Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique

par Yves Chevallard
UMR ADEF

Resumen. *A través del examen de los principales conceptos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, esta comunicación expone las grandes etapas y los aspectos esenciales de la génesis y el desarrollo de la TAD, desde la teoría de la transposición didáctica hasta la noción de REI. Dedicada a los investigadores, jóvenes y menos jóvenes, la comunicación se presenta en forma de "recorrido de descubrimiento", proponiendo una visión conjunta de los acontecimientos del último cuarto de siglo en materia de TAD y esbozando las vías de su futuro.*
Abstract. *Through examining the main concepts of the ATD, this report expounds the main stages and the essential aspects of the origin and development of the ATD, from the theory of didactic transposition to the notion of Study and Research Course. Intended for researchers, both young and less young, the report is presented as a "discovery course", putting forward a joint vision of the events concerning the ATD over the last 25 years and outlining its future.*

1. La transposition didactique comme symptôme

1.1. Deux grands problèmes constituent, depuis un quart de siècle, les raisons d'être fondamentales de la théorie anthropologique du didactique (TAD), qu'ils n'ont cessé de pousser à se développer et à s'approfondir. Le premier problème, sur lequel je m'arrêterai d'abord, est celui de *l'émancipation épistémologique et institutionnelle* de la position du didacticien et de la science didactique qu'il produit vis-à-vis des institutions qui servent d'habitat à ses objets d'étude. À cet égard, l'effort émancipateur est présent d'emblée, dès mes premiers travaux consacrés aux phénomènes de transposition didactique, que j'expose à la première école d'été de didactique des mathématiques tenue à Chamrousse (Isère) en juillet 1980. Ce premier travail systématique deviendra connu – au-delà de la petite troupe des didacticiens des mathématiques français – à partir de 1985 surtout, date de sa publication aux éditions de la Pensée sauvage (Grenoble). Une seconde édition, augmentée d'une substantielle postface, paraîtra chez le même éditeur en 1991.

1.2. D'emblée, l'effort entrepris vise un objectif essentiel et indéfiniment poursuivi depuis : libérer l'étude de l'enseignement et de l'apprentissage scolaires des mathématiques de la sujétion aux codes de l'École et, en particulier, de ceux qui régissent – en le naturalisant – le rapport à la discipline scolaire étudiée, les mathématiques. Cette visée d'émancipation se traduit au départ par l'usage d'un mot, *savoir*, dont l'emploi est par là renouvelé : alors que la langue française ne connaît que *le* savoir (le mot, notait Émile Littré dans son dictionnaire, est « usité seulement au singulier »), nous parlons bientôt de *savoirs*, au pluriel, d'*un* savoir, etc. Changement qui fait passer non seulement du continu au discret – du savoir aux savoirs –, mais surtout, peu l'auront remarqué, du spécifique à une certaine *généricité* : non pas les mathématiques, ou des mathématiques, mais *des savoirs*. Quoique de façon peu explicite, cette formulation originaire de la théorie de la transposition didactique assume donc ce qui, dans les pratiques des didacticiens, restera longtemps à la fois présent et nié : pour saisir ce qu'il y a de spécifique d'une connaissance dans ce qui se met en branle autour de sa transmission, il nous faut des concepts suffisamment génériques pour ouvrir un champ aux variations spécifiques : la différence spécifique suppose le genre prochain. Ainsi naissent la notion de contrat didactique ou celle de transposition, qui vont migrer dans tout le champ que l'on se refuse alors à nommer par son nom – le champ de *la didactique*. Il y a là, je ne l'ignore pas, un tabou. Encore aujourd'hui, en France, quand on surveille son propos, on parle plus fréquemment, et surtout plus volontiers, *des* didactiques que de *la* didactique. Je dois donc m'arrêter sur ce point.

1.3. Oublions un instant toute « spécificité ». Je dis *la didactique* comme on dit *la physique*, *la sociologie*, *l'histoire*, etc. Aucun didacticien ne peut prétendre pratiquer *la* didactique, tout court, de même qu'aucun physicien ne pratique *la* physique, aucun sociologue *la* sociologie, etc. Un physicien fait *de* la physique, un biologiste *de* la biologie, un didacticien *de* la didactique. Un didacticien, par exemple, fera de la didactique *des mathématiques*, voire de la didactique *de la géométrie dans l'espace* ou *de la statistique univariée*, etc. Mais je ne vois pas de raison d'exonérer notre discipline du sort commun ; je n'imagine pas pourquoi, en tant que champ scientifique, la didactique prétendrait à être traitée dans la cité des sciences – et dans la cité tout court – autrement que le sont la physique, l'histoire, la biologie, etc. Cela n'exclut nullement que la didactique se définisse par l'attention prêtée à ce qu'il y a de spécifique dans la connaissance dont la transmission est visée par un certain projet social d'enseignement – même si l'identification de ce spécifique-là, j'y reviendrai, ne va pas de soi. La chimie fait-elle la théorie d'une matière unique, non différenciée ?

1.4. Je crois, en revanche, connaître l'origine de l'attachement quasi viscéral, quoique sans motif épistémologique solide à mes yeux, à des appellations particularistes : il est, me semble-t-il, l'effet de la soumission subrepticement assumée, ou même ouvertement revendiquée et alors souvent passionnée, aux codes de l'École et au découpage *du* savoir que celle-ci ordonne. On n'a peut-être pas assez noté ceci : de même que le biologiste fait *de* la biologie, ou que le physicien fait *de* la physique, le mathématicien fait *des* mathématiques ; or, précisément, le professeur de mathématiques (ou de physique, ou de biologie) prétend – ainsi le veut l'institution – enseigner *les* mathématiques (ou *la* physique, ou *la* biologie), alors que, bien entendu, il enseigne, au mieux – comment pourrait-il faire autrement ? –, *des* mathématiques (ou *de* la physique, ou *de* la biologie). Que d'aucuns veuillent être didacticiens « des mathématiques » *ou rien* est, à mes yeux, moins le fruit d'une exigence *épistémologique* que le vestige d'une passion *institutionnelle* incomplètement analysée. Comme souvent, au reste, l'incertitude sur le lien de filiation dont on se réclame engendre une certaine boursouflure dans l'affirmation de ce lien : on est professeur *de* – et non *des* – mathématiques ; on sera didacticien *des* mathématiques. Excusez du peu !

1.5. La mise en évidence du phénomène de transposition didactique allait de pair avec le mot d'ordre de « rupture épistémologique », qui désigne d'abord, sans la nommer explicitement comme telle, la rupture avec un certain ordre *institutionnel*, celui que l'École tend à imposer à quiconque s'en approche assez pour prétendre toucher au jeu intime qui s'y mène avec le « savoir à enseigner ». L'ordre scolaire tolère mieux, en effet, le regard « forain » lorsqu'il s'en tient au folklore de sa ceinture « pédagogique » et s'interdit de toucher au cœur *didactique* de l'institution. De là sans doute que la mise en circulation de l'idée de transposition didactique ait suscité émois et résistances : comment peut-on ainsi interroger ce qui *doit* aller de soi, par exemple l'algèbre que l'école enseigne, et chacun des « objets » qui s'y logent ? Il n'y a pas, s'indigne-t-on, l'algèbre *enseignée*, mais *l'algèbre*, tout court ! Telle est la fiction scolaire, et malheur à qui se met en tête d'en révéler tout à la fois l'arbitraire et la nécessité. Contre cette fiction, l'analyse de la transposition didactique fait apparaître les tours et détours par lesquels il a fallu passer pour aller de l'algèbre « savante » (par exemple) à l'algèbre « enseignée ». Ce sera là une première agression narcissique à l'endroit de l'École et, du même coup, à l'encontre de tous ceux – professeurs ou didacticiens – qui, se posant parfois durement comme ses purs sujets, font profession de lui vouer une passion sans mélange.

2. De la notion de rapport à celle de praxéologie

2.1. L'approfondissement de la rupture amorcée par la notion de transposition va passer d'abord par l'introduction de la notion de *rapport* – d'une personne x à un objet o, $R(x, o)$, ou d'une institution I à cet objet, ou plus exactement des sujets (idéaux) de l'institution I en position p dans I à cet objet o, $R_I(p, o)$. Il s'agit, par cela, d'une part de subsumer sous une unique entité tout ce que la culture, dans sa frénésie « psychologique », a élaboré autour de la vie de l'esprit, d'autre part d'objectiver l'infinitude bigarrée des postures personnelles ou institutionnelles pouvant coexister au sein d'un espace cognitif culturellement partagé. Il y a par exemple la notion supposée de *logarithme*, qu'aucune personne ni aucune institution ne saurait « posséder » ; et il y a le rapport que j'ai, *personnellement*, à cette notion, comme il y a le rapport que l'on *devrait* avoir à elle quand on occupe légitimement telle position en telle institution – rapport qui, au lycée, ne sera pas le même pour le professeur de mathématiques et pour le professeur de physique et chimie par exemple. La notion *supposée* est celle qu'on *évoque* lorsque, par exemple, tel sujet de telle institution me demande si je connais cette notion : la notion supposée est alors le référent d'un jeu d'évocations ; elle n'est pas *sa* notion à lui ni *ma* notion à moi. Elle est ce qu'il faut que nous supposions ensemble, pris que nous sommes dans une culture commune, pour échapper au solipsisme. Elle est la condition de l'intersubjectivité et de l'inter-institutionnalité.

2.2. Je reviendrai plus loin sur l'explicitation en termes de *rapport* tant de la *statique cognitive* personnelle ou institutionnelle (dont l'objet est le système des rapports $R(x, o)$ et $R_I(p, o)$ aux objets o pour lesquels ces rapports sont « non vides ») que de la *dynamique cognitive*, qui examine les conditions du changement cognitif, pour une personne ou une institution. Notons seulement que cette explicitation permettait de confirmer dans une certaine mesure le point de vue commun, et en particulier scolaire, fondé sur le postulat pré-anthropologique de l'unicité essentielle du monde (il y aurait *la* notion de logarithme, celle de courage, ou de persévérance, ou la notion de produit scalaire, etc.), tout en affirmant techniquement le fait massif de la fragmentation institutionnelle et personnelle de la connaissance, appréciée à la diversité des rapports personnels et institutionnels observables. Cette affirmation permettait de poursuivre et de préciser l'étude des déformations, réformations et formations transpositives, notamment en généralisant la notion de transposition *didactique* par la notion de transposition *institutionnelle*. En même temps, elle pouvait être reçue comme une deuxième agression narcissique envers le système scolaire *lato sensu* : là où celui-ci plaçait des « idées claires et distinctes », uniques et universelles – on « possèderait » ou non *la* notion d'angle droit, on connaîtrait ou non *le* théorème de Pythagore –, la notion de rapport personnel ou institutionnel à un « objet » désignait sans façon un bric-à-brac indistinct, changeant d'individu à individu et d'institution à institution, au sein d'un espace où le seul repère proposé – le « savoir savant » – paraissait à beaucoup irrecevable en tant qu'origine d'une distance – celle séparant savoir enseigné et savoir savant – qui en elle-même faisait scandale.

2.3. La notion de rapport permet de formuler aisément divers problèmes : elle fournit un langage qui donne une grande précision à certaines descriptions. Ainsi en va-t-il, entre autres choses, s'agissant de l'*évaluation* : dans l'institution I, le rapport $R(x, o)$ d'un sujet x en position p à un objet o pour lequel existe un rapport $R_I(p, o)$ non vide (les personnes assujetties à I en position p doivent *avoir une certaine connaissance* de o, celle-là même que décrit le rapport $R_I(p, o)$), est évalué par un sujet z occupant dans I une position p_v spécialisée, celle d'évaluateur, z étant censé apprécier le degré de conformité de $R(x, o)$ à $R_I(p, o)$, ce qui suppose en principe chez lui certains *rapports aux rapports* $R(x, o)$ et $R_I(p, o)$, et plus précisément des rapports $R(z, R(x, o))$ et $R(z, R_I(p, o))$ à peu près conformes à de supposés rapports $R(p_v, R(x, o))$ et $R(p_v, R_I(p, o))$, dont la formation et la diffusion dans la culture de I est en soi un problème.

2.4. On aperçoit aisément, je pense, que, par le sentiment de *relativité des contenus et des formes de la connaissance* qui l'inspire et qu'elle nourrit, l'analyse en termes de rapports, de sujets, de personnes met en danger les passions institutionnelles exclusives et, positivement, porte à prendre ses distances plus encore par rapport à la vision du monde que tend à imposer à ses sujets telle institution donnée – en l'espèce l'École et l'enseignement des mathématiques qui s'y donne. Mais le progrès de la théorisation allait naître pourtant, non pas tant des problèmes que la notion de rapport aidait à poser (et, en quelques cas, à résoudre), mais de l'effort pour élucider la genèse et l'évolution des rapports d'une personne ou d'une institution, c'est-à-dire la fabrication de leur univers cognitif – qu'on peut noter, respectivement, $U(x) = \{ (o, R(x, o)) ; R(x, o) \neq \varnothing \}$ et $U_I = \oplus_p U_I(p)$, avec $U_I(p) = \{ (o, R_I(p, o)) ; R_I(p, o) \neq \varnothing \}$, où o appartient à l'ensemble K des objets de la culture globale dans laquelle I et x sont plongés. Pour nombre d'objets $o \in K$, pour beaucoup de personnes x et de positions p au sein d'institutions I, on a $R(x, o) = \varnothing$, c'est-à-dire que x ne connaît pas o, ou $R_I(p, o) = \varnothing$, c'est-à-dire qu'une personne x en position p dans o n'a pas, *en tant que telle*, à connaître o. Comment, alors, émergent les objets qui peuplent tel univers cognitif institutionnel ou supra-institutionnel et permettent par là aux personnes et aux institutions de communiquer ou de s'imaginer le faire ? La définition donnée du rapport à un objet o était sans apprêt : entrait – et entre – dans le rapport de x à o tout ce que x est amené à faire avec o, en incluant ce que la personne x pense, dit, ou même rêve à son propos. L'analyse de cette définition allait conduire à la notion de *praxéologie*, par laquelle une avancée décisive se réalisait.

