, il faudrait se résigner, et attendre que jeunesse se passe.

Ajoutons, pour l'âge mûr, un autre trait, où l'inconscient trouve son compte aussi sûrement que deux et deux font quatre. Le commerce avec les mathématiques, dit-on, fait mal. Et ce tribut de souffrance doit être payé nécessairement, fût-ce en petite monnaie. Autant de raisons pour que, passé le temps des mathématiques obligatoires, survive en nous, ambigu, un désir de mathématiques. L'inquiétante étrangeté des mathématiques fascine. Cette forme par excellence de pensée rationnelle réveille un monde d'émotions archaïques.

Les lignes qui suivent ont été écrites à l'intention de ceux qui, comme on dit, n'aiment pas les mathématiques. Ou qui ont toujours cru que les mathématiques ne les aimaient pas. Pour leur dire qu'il est grand temps de nous réconcilier avec elles. Pour faire entendre que l'honnête homme de demain devra rougir de n'y rien entendre – et non, comme aujourd'hui, tirer une pauvre gloire de son ignorance. Non, nous ne souffrons pas – qui que nous soyons – de trop de mathématiques. Non, les mathématiques ne sont pas « abstraites », ni « coupées de la vie ». Il est temps d'en finir avec une certaine phobie culturelle à l'endroit des mathématiques.

Dans ce qui suit, donc, je ne vais pas seulement vous parler de mathématiques : ce serait trop facile, cela nous arrangerait trop. Nous allons en faire. Un peu. Très peu. Vous prendrez cela comme un test. Tout homme de culture devrait entendre ces mathématiques-là. Il devrait rougir d'y être étranger comme il rougirait, ne dites pas le contraire, d'écrire : *le cielle est pardeçu le tois*. Malheur donc à ceux qui n'aiment pas les mathématiques : ils seront, demain, exclus du royaume de la culture.

Reprenons du début. Et rouvrons le dossier de la petite guerre. Regardez le triangle isocèle ABC (figure 1). Vous voyez que BD est plus grand que CD. Vous ne pouvez en douter. Seulement voilà : vous n'ignorez rien, quoi qu'on dise, de cette loi d'airain qui, en mathématiques, nous enjoint ici de démontrer que l'on a bien $BD > CD$. Vous le savez, vous n'avez pour le moment qu'une conjecture, qu'il s'agit de prouver.



Les mots-démons sont lâchés : prouver, démontrer. Il y a plus. La preuve, en géométrie élémentaire, semble souvent quelque peu arbitraire. Elle prend appui sur d'autres vérités, antérieurement établies, mais qui, de prime abord, paraissent n'avoir guère plus de titre à être tenues pour vraies. Ainsi de la démonstration que l'on pouvait donner autrefois s'agissant de notre exemple (la question a aujourd'hui disparu des programmes) : le triangle ABC étant isocèle, l'angle $\widehat{BCD}$ est égal à l'angle $\widehat{CBA}$, et est donc plus grand que l'angle $\widehat{CBD}$; par suite, dans le triangle BCD, BD,

mesure du côté opposé à l'angle $\widehat{BCD}$, est plus grand que CD, mesure du côté opposé à l'angle $\widehat{CBD}$.

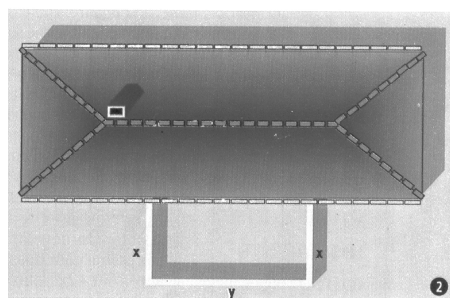
L'ingrédient essentiel est ici un théorème qui, justement parce qu'il est et doit être réputé bien connu, est passé sous silence : à un plus petit angle d'un triangle est opposé un plus petit côté. Les mathématiques sont déroutantes jusque dans leur rhétorique.

Pour tout cela déjà, beaucoup, d'ordinaire, lâchent prise. Mais, toujours pour cela, les mathématiques sont une discipline – au sens fort du terme – que nous avons trop oubliée. Discipline de l'esprit. Quelquefois fort rude, et dont la belle ordonnance, fréquemment, paraît au profane immotivée. Pas étonnant alors que certains s'en dégoûtent. Ni, ajoutons-le, que d'autres s'en éprennent.