2.5. Pour espérer observer la naissance ou l'évolution d'un rapport à un objet o, il faut, si je puis dire, observer l'individu x ou l'institution I « dans son rapport à o », dans les activités de x ou de sujets de I qui « activent » o. De là prirent progressivement forme les notions clés de *type de tâches*, de *technique*, de *technologie*, de *théorie*. Un objet o est mobilisé dans l'exécution d'une certaine tâche t lorsqu'on effectue cette tâche selon une certaine technique τ relative au *type* T sous lequel l'institution où la tâche t s'accomplit la pense. Imaginons une institution I dont les sujets occupant une certaine position p ait pour unique occupation de résoudre des équations de la forme $a^x = b$, et cela par la technique que l'on peut décrire à peu près ainsi : « Récrire l'équation donnée sous la forme $x = \frac{\ln b}{\ln a}$ puis utiliser la calculatrice de votre ordinateur pour effectuer l'opération indiquée. » La mise en œuvre de cette technique sur l'équation $2^x = 10$, par exemple, aboutit ainsi à $x \approx 3{,}32192809488736234787031943$. Le rapport à l'objet « logarithme » de qui n'aurait commerce avec lui qu'en cette façon fait apparaître cet objet simplement comme « la touche de la calculatrice qu'on utilise quand on résout une équation du type $a^x = b$ ». Pourrait-on conclure aussi que, selon ce rapport, le logarithme apparaît comme une *fonction*, par exemple ? Sans doute pas : il semble qu'on en reste ici à la notion de « logarithme d'un nombre », comme on parle de la « racine carrée d'un nombre » sans penser la chose en termes de fonction. Il semble même que, pour une personne x ayant fait des études secondaires de mathématiques mais ayant occupé ensuite indéfiniment la position p, le rapport originaire, formé au lycée, à l'objet « logarithme » finisse par se réduire à ce qu'on a dit – la dynamique cognitive stylisant l'objet en fonction de l'emploi qu'on lui donne. Notons qu'un objet o ne se « manipule » jamais que par l'entremise d'objets *ostensifs*, c'est-à-dire qui ont une certaine *matérialité* (comme il en va des signifiants langagiers) : leur matérialité (graphique, sonore, etc.) donne prise sur eux – on dira qu'ils ont une *valence instrumentale* – en même temps qu'elle leur permet de nous faire signe – on parlera à cet égard de leur *valence sémiotique*. L'objet « logarithme », par exemple, est, en tant que non-ostensif, un émergent fragile, incertain du jeu réglé qui se mène avec certains ostensifs associés. Le non-ostensif « logarithme » ne sera pas exactement le même – le rapport à l'objet « logarithme » diffèrera si peu que ce soit – selon les ostensifs manipulés et les règles de manipulation – règles qui, elles-mêmes, n'existent que par la présence d'autres non-ostensifs, qui en soutiennent la formulation ostensive. Ajoutons à cela deux ou trois remarques encore que suggère l'exemple du logarithme. Tout d'abord, les objets – ostensifs et non ostensifs – vont *par « bandes »*. Ils vivent au sein d'associations d'objets – au sens où les botanistes parlent d'associations végétales, par exemple – créées par les activités humaines. Ensuite, parmi les objets ainsi associés, on trouve aussi bien de simples « gestes » techniques que des « concepts » technologiques. Ces derniers, qui permettent de penser, de contrôler, de justifier les gestes accomplis, peuvent être employés de façon plus ou moins « rigoureuse » (certains lecteurs auront par exemple été gênés que, plus haut, j'aie parlé sans façon du logarithme *d'un nombre*, et non du logarithme d'un nombre strictement *positif*), et entrer dans des configurations de pensée variées : le même professeur de lycée qui s'étonnera qu'on puisse, au collège, parler de la racine carrée d'un nombre en ne la regardant pas comme ce que, *pour lui*, elle est, à savoir la *fonction* racine carrée, s'irritera si on lui fait reproche de ne pas voir, dans l'addition des entiers, ce que, pour d'aucuns, elle est indubitablement – une fonction, et de *deux* variables par-dessus le marché ! « Vérité en deçà des Pyrénées, erreur au-delà. »

2.6. Le travail visant à modéliser la structure de l'activité humaine sera conduit essentiellement sur du matériel mathématique. Mais il se nourrira aussi d'exemples empruntés à une grande diversité de conduites parmi les plus quotidiennes, en prenant appui pour cela sur certaines analyses anciennes de Marcel Mauss (1876-1950) sur les *techniques du corps*. Aller en marchant de ce point de l'espace-là à celui-ci est une « tâche », et d'un type qui requiert une technique déterminée, en laquelle Marcel Mauss voyait une véritable « idiosyncrasie sociale », accompagnée, dans la culture de l'institution où elle trouve son habitat, par tout un cortège de commentaires technico-technologico-théoriques. Rien n'est entièrement donné, tout s'édifie, se reconstruit, et cela différemment selon les lieux, les sociétés, les âges, etc. À cet égard, *l'altérité praxéologique* est partout, qui surprend, irrite ou séduit selon le cas. Soit à diviser 283 par 84. Le diviseur, 84, est égal à 4 fois 21, soit à $4 \times 3 \times 7$. Je divise d'abord par 4 : le quotient est celui de 280 par 4, soit 70 ; je poursuis en divisant par 3 : le quotient est celui de 69 par 3, soit 23. Il me reste alors à diviser par 7 : le quotient de 23 par 7 est 3. J'en ai terminé : le quotient de 283 par 84 est 3. Mais j'ai été trop mécanique : j'aurais plus vite fait de diviser le quotient 70 par 7, ce qui aurait donné 10, et de diviser alors ce nouveau quotient par 3, ce qui aurait donné 3 – à nouveau. À cela le professeur d'aujourd'hui, qu'on ne surprend pas, objectera : cela ne tient pas debout ! Vous négligez allègrement les restes ! Votre prétendue technique peut réussir par chance (ici, elle réussit, c'est vrai, puisque $283 = 3 \times 84 + 31$), mais ce n'est qu'un « truc », qui ne saurait constituer une règle générale et qu'il faut se garder de répandre chez les élèves. Or il se trouve que ce « truc » artificieux était officiellement enseigné aux élèves des collèges, il y a de cela trois quarts de siècle, et que sa justification, en bonne et due forme mathématique, pouvait être demandée au baccalauréat (elle le fut en 1950 par exemple).

2.7. Très généralement, en un tel cas de rejet injustifié, c'est la *technologie* qui manque, même quand elle est très simple. Ici, elle se ramène essentiellement à ceci : si le diviseur b s'écrit $b = b_1b_2$, si $a = b_1q_1 + r_1$, si, ensuite, $q_1 = b_2q_2 + r_2$ (avec, bien sûr, $0 \leq r_1 < b_1$ et $0 \leq r_2 < b_2$), on aura $a = b_1(b_2q_2 + r_2) + r_1 = b_1b_2q_2 + b_1r_2 + r_1$; or il vient ceci : $b_1r_2 + r_1 \leq b_1(b_2 - 1) + b_1 - 1 = b_1b_2 - 1 < b_1b_2 = b$. L'affaire est entendue. On voit que la clé se trouve dans le jeu entre $<$ et $\leq$, entre inégalité *stricte* et inégalité *large*. À la place de la technologie mathématique manquante – que je viens à l'instant de rétablir dans ses droits –, on voit généralement s'imposer un principe « théorique », vague à souhait, quelque peu « métaphysique », *qui s'autorise de lui-même* et vient borner l'univers connu – ici, le principe « qu'on ne peut négliger les restes ». Une semblable configuration technologico-théorique se retrouve lorsqu'un professeur prétend aujourd'hui interdire à un élève de conclure, par exemple, à l'égalité des fractions $\frac{9}{14}$ et $\frac{279}{434}$ après avoir observé sur sa calculatrice que $\frac{9}{14} =$ 0,6428… et que, de même, $\frac{279}{434} =$ 0,6428… Cela, au motif que les suites de décimales *pourraient* différer plus loin, au-delà de la 12^e^ décimale, voire au-delà de la 30^e^ décimale par exemple. Or de même que si la différence entre deux entiers est, en valeur absolue, inférieure à 1, ces deux entiers sont égaux, de même, dès lors que la différence entre deux fractions *données* est assez petite, *ces fractions sont égales*. En l'espèce, puisque $14 < 20$ et $434 < 500$, la différence de fractions de la forme $\frac{a}{14}$ et $\frac{b}{434}$ (où $a, b \in \mathbb{N}^*$), et donc la différence des fractions considérées, ne peut, sans que les fractions soient égales, être inférieure en valeur absolue à $\frac{1}{14 \times 434} = \frac{1}{6076} < \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$. En fait, comme 434 est un multiple de 14, il y a égalité dès que la différence est en valeur absolue inférieure à $\frac{1}{434} < 0{,}0023$, en sorte qu'il suffit de savoir que les fractions $\frac{a}{14}$ et $\frac{b}{434}$ ont leurs *trois* premières décimales identiques pour pouvoir conclure à leur *égalité*. Le précepte « théorique » qui, en ce cas, engendre couramment le rejet d'une technique pourtant parfaitement justifiable est bien connu : « Se méfier de la calculatrice. » En mathématiques comme en tout domaine d'activité, c'est ainsi au niveau *théorique* que se révèlent à qui sait les lire les limitations et les failles de la connaissance d'une institution.

2.8. Dans le travail engagé, la référence anthropologique était essentielle, de même que l'était le refus de valider sans plus d'examen les constructions intellectuelles naturalisées et patinées par la culture courante : en témoigne déjà le choix des mots du lexique « praxéologique » – celui de *technologie* notamment –, qui semblent dissonants à des oreilles profanes. Du savoir aux savoirs, l'élargissement de la matière travaillée apparaissait encore insuffisant. Dans ses *Mémoires*, François Guizot (1787-1874) écrivait [1] : « Je ne connais rien de plus nuisible aujourd'hui pour la société, et pour le peuple lui-même, que le *mauvais petit savoir populaire*, et les idées vagues, incohérentes et fausses, actives pourtant et puissantes, dont il remplit les têtes. » Pour des raisons de science, non de correction « politique », l'anthropologie didactique ne pouvait ignorer ce « mauvais petit savoir populaire », pour cela déjà que les « idées vagues, incohérentes et fausses » qu'il peut contenir sont « actives » et « puissantes » dans la société. De là sortit la notion de *praxéologie*, ce mot étant choisi pour désigner l'union d'un bloc pratico-technique $\Pi = [T/\tau]$, formé d'un type de tâches T et d'une technique τ pour accomplir les tâches du type T, avec un bloc technologico-théorique $\Lambda = [\theta/\Theta]$, constitué d'une technologie θ justifiant la technique τ et d'une théorie Θ justifiant la technologie θ. Une praxéologie *ponctuelle* (formée autour de ce « point » qu'est un type de tâches T) est ainsi une organisation anthropique qu'on peut noter $O = [\Pi/\Lambda] = [T/\tau/\theta/\Theta]$. Cela noté, un mot de mise en garde quant au vocabulaire employé ne paraît pas inutile. Tout d'abord, le mot de praxéologie ne désigne pas l'étude (*-logie*) de la pratique humaine (*praxéo-*) : pour l'entendre ainsi, du moins, il serait nécessaire de renoncer à l'illusion intéressée d'une « science » et d'une « pratique » hypostasiées, sans attaches institutionnelles, universelles, et de regarder *une* praxéologie pour ce qu'elle est *à l'échelle d'une institution ou même d'une personne*, à savoir la « science » Λ (personnelle ou institutionnelle) d'une certaine pratique Π, science qui conçoit et contrôle cette dernière et en permet la mise en œuvre, et que l'institution ou la

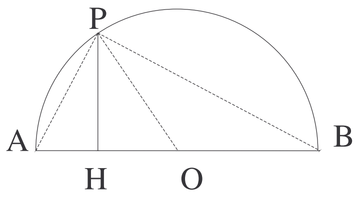
[1] Cités *in* Pierre Rosanvallon, *Le moment Guizot* (Gallimard, Paris, 1985), p. 247.

personne *porte en elle*. Mais il est sans doute plus important encore de préciser que les notions de technologie et de théorie doivent être entendues en un sens *propre à l'institution ou à la personne* considérée. Est technologie ce qui, dans une institution ou pour une personne, remplit la *fonction* technologique – justifier, éclairer la technique τ relative au type de tâches T, voire permettre de l'engendrer (ou de la reconstruire, quand elle est « donnée »). De même, est théorie ce qui assume, en cette institution ou pour cette personne, une fonction théorique. Dans un tel univers, les stratégies institutionnelles ou personnelles de diffusion, de rétention, de rejet praxéologique vont jouer un rôle prééminent ; mais on s'en doutait déjà.

2.9. Une deuxième observation semble indispensable, qui rejoint la remarque sur le caractère grégaire des objets : l'atome praxéologique qu'est une praxéologie *ponctuelle* vit rarement isolé. Des praxéologies ponctuelles $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, constituées chacune autour d'un unique type de tâches T_i, peuvent se grouper autour d'une même technologie θ : on obtient alors une organisation praxéologique *locale*, $\sum_i [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, structure emblématique de nombreuses praxéologies scolaires enseignées. Des organisations locales peuvent, de même, s'articuler, autour d'une même théorie Θ, avec d'autres organisations locales : on obtient alors une organisation *régionale*, $\sum_{ij} [T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]$. Des organisations régionales peuvent aussi trouver à s'amalgamer au sein d'une organisation *globale* articulant plusieurs ensemble théoriques Θ_k, ce qu'on peut noter $\sum_{ijk} [T_{kji}/\tau_{kji}/\theta_{kj}/\Theta_k]$. Il y a là un aspect fondamental de *l'écologie des organisations praxéologiques*, qu'il faut relier à la notion de *motivation* d'une praxéologie (ou d'un fragment praxéologique) : un type de tâches T (et la praxéologie ponctuelle qui se formera autour de lui) est motivé par une praxéologie $[T^\#/\tau^\#/\theta^\#/\Theta^\#]$ si la mise en œuvre de la technique $\tau^\#$ (pour accomplir une tâche de type $T^\#$) appelle l'accomplissement, à un moment donné, d'une tâche du type T. Selon une image empruntée à l'écologie biologique, se créent – et se rompent, au cours notamment des mouvements transpositifs – des *chaînes trophiques*, où une praxéologie « se nourrit d'une autre » – et, paradoxalement, par cela, *la fait exister* dans l'institution qui lui sert d'habitat [2]. Supposons que l'on veuille obtenir une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre, par exemple de 14,2. On pouvait utiliser autrefois – le souvenir s'en est largement perdu – une technique graphique $\tau^\#$ consistant en ceci : écrivant le nombre sous la forme d'un produit ab, on traçait un segment [AB] de longueur $a + b$, où l'on marquait le point H tel que AH = a ; on traçait alors un demi-cercle de diamètre [AB] :

[2] L'adjectif « trophique » vient du grec *trophê* « nourriture » (de *trephein* « nourrir »). On retrouve cette racine dans *atrophie*, *hypertrophie*, *dystrophie* (trouble de la nutrition).

d'après une propriété classique, la perpendiculaire à (AB) passant par H coupe ce demi-cercle en un point P tel que HP = $\sqrt{ab}$: il ne reste plus alors qu'à *mesurer* HP pour avoir la valeur



approchée attendue. (Ici, on a par exemple 14,2 = 2 × 7,1 et on aura donc a = 2, b = 7,1, $a + b$ = 9,1 ; etc.) À l'instar de l'ensemble des techniques composant ce qu'on appelait jadis le *calcul graphique*, une telle technique fait vivre non seulement une propriété géométrique clé (le fait que la hauteur d'un triangle rectangle est « moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse », comme on disait autrefois), mais encore tout un savoir-faire graphique – comment, par exemple, tracer de la façon la plus précise le demi-cercle de diamètre [AB] ? – qui lui-même appelle des propriétés géométriques, etc. J'ajoute ceci : soit par exemple à extraire la racine carrée de 34,5 ; si l'on sait que 345 = 3 × 5 × 23, on peut envisager d'écrire 36,5 sous la forme (3 × 2,3) × 5, soit encore 5 × 6,9. La technique $\tau^{\#}$ peut faire vivre ainsi, en la motivant, un type de tâches classique en mathématiques élémentaires : la décomposition d'un nombre en un produit de facteurs, et en particulier la décomposition d'un entier en facteurs premiers. Dans cette perspective, on distinguera l'écologie praxéologique de son *économie*, c'est-à-dire des choix personnels ou, plus généralement, institutionnels visant à contrôler l'extension des chaînes et réseaux trophiques, leur cartographie, et donc l'étendue des complexes praxéologiques, afin par exemple d'en permettre une diffusion plus « économique ».

3. Intermède : la didactique et son objet

3.1. On a parlé des rapports personnel et institutionnel $R(x, o)$ et $R_I(p, o)$ à un objet o. On peut maintenant parler de l'ensemble des praxéologies d'une personne x, ce que j'appelle (un peu cavalièrement) l'*équipement praxéologique* de x, et que je note $EP(x)$; et, bien sûr, de celles relatives aux sujets d'une institution I en position p en son sein, $EP_I(p)$. Le rapport de x à o est alors en quelque sorte la « coupe » de $EP(x)$ par l'objet o : il sera constitué à partir des praxéologies qui, dans $EP(x)$, « activent » o d'une manière ou d'une autre – par exemple au plan technique, ou dans le registre technologique, etc. La théorie praxéologique reprend et prolonge ainsi la théorie des rapports, à laquelle on peut toujours revenir si besoin est.

3.2. La notion de praxéologie conduit à exprimer dans ses grandes masses l'effet du travail transpositif par la formule $O = [\Pi/\Lambda] \mapsto O^* = [\Pi^*/\Lambda^*]$, où l'on peut avoir $\Lambda^* \approx \varnothing$ (le bloc pratico-technique, éventuellement altéré, subsiste, tandis que la part technologico-théorique s'efface), mais aussi $\Pi^* \approx \varnothing$ (la part pratico-technique a disparu, des éléments technologico-théoriques se mettent à « flotter », pour engendrer peut-être un « mauvais petit savoir »). Au-delà, les combinaisons praxéologiques qu'on peut s'attendre à observer sont *a priori* innombrables. Si l'ostensif qui nomme tel ingrédient de O – « théorème de Pythagore », par exemple – subsiste dans le transposé O^*, on pourra voir cet ingrédient simultanément présent dans l'une et l'autre institution. À cet égard, le concept de transposition didactique (et, plus largement, le concept de transposition institutionnelle) a outillé un travail fondateur pour émanciper la didactique de l'emprise de l'objet étudié, et tout particulièrement de la tyrannie des disciplines enseignées et de leurs suzerains, invoqués de façon souvent opportuniste, les disciplines « savantes » correspondantes. De façon générale, *la* question génératrice de la théorie de la transposition institutionnelle est : « Quelle est cette "chose" – cette réalité institutionnelle – que l'on désigne, en cette institution, d'un nom que l'on retrouve employé en telle ou telle autre institution, et quelles relations ces choses homonymes ont-elles entre elles ? » Jusque-là, en effet, s'imposait comme un postulat irréfragable la réponse : l'une et l'autre chose sont la *même* chose. La théorie de la transposition rompt avec cette fiction. Que la rupture se soit produite en ce maillon faible que constitue la transposition *didactique* n'est pas pour surprendre : dans une institution didactique, du moins dans une institution didactique *dominée* (ce que toutes, quasiment, sont), le postulat d'identité (ou d'unicité) du réel institutionnel a une valeur essentielle de légitimation : le théorème de Pythagore que nous enseignons, c'est *le* théorème de Pythagore, et voilà pourquoi il n'est pas besoin d'en rendre raison, ni même de dire ce qu'il est. La résistance au dévoilement du fait transpositif fut vive, et elle le reste.

3.3. Ce que dit la théorie de la transposition didactique, en d'autres termes, c'est qu'il n'y a pas de « repère privilégié » à partir duquel observer, analyser, juger le monde des savoirs et, plus largement, des praxéologies. Le « savoir savant » lui-même est une *fonction*, non une substance, et par rapport à quoi le didacticien *doit expressément s'excentrer*. De là découle que le travail du didacticien consiste, chaque fois, en la construction d'un repère jamais définitif depuis lequel analyser les praxéologies dont il étudie la diffusion. Mais avant de poursuivre dans cette voie – que fait, que doit faire le didacticien ? –, je veux tenter maintenant de définir la didactique. Une définition de dictionnaire pourrait être celle-ci : *la* didactique est la science qui étudie *le* didactique. Il reste évidemment à préciser ce qu'on met sous la référence *au* didactique. Classiquement, je répondrai ceci : il y a du didactique lorsqu'une personne ou une institution, se faisant par là *agent didactique*, fait quelque chose *afin* qu'une institution ou une personne « apprenne » un certain ensemble praxéologique, c'est-à-dire afin que cet ensemble arrive jusqu'à cette institution ou cette personne et finisse par s'intégrer à son équipement praxéologique. Bien entendu, on ne dit pas que cet apprentissage institutionnel ou personnel se réalisera ni que, dans le trajet de l'ensemble praxéologique jusqu'à l'institution ou la personne visée, il ne se produise pas de ces déformations et réformations que prévoit la théorie de la transposition didactique : tout au contraire, ce pourra être là une partie de ce que *font* délibérément les agents didactiques afin de voir leur projet de diffusion praxéologique réussir !

3.4. Pour avancer à partir de cette première définition, je voudrais situer la didactique en tant que science. Toute science – c'est du moins ce que je soutiendrai – se définit en se donnant pour objet d'étude un certain ensemble *de conditions et de contraintes de la vie des sociétés humaines*. Cette définition, qui paraît d'abord n'être appropriée, au mieux, qu'aux sciences « humaines et sociales », vaut en fait – tel est le postulat que je pose – pour *toute* science : les sciences dites « de la nature », les sciences mathématiques elles-mêmes étudient certains types de conditions et de contraintes de la vie des hommes – pour les connaître et les modifier en les allégeant, en les déplaçant, etc. – et participent à ce titre du même paradigme épistémologique que les sciences humaines et sociales. Cette assertion, au demeurant, se retourne : à l'instar des sciences de la nature, les sciences sociales étudient *comme des faits de nature* certaines des conditions et contraintes de la vie des sociétés. Point de vue qui ne devrait pas surprendre : c'était déjà celui que Freud défendait en situant la psychanalyse *parmi les sciences de la nature* [3].

[3] Dans son ouvrage *Sigmund Freud présenté par lui-même* (*Selbstdarstellung*, 1925), on lit notamment ceci (la psychologie dont parle Freud est la psychologie de l'inconscient, c'est-à-dire la psychanalyse) : « Des concepts fondamentaux clairs et des définitions aux contours nets ne sont possibles que dans les sciences de l'esprit *[Geisteswissenschaften]* et pour autant que celles-ci veulent englober un domaine factuel dans le cadre d'un système intellectuel constitué. Dans les sciences de la nature *[Naturwissenschaften]*, dont la psychologie fait partie, une telle clarté des concepts supérieurs est superflue, voire impossible. La zoologie et la botanique n'ont pas commencé par des définitions correctes et suffisantes de l'animal et de la plante ; la biologie ne sait pas, aujourd'hui encore, donner un contenu certain au concept de vivant. La physique elle-même serait passée à côté de toute son évolution, si elle avait dû attendre que ses concepts de matière, de force, de gravitation et autres atteignissent la clarté et la précision souhaitables. »

3.5. Quel est donc le « paquet » de conditions et de contraintes qui fait l'objet des recherches en didactique ? Pour ce qui est de la didactique *des mathématiques*, je commencerai par répondre ceci : au sens large, la didactique des mathématiques se voue à étudier les conditions et contraintes sous lesquelles *des praxéologies mathématiques* se mettent à vivre, à migrer, à changer, à opérer, à dépérir, à disparaître, à renaître, etc., au sein des groupes humains. Cette définition soulève pourtant un problème. Un problème que toute didactique – de ceci ou de cela – doit affronter : une part essentielle de son objet – que ce soit « les mathématiques », « la biologie », « l'éducation physique et sportive », etc. –, et une part regardée comme définissant sa « spécificité » au sein de *la* didactique, est prise telle que le didacticien la trouve *pré-construite* dans l'univers social qu'il étudie, au mépris des principes les plus fondamentaux de toute conceptualisation scientifique. Sans pour autant les ignorer, une science ne saurait en effet se soumettre sans plus de façon aux préconceptions touchant son objet qui imprègnent la culture commune. Encore moins peut-elle les sanctifier ! On voit immédiatement que, dès lors qu'il en est ainsi, la didactique de ceci ou de cela est *dominée* par la partie du monde institutionnel dont elle reçoit passivement le découpage de son objet, qu'elle adopte parfois pour étendard alors qu'il s'agit d'un donné du monde étudié et non d'un construit de la science qui prétend l'étudier.

3.6. Le concept de praxéologie permet d'aborder plus sereinement le problème. En proposant un objet générique, il permet en effet d'énoncer dans une pleine généralité cette définition : *la didactique se voue à étudier les conditions et contraintes sous lesquelles les praxéologies se mettent à vivre, à migrer, à changer, à opérer, à dépérir, à disparaître, à renaître, etc., au sein des institutions humaines*. Bien entendu, il y a là un élargissement *a priori* considérable du champ de la didactique : *la* didactique étudie *le* didactique partout où on peut le trouver, quelque forme qu'il affecte de prendre. En se donnant ainsi un objet propre, la didactique peut espérer échapper progressivement au statut dominé qui est le sien tant qu'elle ne veut être – souvent passionnément – que le double incertain de champs disciplinaires établis à l'École, ayant conquis leur autonomie, et parfois fort réticents à voir un autre rapport institutionnel émerger à certains objets qu'ils tiennent pour intrinsèquement leurs, attitude qui revient à nier en conscience institutionnelle la circulation transpositive des objets, des rapports, des praxéologies. Par contraste, l'altérité praxéologique s'éprouve d'abord à ceci que telle institution, ou plutôt telle personne qu'on ne voit pas d'abord comme sujet s'autorisant de telle autre institution, se prévaut, vis-à-vis de tel objet, d'un rapport dissemblable au rapport supposé « orthodoxe », et donc d'un rapport bientôt déclaré hétérodoxe, voire hérétique, ou, au moins, suspect parce que non conforme. Cette dissemblance des rapports à des objets que l'on tient d'abord pour identiques (ou pour semblables à s'y méprendre) se manifeste notamment ainsi : dans le discours technologique qui se fait entendre, dans les gestes techniques qui se donnent à voir, voici qu'apparaissent, à côté des objets connus, familiers, allant de soi, des *objets inconnus*, des *mots inédits*, des énoncés quasi *inaudibles*, qui dénoncent l'*hétérogenèse* de l'organisation praxéologique qui, à travers eux, se laisse apercevoir. Faire entendre un rapport nouveau à un objet ancien, parfois saturé d'attentions jalouses dont la plupart visent à l'exclusivité, ne va donc pas de soi. Or, tel est bien généralement le problème du didacticien. Tel est notamment le problème du didacticien des mathématiques, à moins qu'il ne consente à s'asservir au double point de vue de l'institution de production des mathématiques et de l'institution d'enseignement des mathématiques, ce qui aurait toutes chances de ruiner le projet d'une science de la diffusion sociale des praxéologies mathématiques.

4. Conditions et contraintes didactiques

4.1. Formulé dans sa pleine généralité, le second grand type de problèmes que j'ai évoqué au début de mon propos est celui de la diffusion (et de la non-diffusion) des praxéologies *didactiques* dans l'espace institutionnel d'une société (voire d'une civilisation) et tout particulièrement au sein de son École (si, du moins, on peut repérer en la société considérée un type institutionnel répondant plus ou moins à cette appellation, sur laquelle je vais revenir). En vérité, le problème inaugural, qui reste jusqu'à ce jour le ressort des travaux auxquels mon nom est associé, fut pour moi celui de la diffusion – et surtout des *difficultés* de la diffusion, notamment dans l'enseignement *secondaire* français – des praxéologies didactiques engendrées par la *théorie des situations didactiques* (TSD). Quelles contraintes empêchaient leur libre circulation et leur pleine pénétration institutionnelle ? Sous quelles conditions ces praxéologies étaient-elles durablement viables, à un coût supportable, en telle ou telle partie de l'institution scolaire ? Il y a là, je ne saurais trop le répéter, le principe générateur de la plupart des travaux auxquels je me suis voué jusqu'à ces dernières années dans le cadre de la TAD. Mais, pour saisir de façon adéquate les avancées qui ont jalonné cet effort de longue durée, il convient de prendre un point de vue plus large sur le problème *général* de la diffusion des praxéologies de toutes natures – et des praxéologies *didactiques* en particulier.

4.2. Les deux définitions de la didactique que j'ai mentionnées jusqu'ici peuvent paraître légèrement désaccordées. La première conduit à préciser que, pour qu'il y ait du didactique – et pas seulement de l'apprentissage –, il faut qu'existe quelque part une *intention* didactique. Le *porteur* de cette intention – personne ou institution – cherche à modifier ou à créer des contraintes et des conditions visant à réaliser son intention – sans forcément y parvenir. En ce sens, la didactique doit s'affronter à l'analyse de conditions et de contraintes, dont elle étudie l'écologie, l'économie, les effets en termes d'apprentissage institutionnels ou personnels. Mais elle ne saurait se limiter à l'étude des seules conditions et contraintes derrière lesquelles apparaît une intention didactique : pour étudier par exemple l'efficacité de tel système de conditions et de contraintes – c'est-à-dire de telle *organisation didactique* – créé dans une classe par un professeur, on peut être amené à prendre en compte des conditions et contraintes qui, elles, n'ont pas été créées par le professeur, et qui ne répondent à aucune intention didactique clairement identifiable – même si le progrès des recherches peut mettre en évidence, dans tel ou tel cas, que la chose n'est pas si nette qu'il y paraissait de prime abord. De cette observation découle la définition « englobante » donnée plus haut.