De cet unique point de vue – comme instrument de formation –, les mathématiques ne sont pas irremplaçables. Le droit aussi est une discipline. Et le latin. Et la philosophie. Et la rhétorique. Et encore cet art de la mémoire, imposante construction élevée, jadis, à la gloire d'une fonction aujourd'hui péjorée, dont l'exercice fut pourtant, durant des siècles, le ferment de toute formation intellectuelle.

Toutes ces disciplines, sans doute, ne concourent pas de même manière à nous former. Les postures intellectuelles qu'on y acquiert ne sont pas équivalentes – ni esthétiquement, ni fonctionnellement. Là-dessus un vain débat peut être presque indéfiniment reconduit, sans jamais se conclure. Pour avancer, il faut verser une pièce nouvelle au dossier.

Voici donc un second exemple, qui donne une image à peine simplifiée du fonctionnement actuel de nos sociétés. Vous désirez enclore en un rectangle, avec une palissade de longueur fixée (disons, 60 mètres), une partie de votre jardin adossée au mur d'un bâtiment (figure 2).

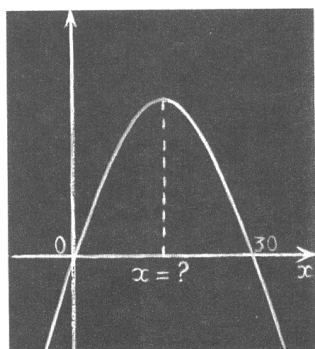


Comment choisir la largeur x et la longueur y pour que la partie enclose ait l'aire la plus grande possible ? Telle est votre question. Comment les mathématiques peuvent-elles lui apporter réponse ? À cause de la contrainte imposée (la longueur de la palissade est de 60 mètres), le choix de x détermine la valeur de y : $y = 60 - 2x$. L'aire du rectangle obtenu quand on choisit x pour largeur est alors $xy = x(60 - 2x)$. Par ailleurs, la largeur x est forcément comprise entre 0 et 30. Votre question initiale (« concrète ») se transforme ainsi en un problème mathématique (« abstrait ») : déterminer x dans l'intervalle $[0, 30]$ pour que l'aire $x(60 - 2x)$ soit la plus grande possible.

La solution à notre problème est en quelque sorte cachée dans l'expression $x(60 - 2x)$. Cette expression, regardez-la. C'est d'elle que nous pouvons attendre une réponse ; c'est à elle que l'on doit s'intéresser. Elle n'est en rien un être « abstrait ». Elle est là, devant nos yeux. Elle se donne à voir. Elle a une structure, que révèle sa forme ; qu'il faut apprendre à déchiffrer, et

à transformer pour mieux la connaître. Toutes les « transformées » *a priori* possibles ne sont pas également intéressantes : leur intérêt dépend de notre capacité à les faire parler, à l'aide des connaissances que nous possédons sur ces objets d'un type particulier que sont les expressions algébriques.

Voici une transformation possible. On développe l'expression pour obtenir d'abord $60x - 2x^2$, puis on réordonne les termes : $-2x^2 + 60x$. Il faut savoir interpréter les signes : comme en médecine, il y a en mathématiques une séméiologie. On reconnaît ici une expression de la forme $ax^2 + bx + c$, qui représente, algébriquement, une parabole. Le cas qui nous occupe semble posséder une particularité remarquable : le coefficient c (le « terme constant ») y est nul. Mais cela n'a en fait aucune importance. Ce qui importe, au contraire, c'est le fait que le coefficient $a = -2$ soit négatif.



La parabole est « tournée vers le bas » (figure 3). La valeur maximale de l'expression $-2x^2 + 60x$ correspond à son sommet. Or, un théorème indique que celui-ci a pour abscisse, dans le cas général, $x = \frac{-b}{2a}$, soit ici $x = \frac{-60}{-4} = 15$. L'expression $x(60 - 2x)$ est donc maximale pour $x = 15$, et sa valeur maximale est $15(60 - 2 \times 15) = 450$.