4.3. Cette définition soulève plusieurs difficultés apparentes. Parmi les contraintes qui peuvent jouer sur la réalisation effective de telle intention didactique, on compte classiquement, on le sait, le sexe – le « genre » – et la position sociale. Le didacticien a-t-il à s'en préoccuper ? Certainement, dès lors qu'on a des raisons de *supputer* un effet de ces contraintes sur les mécanismes de diffusion des praxéologies que l'on « suit ». Plusieurs remarques sont ici nécessaires. La première est que la tentation de considérer de telles conditions comme extérieures au champ d'étude du didacticien semble résulter d'une confusion que j'ai déjà dénoncée, qui fait du didacticien un double exhaussé du professeur et le conduit en conséquence à ne s'intéresser qu'aux conditions et contraintes sur lesquelles le professeur est censé avoir prise – et cela, qui plus est, *dans le cadre de la classe*. Or, céder à cette tentation revient à figer le rôle du professeur dans une pose historiquement constituée. Lorsqu'un professeur de mathématiques rencontre (officiellement) les parents d'un élève, du didactique est-il en jeu ? Le didacticien doit-il y aller voir ? Je crains que beaucoup, parmi les didacticiens, ne répondent aujourd'hui par la négative ! Les parents sont bien évidemment porteurs de conditions et de contraintes à valence didactique, dont certaines procèdent explicitement d'une intention didactique de leur part – ils veulent faire « quelque chose » pour la réussite scolaire de leur enfant en mathématiques –, et dont d'autres, qui, tout simplement, *sont là*, n'en pèsent pas moins sur les apprentissages de leur progéniture. Le professeur, de son côté, mû par une intention didactique *sui generis*, peut vouloir déplacer, alléger, conforter certaines de ces conditions et contraintes ; il peut tenter d'en créer de nouvelles, regardées, peut-être à tort, comme davantage favorables. L'interaction est donc potentiellement didactique : elle entre dans le champ d'investigation des didacticiens. Que les didacticiens, collectivement, n'y aillent pas voir est d'abord un manquement scientifique ; c'est ensuite, si peu que ce soit, une forme d'encouragement donné à la profession – celle des professeurs, s'entend – pour qu'elle ne sorte pas de ses frontières traditionnelles, c'est-à-dire qu'elle ne cherche pas même à identifier des variables de commande potentielles, jusque-là inaperçues ou ignorées, du projet d'enseignement dans lequel les professeurs se contenteront alors de jouer une partition écrite une fois pour toutes. Je note que la petite analyse précédente vaut aussi pour l'interaction entre, par exemple, une conseillère d'orientation et un élève, ou entre un chef d'établissement et une élève et ses parents, etc. C'est pourquoi j'ai pu avancer, à l'occasion de la création des IUFM, au début des années 1990, que la didactique des mathématiques, comme la didactique de la biologie, ou celle de la littérature, etc., étaient aussi des savoirs *fondamentaux* pour les acteurs et responsables du système éducatif – même si, bien entendu, il reste à préciser ce que serait le contenu d'une formation en didactique de la biologie pour chefs d'établissement par exemple !

4.4. D'autres obstacles surgissent encore sur la voie ouverte jusqu'ici. Dans la ligne précédente, il faut mentionner d'abord les effets du modèle causal implicite qui « travaille » toute action publique, dont le trait principal est d'être essentiellement *unifactoriel*, ou du moins de mettre en avant un facteur dont le poids l'emporterait de loin sur tout autre. De façon plus précise, le rôle dominant est attribué à ce facteur « spécifique » que l'acteur social impliqué – professeur, médecin, etc. – dans le projet considéré est censé pouvoir contrôler, celui sur le bon usage duquel tourne le contrat institutionnel qui l'a fait, socialement, ce qu'il est – professeur, médecin, etc. Contre ce présupposé à la fois subreptice et imposé, la *problématique écologique*, introduite très tôt, fait entendre un autre son : le facteur dominant, s'il existe, n'est pas toujours celui qu'on voudrait croire ; en outre et surtout, un tel facteur n'existe pas nécessairement – les combinaisons de facteurs peuvent être fort diverses et il faut chaque fois y être spécifiquement attentif. D'où les formulations en termes de conditions et de contraintes, qui renvoient à des configurations qu'il faut identifier et analyser, et qui déçoivent souvent une demande sociale encore peu éduquée et, pour cela, friande d'unifactorialité. Ce que montre aujourd'hui l'engouement pour le gène de ceci ou de cela dans le domaine médico-psychologique est aussi ce que montrent depuis toujours la quasi-totalité des « modes pédagogiques », dont le secret consiste à présenter tel facteur élu parmi mille autres comme l'alpha et l'oméga de la réussite des apprentissages – de *tous* les apprentissages.

4.5. Au contraire de la réduction unifactorielle que proclame dogmatiquement toute mode pédagogique en poussant à la limite, pour l'exploiter, la situation traditionnellement faite aux professeurs, les didacticiens doivent chercher à développer une sensibilité « plurifactorielle », en allant souvent, pour ce faire, contre la présentation de soi des institutions concernées – lesquelles tendent à ne désigner que les facteurs qu'elles espèrent pouvoir contrôler. Bien entendu, le didacticien n'est jamais sûr de ne pas ignorer certaines conditions et contraintes pourtant réellement « actives » ; mais tel est le lot ordinaire du chercheur en tout champ scientifique. Cela dit, il n'y a là, en vérité, qu'un cas particulier d'un phénomène bien plus large : le fait que, toutes choses égales par ailleurs, tel groupe de conditions et de contraintes possède un effet non négligeable sur la diffusion de tel complexe de praxéologies *dépend de la « nature » de ces praxéologies*. On retrouve là, sous une autre forme, un aspect classiquement définitoire de la didactique des mathématiques : elle étudie, dit-on souvent, ce qui, dans les conditions et contraintes possibles, est *spécifique* des praxéologies (ou des fragments de praxéologie) dont la diffusion est visée. Telle condition, dont le poids sera grand – dans un sens ou dans l'autre – dans la diffusion de telle praxéologie en tel groupe humain pourra voir son rôle réduit à rien, ou presque, s'agissant d'autres praxéologies et du *même* groupe humain. Notons à ce propos que, par contraste avec l'attention *élargie* à la spécificité du contenu à diffuser qu'impulse l'abord anthropologique du didactique, il arrive régulièrement aux professeurs, lorsqu'ils sont tentés d'attribuer à leur classe des propriétés *indépendantes des contenus enseignés*, d'être surpris de découvrir un jour, au contraire, sa *sensibilité aux contenus* : ce groupe humain qu'ils croyaient bien connaître, ils le méconnaissaient d'autant plus en tant que porteur de conditions et de contraintes sensibles à certains contenus praxéologiques et non à d'autres. Notons aussi que cette dénégation en acte de la diversité de l'écologie didactique entraîne que le travail des conditions et contraintes dont les élèves sont porteurs n'inclut pas, ordinairement, dans la classe, un travail lié spécifiquement au contenu praxéologique à diffuser – ce qui ramène invariablement certains professeurs, face aux démentis opposés alors par le réel, à s'en remettre à l'espoir mythique d'une « individualisation de la pédagogie », comme si la personne de l'élève n'était pas elle-même porteuse d'une foule hétérogène de conditions et de contraintes inégalement sensibles aux contenus étudiés !

5. Étude scolaire et monumentalisation des savoirs enseignés

5.1. La sensibilité au contenu à diffuser que peut manifester tel complexe de conditions et de contraintes ne dépend pas *que* du contenu praxéologique en question : quand on examine les agents didactiques concernés à un titre ou un autre par cette diffusion, on découvre qu'elle dépend *aussi*, bien sûr, de ce que ces agents *font* pour aider à la diffusion de ce contenu et à sa bonne intégration à l'équipement praxéologique du groupe humain désigné. En d'autres termes, elle dépend des conditions et contraintes que ces agents didactiques vont créer ou modifier dans le but de « faire quelque chose » en faveur du projet de diffusion praxéologique auquel ils prêtent leur concours. À cet égard, un geste didactique essentiel est celui consistant à interrompre l'activité « ordinaire » pour se pencher sur une difficulté surgie dans l'action vécue, en d'autres termes pour *étudier* l'élément *problématique* – ou apparemment tel – qu'on aura rencontré. Ce surgissement de l'étude dans l'activité ordinaire peut n'interrompre cette dernière que quelques secondes, soit que la difficulté ait été presque immédiatement surmontée, soit qu'elle ait été refoulée – par exemple parce qu'on la nie, en niant du même coup les conséquences éventuelles de ce *déni de problématicité* –, ou encore parce que, dans l'action en cours, on aura pris une autre route, qui évite la difficulté supposée.

5.2. Pourquoi nommer « étude » des épisodes éphémères, surtout lorsqu'il n'y a que velléité d'étude et que cette étude *potentielle* sera peut-être finalement une étude mort-née ? Une raison importante de le faire est celle-ci : dans ce que je nommerai plus loin l'étude *scolaire*, de tels épisodes fleurissent constamment, par exemple chaque fois qu'un élève ou un binôme d'élèves est censé s'affronter seul à une certaine difficulté – mathématique, orthographique, syntaxique, etc. Ce *didactique labile*, que l'on retrouve par ailleurs si souvent dans les situations les plus ordinaires de la vie quotidienne, et qu'induit si densément le didactique scolaire « lourd », est en quelque sorte niché au cœur de celui-ci. Dans un épisode d'étude se forme toujours, si brièvement que ce soit, un *système didactique*, où l'on peut identifier la place de l'élève (celle occupée par les acteurs x de l'épisode), la place de l'aide à l'étude y (occupée par l'un ou l'autre de ces acteurs, et quelquefois successivement par chacun d'eux, ou par une personne *a priori* extérieure au cours d'action), ainsi que la place de la praxéologie – manquante ! – dont les x cherchent à se rendre maîtres – notamment par un « dialogue », qui peut-être tournera court, avec un milieu « inaugural », celui où la difficulté a surgi. On aura observé que ce type de conditions et de contraintes – que l'expression de système didactique résume – surgit fréquemment, dans le didactique labile, sous la forme de systèmes *auto-*

didactiques, certes éphémères, mais qui fleurissent aussi bien dans le cadre même d'une *école*, alors pourtant que l'un des buts premiers de ce type d'institutions est de limiter voire d'interdire la « tentation » autodidactique.

5.3. Le fait de donner au didactique labile un lieu stable, voué à l'étude, constitue un geste fondateur qu'exemplifie, dans l'histoire des cultures euro-méditerranéennes, la notion grecque antique de *skholè* – mot qui, à l'origine, désigne le *loisir*, ce temps refusé aux activités « ordinaires », donné à des activités « extraordinaires », et qui va se mettre à désigner bientôt le *loisir studieux*, temps que l'on donne à l'étude regardée comme disjointe – dans le temps social mais aussi dans l'espace social – des autres activités de la vie. On notera que le mot d'étude renvoie ainsi à un décrochement par rapport à une autre activité, qui, à la limite, peut être elle-même une activité plus globale d'étude : l'étude est toujours, au plan spatio-temporel comme au plan psychologique, une rupture suscitée par la poursuite d'un but « auxiliaire » par rapport à une activité plus large. Il y a ainsi comme une « mise en abyme » de l'étude, qui toujours peut survenir et qui peut toujours être refusée ou avortée. Bref, qui ne va pas de soi.

5.4. L'école offre la possibilité d'une didactique pérenne, organisée en des formes stables, moins soumises à la fragilité de l'improvisation didactique, et où le contrôle social est fort. La lettre X désignant le collectif des « étudiants », Y celui des « aides à l'étude » et le signe ♥ (« cœur ») marquant la place de l'enjeu de l'étude, on y observe des systèmes didactiques $S(X, Y ; ♥)$ qui ont une vie non éphémère, qui, par exemple, commencent à vivre en septembre pour se dissoudre en juin, etc. Ce qui va se passer dans $S(X, Y ; ♥)$ est (sous-)déterminé par ♥ et par l'organisation de l'étude ou *organisation didactique* OD(♥) qui sera mise en œuvre, non sans une part d'improvisation, dans l'étude de ♥. Avant même que l'on s'interroge sur OD(♥), sur sa mise en fonctionnement et sur ses effets, une condition importante de la vie des systèmes didactiques avait été soulignée : en règle générale, les porteurs de l'intention didactique que sont les aides à l'étude $y \in Y$, les « étudiants » $x \in X$ eux-mêmes, leurs parents, etc., *ne s'autorisent pas d'eux-mêmes* : le système didactique suppose une institution surplombante dont la vertu essentielle tient à ce que d'aucuns lui prêtent une puissance d'investiture, et que j'appelle un *système d'enseignement*, Σ. Bien entendu, à la limite, on peut avoir $\Sigma = S(X, Y ; ♥)$: le système didactique prétend alors s'autoriser de lui-même. Mais ce dernier cas est rare : généralement, un système didactique trouve à s'autoriser d'un système d'enseignement *supposé*, qui peut-être n'en sait trop rien, qui tantôt assume, tantôt feint d’ignorer qu’on se réclame de lui, et qui parfois existe à peu près autant que le Marquis de Carabas du conte de Charles Perrault.

5.5. Au-delà de cette condition, il est une grande question, qui a trait à la *nature* de ce qu’on a noté ici ♥. Qu’est-ce donc que cet « enjeu de l’étude » *au cœur* du fonctionnement d’un système didactique ? Sur un point évident, l’état historique des systèmes didactiques scolaires apparaissait – et apparaît encore très largement – comme profondément marqué par un processus historique qu’on peut reconstruire sommairement ainsi. Au départ, dans une histoire des enseignements scolaires que je brosse en la stylisant, l’enjeu didactique ♥ est une *question Q* – une question en *Comment ?* (« Comment effectuer mentalement la division d’un entier par un entier que l’on sait décomposer en facteurs plus petits que 10 ? »), qui appelle en réponse une *technique*, ou une question en *Pourquoi ?* (« Pourquoi peut-on “laisser tomber” les restes dans les divisions successives d’un entier par les différents facteurs d’une décomposition donnée du diviseur ? »), qui appelle une réponse *technologico-théorique*. Un programme scolaire P se compose alors, typiquement, d’un certain nombre de telles questions, en sorte qu’on peut l’écrire sous la forme $P = (Q_i)_{1 \le i \le n}$. L’étude de la question Q conduit à une réponse R validée par la culture, par la société, par l’École ; si X est le groupe des élèves de la classe, y son professeur, la chose s’écrira : $S(X, \{ y \} ; Q) ➥ R$, « formule » que l’on retouchera un peu plus loin. Le programme d’études, lui, s’écrit alors véritablement sous la forme $P = (Q_i ; R_i)_{1 \le i \le n}$. Mais bientôt, par un court-circuit culturel et didactique, « étudier Q » est regardé comme un synonyme inutile d’une expression qui, institutionnellement, la supplante : « apprendre R ». Alors, sans encore que R perde tout à fait son statut de réponse, les questions commencent à s’effacer : le programme d’études P doit désormais s’écrire plutôt sous la forme $P = (? ; R_i)_{1 \le i \le n}$. C’est ensuite que, en une involution sans doute différenciée (elle n’atteint pas également toutes les disciplines scolaires ni, en leur sein, toutes les praxéologies à enseigner), un refoulement s’opère : les réponses R cessent d’être regardées comme telles et se trouvent hypostasiées en *œuvres* de la culture ayant valeur en soi et pour soi, œuvres dont les *raisons d’être* – d’être *là*, dans la culture, mais aussi dans le programme scolaire – *se sont perdues*. Un programme scolaire devient ainsi une suite $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, …, $\mathfrak{R}_n$ d’œuvres à étudier : on doit l’écrire désormais sous la forme $P = (\mathfrak{R}_i)_{1 \le i \le n}$. Alors que la réponse R était socialement précieuse parce que, précisément, elle répondait à la question Q, l’œuvre $\mathfrak{R}$ est considérée maintenant *pour elle-même* : on la visite avec déférence comme un monument qui a perdu sa fonctionnalité, que l’on honore formellement, et qui n’a plus que de rares emplois, adventices, opportunistes, minuscules. C'est là une tendance que j'ai nommée la *monumentalisation* des savoirs (et, plus largement, des praxéologies), qui, de la part des institutions comme des personnes, peut aller jusqu'à une passion sombrement *fétichiste*.

5.6. Je ne donnerai de cela qu'un exemple emprunté aux mathématiques les plus simples. Chacun sait que, tout au long de la scolarité obligatoire, les élèves rencontrent encore et encore l'œuvre mathématique qui s'est bâtie autour de la figure générique du *triangle*. Mais quelle question *mathématique* engendre l'intérêt des mathématiciens pour le triangle ? Et pourquoi continue-t-on d'étudier le triangle à l'école ? Voilà des questions qu'on a désappris à poser, et qu'on ne pose plus, emportées qu'elles sont par l'oubli institutionnel. Au lieu de cela, on thésaurise les « propriétés » du triangle, par exemple le fait que les médianes, les hauteurs, les bissectrices, etc., sont concourantes. L'œuvre est étudiée dans sa structure. Mais la structure n'est mise en rapport avec aucune fonction « intellectuelle » (mathématique) qui, en quelque façon, l'expliquerait, ou du moins qui expliquerait ce qui a pu susciter, autrefois ou ailleurs, un intérêt sensé pour cette structure. Lorsque l'école travaille ainsi sur des œuvres devenues étrangères à elles-mêmes, ceux que l'on réunit autour de l'œuvre à étudier se rassemblent *autour d'un abîme de sens*. Ce n'est pas, il est vrai, que l'étude scolaire du triangle, ou du latin, ou de l'algèbre élémentaire ne réponde plus alors à aucune question. Mais leur étude n'apporte plus guère de réponse, alors, qu'à une question de positionnement social et culturel – comment monter dans les hiérarchies du monde ? Comment fabriquer de la distinction ? Étudier l'algèbre, au XVIII^e^ siècle, permet aussi de s'élever au-dessus de la masse de ceux qui n'ont reçu en partage que les rudiments de l'arithmétique. Semblablement, étudier le latin demeure pendant des siècles le signe d'une sûre domination sociale. Deux fois lauréat de l'Académie française avant d'en devenir membre, professeur de poésie française pendant trente ans, pendant quarante-cinq ans critique au *Journal des Débats*, Saint-Marc Girardin (1801-1873) énoncera là-dessus la vérité du système dont il est tout à la fois le témoin et l'acteur : « Je ne demande pas à un honnête homme de savoir le latin, avoue-t-il ; il me suffit qu'il l'ait oublié. » Dans la liste des conditions et contraintes qu'il se doit d'examiner, le didacticien ne saurait oublier ce détournement des savoirs à enseigner au service d'un bricolage social et culturel intéressé, qui, quasiment, subsiste seul dès lors que l'enseignement des savoirs en question ne s'articule pas à leur « utilité » – comme on osait dire autrefois – en matière de connaissance et d'action.

6. Les moments de l'étude et la notion d'AER

6.1. On le voit : l'état réel du champ scolaire, du moins en mathématiques, ne permettait guère d'espérer une percolation facile des praxéologies didactiques issues de la TSD. Une condition *sine qua non* pour qu'il en soit ainsi, en effet, serait que la culture de la profession et de l'institution scolaire porte en elle, sinon pleinement vivantes, du moins susceptibles d'être bientôt revivifiées, des réponses adéquates à la question indéfiniment déclinable des raisons d'être. Pourquoi la géométrie ? Pourquoi le triangle ? Pourquoi les hauteurs et l'orthocentre ? Pourquoi les fractions et pourquoi leur « simplification » ? Pourquoi les « expressions algébriques » ? Pourquoi leur factorisation ? Pourquoi leur développement ? Pourquoi les nombres décimaux ? Pourquoi la notion d'ordre de grandeur ? La liste n'a pas de fin. Elle dessine le point de départ obligé d'un programme scientifique et d'un programme *politique* de refondation d'une École qui ne serait plus une parodie d'elle-même. Le programme scientifique peut *a priori* s'énoncer en peu de mots : faire entendre à nouveau les œuvres à enseigner comme des réponses à certaines questions, ou du moins comme des instruments pour produire de telles réponses ; inscrire ces questions au fondement de leur étude scolaire, les établir à l'École comme génératrices de la connaissance qui s'y déploie. Les deux étapes logiques (sinon chronologiques) d'une telle reconquête sont, bien sûr, solidaires. Mais la première est d'ordre plutôt épistémologique – c'est-à-dire, pour nous, essentiellement mathématique – et je n'en parlerai plus guère ci-après. La seconde est d'ordre plus didactique : c'est à elle que, trop sommairement sans doute, je consacrerai les développements qui suivent.

6.2. Pour changer l'ordre établi, il fallait pouvoir le regarder comme plongé dans un ordre plus vaste, où il apparaisse comme un possible parmi d'autres possibles. Au secondaire français, en mathématiques, l'ordre établi se laisse longtemps décrire, de manière lourdement réaliste, ainsi. Il y a *d'abord* le « cours », où le professeur présente, en apparence *motu proprio*, quelque œuvre mathématique – souvent une « œuvrette », en fait. Il y a *ensuite* les « applications » de l'œuvre, les usages qu'on peut en faire comme instrument de production de réponses, c'est-à-dire les usages qu'on en fait traditionnellement, dans un curriculum à évolution lente. Le professeur « montrera » par exemple le théorème de Pythagore ; puis il « montrera » peut-être que celui-ci permet de résoudre le problème suivant : « Un bateau quitte un port en suivant une certaine direction ; au bout de 2 km, il prend la direction perpendiculaire et fait ainsi 3 km avant de reprendre la direction initiale sur 2 km encore. De combien s'est-il alors éloigné de son point de départ ? » On sait que cette organisation binaire de l'étude – avec « cours » puis « applications » – est solidaire d'une certaine axiologie : ce qui compte, ici, ce que l'on valorise, ce que l'on partage, c'est *l'œuvre* saisie dans son économie structurale, et non dans ses fonctions, qui se perdent alors dans l'émiettement apparemment sans fin des « applications ».

6.3. C'est pour formuler en des termes émancipateurs le problème de l'organisation didactique, pour subsumer telle organisation didactique particulière et quelques-unes de ses variantes sous un modèle commun, qui en fasse apparaître les particularismes et le caractère contingent, qu'a été produit alors le modèle des *moments de l'étude*, ou moments *didactiques*, dont le principe peut être présenté succinctement ainsi. Soit θ un thème d'études inscrit au programme de la classe, qu'on peut identifier un instant à l'enjeu de l'étude ♥. Soit alors $O = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{1\leq i\leq n}$ l'organisation mathématique locale (OML) déterminée par le professeur comme « explicitant » θ, c'est-à-dire ♥, auquel on l'identifiera désormais. La question qui se pose au professeur, et à laquelle une certaine organisation didactique ∂O = OD(♥) devra répondre, est en ce point la suivante : « Comment enseigner *O*, c'est-à-dire comment "mettre en place" *O* dans la classe ? » L'organisation didactique ∂O est en principe *ponctuelle* puisqu'elle doit être mise en œuvre à propos d'une tâche particulière, spécimen du type de tâches « Mettre en place une OML *O* ». En fait, ∂O dépend presque toujours d'un grand nombre de types de tâches qu'en même temps elle motive. Par ce biais, elle s'intègre dans une organisation didactique *locale*, elle-même insérée en une organisation didactique *régionale*, amalgamée au sein d'une organisation didactique *globale*. Notons que, par un abus de langage utile, c'est une partie *a priori* quelconque d'une telle organisation globale de l'étude – celle activée au cours d'une séance observée par exemple – qu'on appellera en général « l'organisation didactique », tout court. En dépit de sa très grande complexité, on peut alors aborder la description et l'analyse d'une organisation didactique relative à l'organisation mathématique locale $O = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{1\leq i\leq n}$ en examinant la manière dont elle prend en charge certaines *fonctions didactiques* clés, les différents *moments* de l'étude.

6.4. Le mot de « moment » par lequel on désigne ces fonctions didactiques appelle un commentaire. Le modèle des moments de l'étude n'implique aucun ordre chronologique déterminé sur la réalisation des divers moments qu'il distingue. En cela, il permet déjà de prendre de la distance par rapport à tel ordre déterminé – traditionnel ou « novateur ».

L'appellation retenue se justifie par le constat que, de façon variable selon le type d'organisation de l'étude mis en œuvre, *il arrive forcément un moment où…* – où, par exemple, la classe, sous la direction du professeur, *rencontre pour la première fois* une tâche t du type T_i ; où, encore, on s'y emploie à faire émerger le bloc technologico-théorique de la praxéologie mathématique visée ; etc. Un moment, au sens donné à ce mot ici, est d'abord une *dimension* dans un espace multidimensionnel, un *facteur* dans un processus multifactoriel. L'analyse concrète des organisations didactiques observables a conduit en l'espèce à distinguer six moments didactiques, dont je ne commenterai pas la proximité évidente aux concepts correspondants de la TSD. Étant donné l'organisation mathématique ponctuelle $O_i = [T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i] \subset O$, où θ_i et Θ_i sont les « parties » de θ et Θ permettant de justifier le bloc $[T_i/\tau_i]$, on distingue ainsi le moment *de la première rencontre* avec le type de tâches T_i ; le moment *exploratoire*, qui conjugue *l'exploration* du type de tâches T_i et *l'émergence de la technique* τ_i ; le moment *technologico-théorique*, qui voit *la création du bloc* $[\theta_i/\Theta_i]$; le moment *du travail* de l'organisation mathématique créée, et en particulier *de la technique*, où *l'on fait travailler* les éléments de l'organisation mathématique ponctuelle élaborée pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on *travaille sa maîtrise* de cette organisation mathématique, et en particulier de la technique τ_i ; le moment *de l'institutionnalisation*, où l'on *met en forme* l'organisation mathématique $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]$, en précisant chacun de ses composants, et en l'amalgamant à l'organisation déjà institutionnalisée ; le moment *de l'évaluation*, où l'on apprécie sa maîtrise de l'organisation mathématique créée, mais aussi où l'on évalue cette organisation mathématique elle-même – que vaut-elle au juste ? Chacun de ces moments peut se réaliser en *plusieurs fois*, non seulement parce que l'on procède par épisodes *limités dans le temps*, mais aussi parce que, par exemple, un épisode de travail de la technique peut conduire à retoucher l'organisation mathématique mise en place, et donc éventuellement à vivre un nouvel épisode technologico-théorique – et en tout cas à envisager, si bref soit-il, un autre épisode d'institutionnalisation.

6.5. Je m'attarderai un peu sur les notions précédentes pour montrer sur quelques points comment elles permettent de s'affranchir des usages et des points de vue indurés dans l'enseignement scolaire des mathématiques. Je noterai d'abord, dans cette perspective que la *première* rencontre avec un type de tâches T_i peut fort bien, quelque paradoxal que la chose paraisse, avoir lieu *en plusieurs fois*, en fonction des environnements mathématiques et didactiques dans lesquels elle se produit : on peut *redécouvrir* un type de tâches comme on redécouvre une personne que l'on croyait connaître. Ainsi le « travail d'après-coup », si essentiel en toute organisation de l'étude, est-il intégré dans la modélisation du fonctionnement didactique. Le deuxième moment appelle deux remarques au moins. Tout d'abord, s'il est bien le lieu de l'*exploration* du type de tâches T_i, il est, par cela même, l'opérateur clé de la « construction » de ce type en tant qu'entité spécifique : pas davantage qu'une hirondelle ne fait un printemps, une tâche t singulière ne suffit à faire un *type* – qui seul lui donne sens. Ensuite, ce deuxième moment voit l'*élaboration d'une technique* τ_i relative au type de tâches T_i, et cela à travers l'étude d'un ensemble de tâches problématiques de ce type, $t_{i_1}, \ldots, t_{i_n} \in T_i$. Contre une certaine vision « héroïque » de l'activité mathématique des élèves, regardée comme une suite erratique d'affrontements singuliers avec des difficultés toujours nouvelles (j'ai cru pouvoir parler à cet égard du « syndrome de MacGyver »), c'est *l'élaboration de techniques* qui est ici au cœur du travail de la classe : au fantasme « moderne » de l'élève qui devrait triompher comme par enchantement de toute difficulté possible s'oppose ainsi la réalité indépassable de l'artisan laborieux, qui, avec ses condisciples, sous la conduite avisée du professeur, élabore patiemment les techniques (mathématiques) qu'il fera siennes. Mais cette remarque doit être complétée. L'étude et la résolution d'*un* problème d'un type déterminé – comment effectuer la tâche $t \in T_i$? – va de pair avec la constitution d'au moins un embryon de technique, à partir de quoi une technique plus développée pourra éventuellement émerger : l'étude d'un problème *particulier*, bientôt perçu comme spécimen du *type* étudié, apparaît ainsi, non comme une fin en soi, mais comme un *moyen* pour qu'une telle technique se constitue. Se noue ainsi une *dialectique fondamentale* : étudier des problèmes est un moyen permettant de créer et de mettre au point une technique relative aux problèmes de même type, technique qui elle-même sera ensuite, éventuellement, le moyen de résoudre de manière quasi routinière des problèmes de ce type, c'est-à-dire d'effectuer des tâches $t \in T_i$.