Voilà donc la réponse attendue : le rectangle aura pour largeur $x = 15$ et pour longueur $y = 60 - 30 = 30$. Si, vous fiant à votre intuition, vous avez cru par exemple que la meilleure solution consistait à répartir équitablement la longueur disponible entre les trois côtés, en prenant $x = y = \frac{60}{3} = 20$, vous vous êtes trompé. Vous n'auriez obtenu ainsi qu'un rectangle (ou plutôt un carré) de 400 m^2 . Les mathématiques vous font gagner 50 m^2 .

Le problème précédent est, en un sens, exemplaire. Cette naïve miniature mathématique illustre le fait essentiel : toutes les pratiques sociales ou presque sont aujourd'hui construites avec des mathématiques. Tous les objets qui nous entourent – cet ordinateur, bien sûr, mais aussi ce stylo, et cette feuille de papier, et cette table devant laquelle je suis assis, même – contiennent des mathématiques cristallisées. Les mathématiques sont l'un des ingrédients de base avec lesquels se construisent les sociétés actuelles. D'où cette image : si l'on coupait l'électricité dans la ville, tout ou presque cesserait de fonctionner. De même, si l'on y coupait les mathématiques.

Vous pourrez le regretter, bien sûr. Mais c'est ainsi. Il en allait autrement hier. Et il n'y a là peut-être aucune nécessité historique absolue. Mais telle est bien la réalité d'aujourd'hui. Les mathématiques, à cet égard, se distinguent entièrement du latin. Les premières sont vitalemment omniprésentes dans la production de nos sociétés ; le second ne l'est pas. Ou du moins, ne l'est plus. En quelques siècles, les positions se sont totalement inversées.

La comparaison avec l'électricité est trompeuse sur un point décisif. Chacun ressent immédiatement et personnellement les effets d'une coupure d'électricité. Mais, si l'on coupait les mathématiques, nous ne découvririons que lentement, et sans doute trop tard, que, socialement, nous ne savons plus vivre sans elles. La culture dans laquelle nous baignons, qui a quelques siècles de retard sur l'évolution sociale, nous trompe sur leur rôle véritable. Or, tout le problème est bien que, sans en avoir conscience, nous aurons bientôt coupé les

mathématiques dans la société. À moins d'un *aggiornamento* culturel fondamental, auquel nous nous refusons encore.

L'exclusion des mathématiques (et des sciences) du monde de la culture (au sens du ministère du même nom) ne date pas d'aujourd'hui. Elle était hier sans conséquence. Mais les besoins mathématiques sont désormais au premier rang de nos besoins sociaux. La réalité est pourtant si opaque, culturellement, que l'expression précédente vous paraîtra étrange, outrancière, illégitime. Des besoins mathématiques !

Le divorce entre culture et société ne nous aide pas sur ce point. Son écho se fait entendre jusque dans la classe de mathématiques. Il désoriente les enseignants, dénature leur enseignement, et ne laisse guère de chance aux élèves, pour qui les mathématiques ne sont qu'une réalité scolaire, dénuée d'autre signification. N'en doutons pas : nous tenons ici la cause première de ce que, éplorés ou vindicatifs, mais inconscients, nous nommons futilement « échec en maths ». La cause aussi – ajoutons-le, même si cela doit paraître cruel – d'un certain nombre de réussites moyennes en mathématiques, qui fournissent aujourd'hui le gros du bataillon des professeurs.

Inutile pourtant d'accuser les programmes, les enseignants, les élèves, le « système » ! La réalité est plus crue. Notre culture n'aime pas les mathématiques ; pour cela, elle ne les comprend pas, et ne saurait nous les faire aimer. Elle nous refuse *a priori* ces trésors d'attention que nous devrions dépenser pour vivre en bonne intelligence avec elles. Déjà Voltaire moquait Maupertuis, tombé amoureux d'un quart de cercle.