6.6. À propos du moment qui voit la constitution de *l'environnement technologico-théorique* $[\theta_i/\Theta_i]$ relatif à la technique τ_i, on observera maintenant qu'il est en étroite interrelation avec *chacun* des autres moments : dès la première rencontre avec un type de tâches T_i, il y a en général mise en relation avec un cadre technologico-théorique antérieurement élaboré, où se mêlent des germes d'un environnement à créer qui se précisera dans une relation dialectique avec l'émergence de la technique. Le moment de *l'institutionnalisation*, lui, a pour objet de préciser ce qu'est « exactement » l'organisation mathématique qui se construit : sur le chantier de l'étude ouvert dans la classe, il convient en effet de distinguer, d'une part les éléments qui, ayant concouru à la construction de l'organisation mathématique, n'y seront pas pour autant intégrés – ils auront donc eu un rôle purement didactique –, d'autre part les éléments qui entreront de manière définitive dans l'organisation mathématique visée – distinction que les élèves cherchent à faire préciser lorsqu'ils demandent au professeur, à propos de tel résultat ou de telle manière de faire, s'il faudra ou non « le savoir ». Car les moments de l'étude précédents ne livrent encore qu'une organisation mathématique en devenir, où l'ouvrage fait, voulu pour durer, se mêle nécessairement aux « reliefs » d'une construction élaborée par essais, retouches, arrêts et reprises. Or ce qui mérite de durer, ce qui vaut d'être pérennisé *ne s'impose nullement de soi*, à coup sûr. Tel exemple, dont l'examen a bien servi le projet de construction en révélant des perspectives *a priori* insoupçonnées, tel état de telle technique, qu'on aura mis longtemps à dépasser, tel théorème, en lui-même insuffisant mais qui fut le premier résultat *démontré*, seront-ils intégrés à l'organisation mathématique définitive, ou bien les écartera-t-on ? Le moment de l'institutionnalisation, c'est donc d'abord le moment où, dans la construction « brute » qui, peu à peu, a émergé de l'étude, vont être séparés, par un mouvement qui engage l'avenir, le *« mathématiquement nécessaire »*, qui sera conservé, et le *« mathématiquement contingent »*, qui, bientôt, n'apparaîtra plus que comme un épisode parmi d'autres de l'aventure intellectuelle vécue pour créer l'organisation mathématique visée. Le moment du *travail de l'organisation mathématique*, et en particulier du *travail « de la technique »*, est occupé tout à la fois à améliorer la technique en la rendant *plus efficace* et *plus fiable* (ce qui exige généralement d'en *retoucher la technologie*, voire la théorie) et à accroître *la maîtrise qu'on en a*, ce qui demande la disponibilité de corpus de tâches des différents types T_i adéquats qualitativement aussi bien que quantitativement. Le moment de l'*évaluation* s'articule au moment de l'institutionnalisation : en pratique, il arrive un moment où l'on se doit de « faire le point », en examinant ce que *vaut* ce qui a été *construit* et ce qui a été *appris*. Contre une croyance répandue, il faut observer que ce moment de « véridiction » (où l'on tente de « dire le vrai ») *n'est nullement une invention de l'École* : il participe de la « respiration » même de *toute activité humaine*, à l'École comme hors d'elle. *A contrario*, s'il est vrai que l'évaluation doit scander le travail de construction et de maîtrise d'une organisation mathématique, on ne doit pas oublier que, comme ailleurs dans la vie, *elle ne saurait être omniprésente*, sauf à hypothéquer lourdement le travail à accomplir. Il doit en effet exister, dans le temps de l'étude, de grandes périodes *où l'on suspend son jugement*, où, pratiquant l'*epochè* des anciens Grecs, on *s'abstient* de se demander ce que vaut ce que l'on fait et ce que l'on sait. En d'autres termes, l'évaluation doit venir *à son heure*, en créant de judicieuses césures dans le processus d'étude. Mais l'évaluation doit être entendue aussi en un sens plus large que la coutume scolaire ne le veut : derrière l'évaluation toute classique des élèves, saisis dans leur rapport à l'organisation mathématique construite ou en cours de construction, se profile *l'évaluation de l'organisation mathématique elle-même*. Que vaut, en vérité, l'organisation mathématique qui s'est construite et institutionnalisée ? Au-delà de l'interrogation sur la maîtrise, par telle personne, de telle technique, par exemple, on rencontre alors, notamment, l'interrogation *sur la technique elle-même* : est-elle puissante, maniable, sûre, robuste ? Cette évaluation, à laquelle les usages scolaires font, il est vrai, une fort petite part, est formatrice, non d'une personne, mais d'une organisation praxéologique. En pratique, elle pourra se nourrir par exemple de la *lecture critique* du texte du savoir étudié tel que le propose tel ou tel manuel autre que celui de la classe : tout ce qui y apparaît nous est-il connu, nous est-il transparent ? Y bute-t-on sur des éléments jusque-là non rencontrés, ou du moins mal maîtrisés ? Etc. Notons encore que l'évaluation d'une organisation mathématique est très étroitement liée à son institutionnalisation : en contribuant par exemple à mettre en évidence tel ou tel type de problèmes qui, bien que relevant de l'organisation mathématique locale $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{1\leq i\leq n}$, n'a pas encore été étudié ou ne l'a été qu'insuffisamment, en soulignant l'insuffisance de la justification de tel ou tel « résultat », le travail d'évaluation va souvent *relancer l'étude*, l'étude « complète » de O pouvant, formellement, se décrire ainsi. Si T_1, ..., T_n sont les types de tâches associés à la technologie θ supposés étudiés *dans cet ordre*, pour tout $i = 1, \ldots, n$ une organisation *ponctuelle* $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]$ (constituée autour du type de tâches T_i) se construit et vient s'intégrer à l'organisation *locale* déjà partiellement élaborée (qu'on peut noter $[T_j/\tau_j/\theta^{(j)}/\Theta^{(j)}]_{1\leq j\leq i-1}$) pour produire l'organisation locale $[T_j/\tau_j/\theta^{(j)}/\Theta^{(j)}]_{1\leq j\leq i}$. Lorsque $i = n$, on doit avoir $[T_j/\tau_j/\theta^{(j)}/\Theta^{(j)}]_{1\leq j\leq n} = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{1\leq i\leq n}$, soit l'organisation mathématique locale visée. Le processus d'étude va ainsi chaque fois « rouvrir » l'organisation mathématique existante, pour la modifier en l'enrichissant, en la simplifiant, etc.

6.7. Le modèle des moments de l'étude a deux grands types d'emplois. Tout d'abord, il constitue une grille pour l'*analyse* des organisations didactiques. Ensuite, il permet de poser au plus large le problème de la *réalisation* des différents moments de l'étude et donc le problème de l'organisation didactique. Comment, ainsi, réaliser concrètement la première rencontre avec tel type de tâches ? Comment conduire l'étude exploratoire d'un type de tâches donné ? Comment mener à bien l'institutionnalisation ? Comment réaliser le moment de l'évaluation ? Ainsi ce modèle se situe-t-il à la jonction des questions d'analyse didactique et des problèmes d'ingénierie ou de développement didactique. Mais il est utile, ici, que je dise un mot sur le principal dispositif de recherche qui est le mien depuis maintenant bien des années. L'usage veut que le chercheur mette au point, sur le papier, des « séances » (ou des suites de séances) qu'il fera ensuite réaliser dans quelques classes, en une interaction étroite – en principe – avec les professeurs concernés : là est son laboratoire, là est son « milieu », qu'il s'efforce de « faire parler », selon une procédure exigeante et délicate. Le « laboratoire » que j'ai surtout utilisé au cours des dernières années est suffisamment différent pour que j'en précise les principaux traits ; en réalité, plutôt que d'un laboratoire, il s'agit davantage d'une *clinique* des classes de mathématiques, de leurs professeurs, de leurs élèves, dont l'ensemble des « cas » suivis est constitué chaque année par la promotion des élèves professeurs de mathématiques admis en deuxième année de formation à l'IUFM de l'académie d'Aix-Marseille. Dans cet ensemble dont l'effectif oscille entre quarante et soixante professeurs (et autant de classes environ), la formation tente, année après année, de faire *percoler*, non des « séances » précisément organisées, mais des matériaux didactiques et mathématiques à partir desquels chacun est libre de construire son enseignement, et donc ses organisations mathématiques et ses organisations didactiques, cela sans jamais qu'aucun d'entre eux ne se trouve tenu à cet égard par un engagement strictement détaillé. Cette manière de faire, qui « laisse flotter » les productions d'une recherche collective organiquement articulée aux difficultés rencontrées et signalées, semaine après semaine et année après année, par les élèves professeurs, ne peut s'apprécier que dans la moyenne durée, par l'analyse de cas assez nombreux pour faire émerger des réussites ou, à l'inverse, des échecs de la percolation impulsée, et surtout pour révéler les contraintes et les conditions qui fabriquent réussites et échecs. Sans entrer ici dans un détail inutile, je centrerai mon propos sur une structure didactique dont la percolation a été tentée avec persévérance depuis longtemps, la structure d'AER – d'*activité d'étude et de recherche*. Là encore la filiation avec la TSD n'est évidemment pas de hasard. Mais je noterai d'abord la volonté affirmée à travers la mise en percolation de cette « notion » de marquer une distance avec une structure didactique voisine d'apparence (et d'appellation), qui, venue me semble-t-il du monde de la recherche en didactique, s'est greffée sur l'organisation didactique scolaire traditionnelle : je veux parler de la notion d'*activité*, telle qu'elle s'impose au collège, en France, à partir des années 1980. L'observation des classes ordinaires montrait que, loin en général de cannibaliser l'organisation binaire de l'étude en « cours » et « exercices (d'application) », les activités en étaient réduites – quand elles n'étaient pas bientôt éliminées – à un rôle introductif, de

« préparation », comme le souligne d'ailleurs l'expression d'activités *préparatoires* utilisée par certains professeurs, alors même que cette expression ne figure nulle part dans les programmes et autres textes officiels. Par contraste, une AER n'a pas vocation à assumer une fonction didactique d'« échauffement », de *warm-up* comme on dit en anglais, mais vient occuper *le cœur même de la vie mathématique* de la classe. Le changement est net. Même s'il n'est parfois pas compris, et même s'il est le plus souvent barré dans l'intimité vécue des classes de mathématiques, il est consubstantiel, structurellement, d'une réorganisation *ternaire* (ou plutôt *quaternaire*) de l'étude : l'AER menée à bien appelle d'abord une *synthèse*, laquelle se complète d'un travail consistant en *exercices* (au sens vrai du mot) ainsi qu'en l'étude de *problèmes* qui éprouvent les limites de l'organisation mathématique dont les matériaux techniques et technologico-théoriques auront été produits lors de l'AER (ou d'une succession d'AER) et que la synthèse aura achevé de faire émerger, le tout appelant enfin des *contrôles* permettant une évaluation dont la double cible – l'organisation de savoir construite, et le rapport de la classe et de chacun des élèves à cette organisation de savoir – a été déjà soulignée. Cette architectonique didactique répond, structurellement, au modèle fonctionnel des moments de l'étude, sans pour autant qu'une correspondance sans reste soit, par nature, possible, puisque structures et fonctions ne sont jamais strictement identifiables. Les *activités d'étude et de recherche* assument les moments de la première rencontre avec un type de tâches T_i, de l'exploration de T_i et de l'émergence de la technique τ_i, de la construction du bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$. La *synthèse* est le temps par excellence de *l'institutionnalisation* de $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$. Les *exercices et problèmes* sont un temps indépassable de *travail* de l'organisation mathématique $O = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, en particulier de la technique τ_i, ainsi que du rapport tant de la classe que de chacun de ses membres à O. Les *contrôles* sont au cœur du moment de l'évaluation.

6.8. La diffusion scolaire du polyptyque dont je viens d'esquisser le principe rencontre toutefois de multiples difficultés. La synthèse, par exemple, est une structure didactique censée permettre à la *classe*, œuvrant sous la direction du professeur, de préciser $O = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{1\leq i\leq n}$. Sa pénétration fonctionnelle suppose donc que soit redessiné le *topos* du professeur comme celui des élèves. Elle se heurte, en cela notamment, à des usages scolaires invétérés dont, à l'évidence, certains ne se doutent même pas qu'on puisse penser les modifier. Mais je m'arrêterai comme annoncé sur la structure d'AER elle-même. Le point de départ d'une AER se trouve, en principe, dans l'évocation (au moins), voire dans la réalisation dans la classe (au plus) d'une *situation du monde* $s = \{\sigma ; ✓ ; x, x', x'', ...\}$ incluant un *système* σ et des *acteurs* x, x', x'', etc., ayant à accomplir une *tâche* ✓ – la tâche « coche » – relative à σ. Les énoncés traditionnels de l'arithmétique scolaire sont à cet égard typiques : on y évoquera par exemple une situation du monde dans laquelle « un paysan, x, doit expédier un lot de 250 œufs dans des boîtes pouvant contenir chacune 6 œufs », ou une autre dans laquelle « trois vacanciers, x, x', x'', doivent se partager la somme de 172 € qui, à l'issue de leurs vacances, reste dans la caisse commune créée pour faire face aux frais quotidiens collectifs, et dans laquelle ils ont versé en tout, respectivement, 380 €, 420 €, 440 € », etc. Notez qu'il n'y a là aucune *question* encore ; mais voici que, pour accomplir la tâche ✓, censée être d'un type culturellement – sinon pratiquement – familier aux élèves (ranger des œufs dans des boîtes à œufs, etc.), les acteurs de la situation du monde sont amenés à devoir accomplir une certaine tâche t, supposée pour eux *problématique* : pour le paysan, il s'agira de déterminer combien de boîtes exactement il devra se procurer ; pour les vacanciers, il s'agira de déterminer comment la somme restante devra être partagée entre eux, afin que chacun ait contribué également aux frais collectifs ; etc. Et c'est cette tâche problématique t, d'un type T qui est « à étudier », qu'il sera demandé aux élèves de chercher à accomplir en lieu et place des acteurs évoqués par l'énoncé du « problème ». C'est en ce point, donc, que, chaque fois, tout démarre. C'est à partir de là que tout se joue – *chronogenèse*, *topogenèse*, *mésogenèse*. Sans entrer beaucoup plus avant dans ces grands problèmes, je note ici, toutefois, un point relatif à la mésogenèse qui a pu être regardé comme une divergence obstinée entre TSD et TAD. La TSD souligne, en un sens, qu'un système didactique ne saurait fonctionner *in vacuo* : il suppose la production et l'organisation d'un « milieu didactique », milieu d'étude matériel et immatériel M qui sera le fragment d'univers avec lequel les acteurs du système didactique établiront un commerce visant à produire la réponse R à la question Q. Dans la TAD, ce milieu n'est pas supposé *donné au départ* avec X, Y et Q ; et, au lieu donc de retoucher le schéma indiqué plus haut en le réécrivant sous la forme $S(X, Y ; Q ; M) \rightarrow R$, j'écrirai ici $(S(X, Y ; Q) \rightarrow M) \rightarrow R$, pour signifier que le système didactique $S(X, Y ; Q)$ produit et organise le milieu M avec lequel, dialectiquement, il engendrera R. La production et l'organisation d'un tel milieu didactique est, en règle générale, un aspect essentiel de la production d'une *organisation didactique*. Mais la percolation, impulsée par la formation prodiguée aux élèves professeurs de deuxième année, d'organisations didactiques structurées selon le schéma ternaire (ou plutôt quaternaire) indiqué plus haut n'allait pas se heurter qu'au problème mésogénétique, si vital soit-il dès lors qu'on prétend s'affranchir de l'organisation traditionnelle de l'étude fondée sur le schéma binaire cours / exercices.

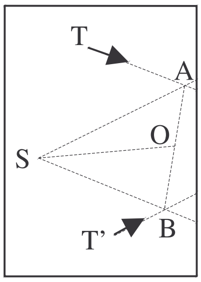
7. Des TPE aux PER

7.1. L'intégration didactique des AER butait sur plusieurs obstacles dont l'un des plus handicapants touche à l'exigence de concevoir, pour chaque thème d'études θ inscrit dans le programme de la classe, au moins un type de tâches T associé à θ par la tradition curriculaire en vigueur (ou par une tradition curriculaire à restaurer, voire à « inventer », comme disent les historiens), et qui « force » (une partie au moins de) θ, en ce sens que la technique τ qui aura toutes chances d'émerger de l'étude de T aurait aussi toutes chances de n'apparaître justifiable ou pensable qu'en supposant θ. Cela conçu, il reste encore à imaginer une situation du monde, et donc une tâche ✓ appropriée, c'est-à-dire dont l'accomplissement (en général prêté à des personnages de fiction) par une technique $\tau_{\checkmark}$ culturellement transparente conduirait à venir « buter » sur une tâche $t \in T$. Sans doute n'est-ce là qu'une part minime du travail de construction d'une situation didactique qu'appelle, traditionnellement, la TSD. Mais ce minimum d'exigences suffit pourtant en bien des cas à bloquer la percolation recherchée.

7.2. Pourquoi ce blocage ? Ce sont des interrogations de cet ordre qui, au fil des années, m'ont conduit à expliciter ce que j'ai nommé *l'échelle des niveaux de co-détermination didactique*, que l'on trouvera reproduite ci-contre et dont je ne donnerai ici qu'un bref commentaire. Partons pour cela du bas de l'échelle, des échelons qui vont de la « Discipline » (les mathématiques), au « Sujet » (T) en passant par le « Thème » (θ). Une première cause de blocage se rencontre dans le fait que, dans la culture mathématique scolaire, les niveaux du « Secteur », du « Domaine » et de la « Discipline » ont un rôle d'étiquetage bien davantage qu'ils ne sont regardés comme des sources de conditions bénéfiques au développement des niveaux inférieurs. S'il est, même innocemment, porteur de cette contrainte, le professeur ne songera pas, ainsi, à prendre pour objet d'enseignement *la géométrie* (domaine), ou *les triangles et quadrilatères* (secteur), et restreindra son attention à ces *thèmes* que sont *le triangle rectangle* ou *le parallélogramme*, par exemple. En conséquence, il tendra à ne pas situer le thème θ à enseigner par rapport au secteur et au

Civilisation
⇳
Société
⇳
École
⇳
Pédagogie
⇳
Discipline
⇳
Domaine
⇳
Secteur
⇳
Thème
⇳
Sujet

domaine dans lequel ce thème s'inscrit, ce qui ne lui permettra guère, alors, de répondre aux questions sur lesquelles il vient régulièrement buter, et par exemple d'identifier un type de tâches *T* « générateur » de θ. Soit ainsi la propriété θ_1 des diagonales d'un parallélogramme



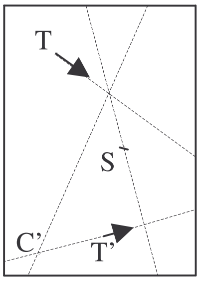
de se couper en leur milieu ; vers quelle espèce de type de tâches *T* se tourner pour faire apparaître θ_1 comme principal « ingrédient » technologique de la solution d'un certain problème technique ? Il est éclairant, pour tenter de répondre, d'avoir en tête ceci : l'intérêt pour les propriétés des figures (ainsi que pour les problèmes de « lieux géométriques ») qu'étudie la géométrie traditionnelle est essentiellement motivé, depuis les mathématiques grecques, par les besoins suscités par la résolution de problèmes de *construction géométrique*. On cherchera donc prioritairement à créer (ou à retrouver) un lien intersectoriel idoine entre « Constructions géométriques » et « Propriétés du parallélogramme ». Bien entendu, pour y réussir, il est mieux de disposer, collectivement – je veux dire *dans la profession* – d'un riche répertoire de constructions géométriques, et, par exemple, d'avoir en tête cette espèce particulière de problèmes de constructions géométriques qui sont liées à l'existence de points « inaccessibles ». Plus précisément, ici, on pourra envisager le lien qu'on peut faire vivre, dans une classe de 5^{e}, entre θ_1 et le problème de construction géométrique que soulève l'accomplissement de tâches du type *T* impliqué dans la situation du monde suivante : « Un dessinateur a représenté deux tireurs (situés en T et T', respectivement) visant le centre d'une cible, C, point en fait trop éloigné pour apparaître sur la feuille à dessin. Il veut rajouter un spectateur (situé en S) observant le centre de la cible à l'aide de jumelles. Dans quelle direction le spectateur doit-il pointer ses jumelles ? » Le schéma ci-contre contient une réponse, c'est-à-dire une technique : on trace les parallèles aux directions de tir qui passent par S ; le quadrilatère SACB est alors un parallélogramme et il suffit donc de marquer le milieu O de [AB] pour obtenir la direction cherchée, celle de la droite (SO) = (SC),. Bien entendu, cette technique échoue si A ou B se trouve hors de la feuille : il faudra alors rechercher une autre technique.

7.3. Les contraintes pesant sur l'action du professeur et sur la vie mathématique de la classe ne se limitent pas au peu que je viens d'évoquer. Le principe des AER met profondément en question une certaine épistémologie scolaire monumentaliste et œuvriste qui remplace les questions (ouvertes) *Q*, source de toute production de connaissance, par les *fausses questions* que le professeur s'évertue à poser aux élèves – « Qu'est-ce qu'on peut dire du quadrilatère

SACB ? Oui, C on ne le voit pas… ». De là qu'on doive remonter aux niveaux supérieurs de l'échelle des niveaux de détermination pour y saisir ce qui peut permettre ou, au contraire, prohiber telle organisation mathématique ou telle organisation didactique. Cette remontée trouve une raison d'être dans quasiment tout problème d'analyse ou de développement didactique. À cet égard, un épisode institutionnel ressenti comme une véritable commotion par nombre d'acteurs de l'enseignement scolaire aura eu dans l'évolution récente de la TAD des effets nets : je veux parler de ce qu'on nomme en France les TPE, les *travaux personnels encadrés*. Je ramènerai ici ce dispositif de formation scolaire à sa plus simple expression. Dans les classes de première des lycées d'enseignement général français, la rentrée 2000 voit, sous le nom de TPE, à raison de deux heures hebdomadaires, la création d'un nouvel « enseignement », dans lequel les élèves, groupés par exemple en équipes de trois, encadrées par une équipe de professeurs (de différentes disciplines : mathématiques et biologie-géologie par exemple), se livrent à un travail qu'on peut dire « d'étude et de recherche ». Ce dispositif se laisse subsumer sous le schéma $S(X ; Y ; \heartsuit)$, où, cette fois, on aura quelque chose comme $X = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ et $Y = \{ y_1, y_2 \}$. Comme toujours, l'enjeu de l'étude ♥ est le problème. En principe, ♥ est un certain « sujet », choisi par l'équipe X et validé par l'équipe Y, relatif à l'un des six *thèmes* définis par le ministère de l'Éducation nationale et renouvelés par tiers chaque année. Pour l'année 2005-2006 et pour la classe de première scientifique, ainsi, la liste des thèmes « nationaux » comporte d'abord, comme toujours, deux thèmes communs à cette classe et aux classes de première littéraire et de première économique et sociale (*L'homme et la nature*, *Ruptures et continuités*) ; elle comporte en outre quatre thèmes propres à la classe de première scientifique (*Modèles, modélisation* ; *Croissance* ; *Risques naturels et technologiques* ; *Sciences et aliments*). Dès la première année, en 2000-2001, une évidence s'impose : nombre de professeurs et d'élèves révèlent la vérité du rapport contemporain de l'École à la connaissance en s'accordant sur des « sujets » qui conduisent les élèves à limiter leur travail, en bien des cas, au recopiage partiel d'œuvres de la culture, rencontrées notamment par le truchement de l'Internet, mais qui ne répondent à proprement parler à aucune question Q déterminée à laquelle on s'efforcerait d'apporter une réponse R. Pour reprendre un exemple princeps, au lieu de choisir de travailler sur la question « Pourquoi n'attrape-t-on plus la peste en France aujourd'hui ? », on recopiera des développements tout faits à propos par exemple de la peste de 1720 à Marseille (sur laquelle une historiographie aisément accessible existe). Même dans le cas où l'enjeu de l'étude ♥ aura reçu la forme *initiale* d'une question Q déterminée, au fil du travail et au gré de la documentation rassemblée, il arrivera souvent que l'équipe d'élèves X en vienne *finalement* à un travail de pur recopiage, et que, partie de la question « Pourquoi n'attrape-t-on plus la peste en France aujourd'hui ? », cette équipe présente en fin de parcours une « étude » intitulée par exemple *La peste de 1720 à Marseille*, sans plus d'égard pour la question Q sur laquelle, en principe, un accord avait été conclu, au départ, avec l'équipe de professeurs Y : on dira finement, en un tel cas, que « la question a évolué » au cours du travail.

7.4. Contre ce jeu mimétique avec des connaissances en trompe-l'œil, un autre schéma pouvait être mis en avant, dans la ligne promue par la notion d'AER. Or le faire conduisait à prendre en compte des conditions en elles-mêmes fort banales, certes, mais autres que celles prévalant dans la classe de mathématiques tout particulièrement, sinon dans les mathématiques des mathématiciens. Lorsque, hors de l'École, je me pose une question Q, il arrive fréquemment que l'enquête révèle presque immédiatement l'existence, dans l'environnement institutionnel, de réponses toutes faites, en quelque sorte « estampillées » par une institution ou une autre, que je note pour cela $R^{\Diamond}$ (ce qui se lit « R poinçon »), réponses à partir desquelles je m'efforcerai de bâtir une réponse « selon mon cœur », que je note $R^{\heartsuit}$, c'est-à-dire, pour le dire plus objectivement, une réponse satisfaisant à *certaines contraintes* que je crois devoir respecter. Cette observation, approfondie, conduit à dégager cinq « gestes » de base de l'étude d'une question Q : *observer* les réponses $R^{\Diamond}$ déposées dans la culture ou présentes dans les répertoires de praxéologies institutionnelles ; *analyser* ces réponses $R^{\Diamond}$; les *évaluer* ; *développer* une réponse propre $R^{\heartsuit}$; *diffuser & défendre* la réponse $R^{\heartsuit}$ ainsi produite. Chacun de ces « gestes » appellerait d'assez longs commentaires. L'observation de réponses allogènes $R^{\Diamond}$, ainsi, est classiquement chose exclue du *topos* de l'élève dans la classe de mathématiques (en supposant ici un instant que Q soit une question « de mathématiques »). C'est au professeur, en effet, qu'il échoit de préparer – hors de la classe – la réponse $R^{\heartsuit}$ qui sera mise en place et c'est donc lui qui est amené à *observer* les réponses $R^{\Diamond}$, à les *analyser*, à les *évaluer*, c'est-à-dire à reconnaître ce qui, en elles, pourrait bien avoir quelque *valeur* relativement à son projet de production d'une réponse $R^{\heartsuit}$. La construction subséquente, dans la classe, de la réponse $R^{\heartsuit}$ ainsi pré-produite par le professeur n'ouvre aux élèves qu'un *topos* limité, que la pratique des AER enrichit sur des points certes essentiels – surtout si la mobilisation et l'exploitation des milieux adidactiques adéquats à l'étude poursuivie est confiée à la classe, et non décidée à l'avance par le professeur seul. Malgré cela, le tracé de la frontière du *topos* de l'élève dans la classe de mathématiques répond encore pour l'essentiel à l'antique idéal – il date des anciens Grecs – d'un engendrement purement déductif de la connaissance. Même réduit à de brefs épisodes ouverts aux élèves par le professeur (« Montrer que le quadrilatère SACB est un parallélogramme. Que peut-on dire du milieu O de la diagonale [AB] ? Conclure. »), ce paradigme déductiviste est ici exclusif d'un commerce, ressenti comme sans principe, avec le monde, toujours suspect d'hétérodoxie ou d'inconvenance, où circulent les réponses allogènes $R^\lozenge$.