Ne craignons plus d'être ridicule : soyons un instant amoureux. Prenons la culture à rebours, pour la remettre sur ses pieds, alors qu'elle marche sur la tête. Revenons à notre échantillon de mathématiques. Essayons de comprendre à quoi s'occupent les mathématiciens, puisque aussi bien nous sommes concernés. La solution donnée plus haut à notre problème était trop abrupte pour vous ? Ne renonçons pas. Voici une solution plus élémentaire. Reprenons l'expression – $2x^2 + 60x$, et transformons-la encore un peu, amoureuxment. Voici :

$$-2x^2 + 60x = -2(x^2 - 30x) = -2[(x - 15)^2 - 15^2] = 2 \cdot 15^2 - 2(x - 15)^2 = 450 - 2(x - 15)^2.$$

Voyez : la main du mathématicien sculpte la matière algébrique. Le deuxième changement, ainsi, suppose un art déjà consommé : passer de $x^2 - 30x$ à $(x - 15)^2 - 15^2$ ne va pas de soi, sans doute. Le premier et les deux suivants – simples retouches, d'un coup de ciseau rapide – sont beaucoup moins recherchés mais tout aussi nécessaires pour que l'œuvre s'accomplisse.

Notez ici un symptôme du mal qui nous frappe. Pour donner crédit à ce que j'énonce, je recours à une métaphore qui sollicite l'être de culture que vous êtes : le travail du mathématicien comparé au travail du sculpteur. Le procédé est déloyal – peut-être vous y êtes-vous laissé prendre. Mais son enseignement est clair. On n'imagine pas, à l'inverse, un sculpteur rendant raison de son ouvrage en termes mathématiques !

Voici un second symptôme. Vous demanderez peut-être, pourquoi ces transformations-là, et non d'autres ? La demande est légitime. Mais votre précipitation est suspecte. Pourquoi voudriez-vous d'emblée, sans pratique aucune, saisir l'intention qui anime la main ? C'est tout un univers de raisons et de gestes qu'il vous faut pénétrer ! Et, comme ailleurs, une longue patience vous sera nécessaire. Ceux qui réussissent, en cet art comme en d'autres, ont d'abord beaucoup échoué, sans que leur désir s'émousse. Or, cette chance, notre culture la refuse au grand nombre.

Mais avançons. Pour parvenir à notre conclusion, nous allons maintenant raisonner sur l'expression obtenue : $450 - 2(x - 15)^2$. Celle-là se présente comme une quantité déterminée, 450, moins une quantité variable mais toujours positive, $2(x - 15)^2$. Elle est donc maximale quand la quantité retranchée est la plus petite possible, autrement dit quand celle-ci est nulle. Soit donc pour $x = 15$. Auquel cas elle prend la valeur 450. Nous faisons ici d'une pierre deux coups.

Une deuxième fois le problème est réglé. Mais ne nous lassons pas. Revenons encore à la matière brute : $x(60 - 2x)$. L'œil exercé saisit une autre possibilité : la transformer, par une modification anodine, pour passer à $2x(60 - 2x)$. Cette fois, il n'y a plus égalité entre les deux expressions : la seconde est le double de la première. Les deux expressions, à cause de cela, sont maximales en même temps, et cela importe seul ici.

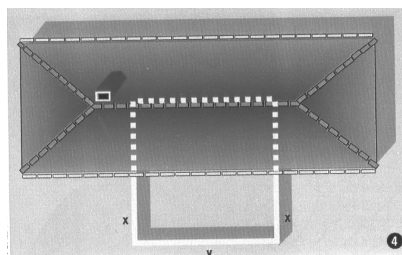
Pourquoi cette nouvelle forme est-elle intéressante ? Parce qu'elle se présente comme le produit de deux facteurs positifs (à savoir $2x$ et $60 - 2x$) dont la somme est constante, égale à 60. Or notre mathématicien sait ce que voici : le produit de deux nombres positifs x' et x'' , de somme constante égale à p , est maximum quand ces deux nombres sont égaux, soit lorsque $x' = x'' = p/2$ (leur produit vaut alors $p^2/4$). Suivez-vous toujours ? L'expression $20x(60 - 2x)$ sera donc maximale lorsque $2x = 60 - 20x$, soit pour $x = 60/4 = 15$.

La question de l'enclos nous a ainsi renvoyés à l'évocation d'un phénomène mathématique « pur », qui paraît *a priori* sans lien avec notre point de départ. Choisissez deux nombres dont la somme soit, disons, 24. Par exemple 6 et 18. Calculez leur produit : $6 \times 18 = 108$. Recommencez : $9 \times 15 = 135$; $10 \times 14 = 140$. Et encore : $10,5 \times 13,5 = 141,75$. Ou même : $8,5\sqrt{2}(24 - 8,5\sqrt{2}) = 204\sqrt{2} - 144,5 = 143,9995...$ Vous aurez beau faire, vous ne pourrez obtenir un résultat supérieur à $12 \times 12 = 144$. La preuve de ce phénomène n'est pas bien difficile à apporter. On part de l'identité $4x'x'' = (x' + x'')^2 - (x' - x'')^2$.

Comme $x' + x'' = p$, il vient : $4x'x'' = p^2 - (x' - x'')^2$. Renouvelant alors un raisonnement déjà vu, on peut maintenant conclure que $4x'x''$, et donc aussi $x'x''$ est maximal quand $x' = x''$.

La familiarité avec l'univers mathématique, qui doit être payée à son juste prix, permet ainsi de multiplier les variations, et suggère des voies diverses qui toutes conduisent à la solution cherchée. Elle autorise même – suprême élégance – à gommer le travail algébrique fait ostensiblement jusqu'ici, pour procéder *more geometrico*, à la manière des géomètres. Voici comment.

Par des procédés analogues à ceux utilisés plus haut, on peut démontrer que, parmi tous les rectangles ayant un périmètre donné p , le rectangle d'aire maximum est le carré de côté $p/4$. Faisons de cela un théorème, je veux dire un résultat bien connu. Et réalisons maintenant une expérience de pensée en considérant un instant le rectangle obtenu en rajoutant à notre enclos son symétrique par rapport au mur (figure 4). Ce rectangle a pour périmètre 2×60 mètres, soit 120 mètres. Son aire, qui est le double de celle de l'enclos, est maximale en même temps que cette dernière. Or, d'après notre théorème, notre rectangle imaginaire est d'aire maximale quand il est un carré de côté $120/4 = 30$. L'enclos d'aire maximale a donc pour longueur $y = 30$ et pour largeur $x = 30/2 = 15$, CQFD.



Mon petit conte mathématique est, sur un point au moins, en partie mystificateur. Vous n'aurez pas besoin de faire des mathématiques, fussent-elles élémentaires, pour construire votre enclos dans votre jardin. Nos sociétés ont des besoins mathématiques vitaux. Mais l'individu, perdu dans la foule solitaire, peut à son niveau l'ignorer entièrement. Et ignorer toute la société aussi bien, pourvu que ses besoins individuels continuent d'être satisfaits.

Mais qui lui fera cette société-là, si nous ne la faisons ensemble ? Même au niveau individuel, en vérité, cette solidarité ne peut être entièrement ignorée. Et il est d'un esprit faux de voir dans la présence des mathématiques en tant de cursus d'études la simple volonté perverse de sélectionner par les mathématiques. Voyons-y bien plutôt un écho déformé d'une exigence sociale vraie, que notre surdité culturelle ne nous permet pas – pas encore d'entendre.

Écho déformé. Et aussi, en vérité, écho hypocritement atténué. Un nombre croissant d'entre nous ont besoin, aujourd'hui, à titre strictement individuel, de plus de mathématiques qu'il ne leur a été donné d'en apprendre. Phénomène obscur, mais réel : les mathématiques, un jour ou l'autre, nous rattrapent, parfois jusqu'aux plus humbles niveaux de l'activité sociale. Car notre monde se remplit de mathématiques : le monde des savoirs, notamment, est le premier touché, en tous domaines.

Du travail du mathématicien à son incidence dans les sociétés contemporaines, donc, pas de véritable solution de continuité. La déraisonnable effectivité des mathématiques (Eugen Wigner) est seulement différée dans le temps – encore que le délai moyen soit de plus en plus court – parce qu'elle n'imprime sa marque à l'organisation sociale visible de tous qu'après un parcours long et opaque, qui nous en dissimule presque toujours l'origine véritable.

L'école réellement formatrice pourrait être – qu'elle devrait l'être ne se discute pas – un analyseur de nos sociétés. Qui nous prépare à y entrer comme membres de plein exercice. Elle le ferait déjà, s'agissant des mathématiques, n'était cette formidable pression culturelle venue d'un autre âge, qui nous a fabriqué une société schizophrène. Nos coquetteries anti-mathématiques n'ont que trop duré.