7.5. Bien entendu, la culture scolaire de l'étude ignore ces gestes que sont l'analyse et l'évaluation d'une réponse $R^\lozenge$ à des fins de développement de $R^\heartsuit$: elle ignore l'art – parce qu'elle ignore le problème – de déconstruire $R^\lozenge$ et d'employer certains au moins des matériaux ainsi récupérés dans la construction de la réponse $R^\heartsuit$ souhaitée. Le schéma évoqué dans les lignes qui précèdent peut s'écrire maintenant $(S(X, Y ; Q) \Rightarrow R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, M') \Rightarrow R^\heartsuit$, où les réponses $R_i^\lozenge$ ne constituent encore qu'une partie du milieu « engendré » par le fonctionnement du système didactique $S(X, Y ; Q)$, puisqu'une autre partie, M', sera notamment indispensable pour les déconstruire et construire la réponse $R^\heartsuit$. Sans doute est-il utile de préciser que, d'une façon générale, une réponse R est une praxéologie ou un fragment de praxéologie – par exemple une technologie, si l'on disposait au départ d'une technique. Le modèle des moments de l'étude est donc intégralement conservé, à condition de le contextualiser adéquatement. Ainsi la construction du bloc technologico-théorique, s'il y a lieu, se nourrira-t-elle de *certains* matériaux technologiques prélevés sur les réponses $R_i^\lozenge$ et dûment retravaillés, tandis que d'autres seront mis au rebut comme non utilisables dans le cadre du projet poursuivi. De même, l'évaluation de la réponse $R^\heartsuit$ – réponse vouée inéluctablement à devenir demain, pour ses producteurs, un $R^\lozenge$ parmi d'autres… – trouvera-t-elle avantage à être rapprochée de tel $R^\lozenge$ non encore exploité dans sa construction ; etc. Mais le schéma évoqué jusqu'ici n'est pas encore assez général : dans un certain nombre de cas, en effet, on ne trouve pas facilement de réponses $R^\lozenge$ toutes faites, ou du moins de réponse « de valeur » à la question Q que l'on entend étudier. En ce cas, l'étude de Q se fait, si l'on peut dire, frontale. Cette situation appelle alors la formulation et l'examen de questions qu'on nommera *cruciales*, parce qu'elle détermine en partie, provisoirement au moins, le parcours d'étude et de recherche que l'on suivra. Plus précisément, une question Q_1 sera dite cruciale pour Q si l'on peut penser que savoir répondre à Q_1 conduirait, au moins dans certains cas, à savoir répondre à Q, moyennant la capacité de répondre à quelques autres questions peut-être, en sorte que, si Q_1 est reconnue cruciale pour Q, le fait de se poser la question Q peut conduire à la décision d'étudier Q_1, situation qu'on notera $Q \Rightarrow Q_1$. Soit ainsi la question « Pourquoi n'attrape-t-on plus la peste en France aujourd'hui ? » (Q). L'énoncé « Parce que la peste aurait disparu de la surface du globe » constituera une réponse R_0 possible à la question posée ; on pourra décider alors d'examiner la question cruciale Q_1 « Est-il vrai que l'agent pesteux ait disparu de la surface de la planète ? » Si l'on découvre que la réponse à cette question est négative, il conviendra d'abandonner le chemin emprunté jusque-là et de revenir



à la question Q pour tenter une autre réponse R_0' ouvrant un autre parcours d'étude et de recherche. De la même façon, si, dans la situation graphique évoquée plus haut (à propos des tireurs à la cible et du spectateur aux jumelles), on s'attaque à la question « Comment obtenir le tracé du segment de la droite (SC) situé sur la feuille à dessin ? » (Q), on peut s'engager dans la voie ouverte par la réponse R_0 : « En déterminant un point de cette droite autre que C et qui tombe sur la feuille à dessin. » On est alors amené à décider (ou non) d'examiner la question Q_1 : « Comment trouver un point de (SC) qui tombe sur la feuille à dessin ? ». On aboutira peut-être ainsi à la réponse $R^\heartsuit$ illustrée plus haut. Mais on aurait pu aussi prendre un tout autre chemin dès l'étape de la réponse R_0, en envisageant de suivre le chemin ouvert, par exemple, par la réponse suivante (éventuellement rencontrée « dans la littérature », et ayant donc le statut de réponse $R^\Diamond$) : « En déterminant la droite symétrique de la droite (SC) par rapport à un certain axe » (R_0'). Le parcours d'étude et de recherche aurait alors été différent, avec par exemple pour aboutissement la réponse $R^\heartsuit$ illustrée par la figure ci-contre : C' étant le symétrique de C par rapport à la perpendiculaire à (T'C) passant par S, la droite (SC) est la symétrique de (SC') par cette symétrie. On voit ainsi que les chaînes de questions sont en fait des chaînes de questions *et de réponses*, dont l'ensemble dessine une arborescence dans laquelle le cheminement réel de l'étude pourra explorer plusieurs trajets que l'on peut schématiser ainsi :

$$Q \Rightarrow \begin{cases} (Q, R_0) \Rightarrow (Q_1, R_1) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (Q_p, R_p) \\ (Q, R_0') \Rightarrow (Q_1', R_1') \Rightarrow \ldots \Rightarrow (Q_q', R_q') \\ \ldots \end{cases} .$$

Certains des chemins d'abord empruntés seront peut-être définitivement abandonnés. D'autres, qui n'avaient pas abouti dans un premier effort d'étude et de recherche, pourront être repris ultérieurement. Parfois aussi la réponse « finale » $R^\heartsuit$ (constituée en reprenant à l'envers le chemin parcouru) comportera des lacunes : que faire, par exemple, lorsque, dans le problème de construction géométrique examiné, le milieu de [SC] (ou encore le symétrique C' de C) ne tombe pas sur la feuille ? Quelquefois, on s'emploiera à parfaire aussitôt la réponse obtenue. Mais souvent aussi, quand la « science » des phénomènes étudiés disponible au sein du système didactique $S(X ; Y ; Q)$ semblera encore bien insuffisante et que les études auxquelles il faudrait se livrer alors apparaissent, par exemple pour de « simples » raisons de calendrier, au-delà du possible immédiat, il faudra assumer de renvoyer un nouvel effort à des temps meilleurs. Quoi qu'il en soit, l'aboutissement du travail réalisé pourra être noté de façon générale $(S(X ; Y ; Q) \rightarrow O_1, O_2, \ldots, O_m) \rightarrow R^\heartsuit$, où $O_1, \ldots, O_m$ sont les « œuvres » de toutes natures mobilisées, à quelque titre que ce soit (comme réponse $R^\lozenge$, comme milieu, etc.), dans la recherche ayant conduit à la réponse provisoirement finale $R^\heartsuit$.

7.6. Les remarques précédentes ne touchent pourtant qu'à une partie d'un problème beaucoup plus général : celui de la réalisation – par des élèves, sous la direction d'un professeur – d'un parcours d'étude et de recherche. D'emblée, la confrontation au milieu jusque-là inédit des TPE avait mis en évidence la quasi-absence, dans cet autre milieu qu'est la classe de mathématiques « ordinaire », de certaines praxéologies didactiques à peu près indispensables pour encadrer, diriger, mener à bien les parcours d'étude et de recherche répondant aux spécifications rappelées succinctement plus haut. Sous le nom de *dialectiques*, j'ai ainsi été amené à distinguer six savoirs ou savoir-faire que je présenterai ici de façon concise. La première de ces dialectiques est celle dite *du parachutiste et du truffier* [4] : dès que l'on sort des conditions et contraintes qui prévalent classiquement dans la classe, on est conduit à « ratisser » – à l'instar du soldat parachutiste parvenu au sol, sur le théâtre des opérations – de vastes zones de la culture, en sachant *a priori* que, si la densité de rencontres pertinentes sera, en moyenne, des plus faibles, ce ratissage routinier mais vigilant est pourtant une condition indépassable – sauf à supposer le problème déjà résolu – au surgissement de l'inattendu, en lequel on devra – à la manière, cette fois, du chien truffier – s'attacher à repérer les trop rares « pépites » qui serviront à progresser dans la recherche entreprise. La deuxième dialectique est celle *du sujet et du hors-sujet* ; on y prend acte du fait que, dans une recherche non aménagée par avance, on doit à chaque instant prendre le risque du hors-sujet – risque d'aller examiner telle œuvre O_i en espérant y découvrir une réponse $R^\lozenge$ qu'on n'y trouvera pas, risque de s'engager en tel chemin ouvert par telle question Q_j, qui ne mènera nulle part, etc. La troisième dialectique est celle *des boîtes noires et des boîtes claires* : on y promeut ce qu'on croit être la connaissance *pertinente*, quel que soit *a priori* son statut au regard des savoirs à enseigner, en assumant de laisser – souvent contre l'habitus scolaire qui voudrait une clarté

[4] Le rapprochement de ces deux termes est dû à l'historien Emmanuel Leroy-Ladurie.

complète – à un « niveau de gris » réalisant une clarification *suffisante* pour l'usage qu'on prétend en faire certains éléments de réponse rencontrés dans la culture ou produits dans une forme encore peu élaborée, et en osant au contraire, si la chose apparaît utile, *clarifier encore* ce que l'enseignement prodigué prétendrait avoir amené d'ores et déjà à l'état de boîtes on ne peut plus « claires ». La quatrième dialectique est celle de *l'« excription » textuelle et de l'inscription textuelle* des questions et des réponses travaillées au cours du parcours d'étude et de recherche. Cette dialectique doit en premier lieu permettre d'échapper au recopiage formel, non critique, de réponses $R^{\lozenge}$ tenues pour pertinentes et conduit à les interroger en « excrivant » le texte où on les a trouvées *inscrites*. Si, par exemple, je rencontre un document indiquant que, pour déterminer l'ordre de grandeur d'un nombre x, il me faut, après avoir exprimé x en écriture scientifique, c'est-à-dire sous la forme $x = k \times 10^p$, où $1 \leq k < 10$ et $p \in \mathbb{Z}$, comparer k au nombre 3, et conclure que l'ordre de grandeur de x est 10^p si $k \leq 3$ et 10^{p+1} sinon, je ne recopierai pas cette définition sans autre forme de procès, mais j'interrogerai le texte rencontré pour savoir déjà d'où vient ce 3. La chose semble évidente, mais elle doit en fait être conquise contre un psittacisme culturel toujours résurgent : la lecture excriptrice des productions de la culture est au cœur des conditions de possibilité de toute recherche – même si la dialectique des boîtes noires et des boîtes claires doit en régler l'extension et le degré [5]. La cinquième dialectique avait été dite d'abord *de la conjecture et de la preuve*, formulation qui souligne bien que ce qu'on rencontre ou construit dans un parcours d'étude et de recherche est d'abord, et souvent longuement, conjectural, et doit être mis à l'épreuve en un effort qui ne saurait s'alléger devant tel énoncé parce que la bouche qui le profère serait dotée d'autorité. L'autorité supposée ne rend en effet nullement inutile toute vérification : elle est seulement promesse que celle-ci sera davantage possible du fait du soin mis à inscrire dans l'énoncé ou dans son environnement des éléments orientant le lecteur « excripteur » vers les preuves cherchées. Pour revenir un instant à la quatrième dialectique, notons que c'est cela

[5] Parmi les lecteurs profanes intéressés par le sujet de la peste évoqué plus haut, peu sans doute s'imposeraient spontanément, à la place d'une lecture cursive du passage suivant (Norbert Gualde, *Épidémies, la nouvelle carte*, Desclée de Brouwer, Paris, 2002, p. 53), dont l'épaisseur ne saurait être restituée sans un important travail, une lecture adéquatement excriptrice, qui fouille les entrailles du texte en fonction de la recherche entreprise : « Alexandre Yersin découvrit l'agent de la peste en 1894. Il s'agit d'une bactérie dont le génome est maintenant connu. On a observé que l'ADN de ce microbe a intégré des gènes d'autres bactéries, capacité expliquant l'acquisition possible d'une virulence accrue. À ces incorporations d'ADN venu d'ailleurs peuvent s'associer des mutations comme par exemple celle du gène YopA qui aurait pu contribuer à l'augmentation de la virulence de la bactérie. »

notamment que l'on ambitionnera lors de l'inscription de $R^\heartsuit$ en un texte : veiller à rendre raisonnablement possible le travail d'excription que l'exigence de vérification inspirera au lecteur visé, cet idéal d'inscription clairement « excriptible » supposant bien sûr que le texte de $R^\heartsuit$ ne comporte pas de parties recopiées sans avoir fait l'objet d'un travail d'excription adéquat. La cinquième dialectique a été désignée depuis comme dialectique *des médias et des milieux*. Généralisant la notion commune correspondante, on entend par *média*, ici, tout système de mise en représentation du monde (ou d'une partie du monde) à l'adresse d'un certain type de publics : un traité savant est ainsi un média (ou plus exactement une production relevant d'un certain genre médiatique), de même qu'est un média le cours du professeur, ou le système des rumeurs, etc. Le mot de *milieu*, quant à lui, renvoie, en consonance avec la TSD, à tout système regardé comme dénué d'intention dans la réponse qu'il peut apporter (de manière éventuellement implicite) à telle question déterminée, en sorte qu'il paraît se comporter *à son égard* comme un fragment de nature. Il y a en cela le point de départ d'une interrogation qui excède bien sûr le cadre de la classe, où médias et milieux sont généralement fortement sélectionnés, et qui inclut notamment le rapport aux médias au sens aujourd'hui commun du terme. La sixième et dernière des dialectiques est dite *de la production et de la réception* [6]. Elle répond tout particulièrement au « geste de base », évoqué plus haut, consistant à *diffuser & défendre* la réponse $R^\heartsuit$ finalement développée : dans la production de $R^\heartsuit$, il convient d'intégrer les éléments qui en permettront une réception idoine par le « public » visé – le professeur et aussi ses propres camarades de classe quand on est élève, le jury quand, étudiant, on doit soutenir un mémoire, ses pairs quand, chercheur, on prépare une publication, etc. Le souci de la réception, qui, apparemment, a peu les honneurs des cultures scolaires et académiques traditionnelles – du moins en France –, participe à l'évidence des conditions de possibilité de la diffusion des praxéologies dans les différents groupes humains.

7.7. L'interaction avec les TPE (et avec quelques autres dispositifs introduits dans le système scolaire français au début des années 2000) allait provoquer l'émergence d'une problématique plus large, que condense à sa façon la « formule » proposée plus haut, à savoir $(S(X ; Y ; Q) \Rightarrow O_1, O_2, \ldots, O_m) \Rightarrow R^\heartsuit$. On a dit les difficultés que soulevaient le dispositif des AER. Une notion d'un niveau supérieur d'organisation didactique allait émerger comme solution possible à certaines au moins de ces difficultés : la notion de PER, de *parcours d'étude et de*

[6] La terminologie a fluctué au cours du temps : nous nous arrêtons à celle-ci, qui paraît la plus appropriée.

recherche, mais cette fois dans la classe de mathématiques elle-même. Bien qu'une AER au sens usuel du terme puisse être regardée comme un PER, la notion de PER envisagée s'inscrivait en rupture à plusieurs égards avec la notion d'AER, dont elle apparaît comme un dépassement. Au point de départ d'un PER ainsi entendu, il y a bien sûr une question première *Q*, mais une question à laquelle on n'assigne pas pour objectif la rencontre, le « forçage » de tel élément mathématique déterminé – de tel théorème, de telle définition, de telle notation, de telle technique, etc. Il convient au contraire que l'étude au long cours de *Q* ait une puissance génératrice forte, qu'elle puisse se spécifier à travers un grand nombre de questions « secondes », faisant l'objet d'AER particulières, même si l'on n'est plus guère en mesure alors de satisfaire l'exigence d'une « découpe millimétrique » du mathématiquement nouveau qu'une AER donnée était censée faire découvrir. Si, par exemple, on lance, dans une classe de 4^{e}, un parcours d'étude et de recherche engendré par l'étude de la question « Comment calculer avec des nombres qui s'écrivent avec un grand nombres de chiffres ? » ou un autre engendré par la question « Comment réaliser une construction graphique mettant en jeu des points dont certains se situent hors de la feuille de travail ? », on crée d'un coup des niches écologiques pour un grand nombre de notions, de techniques, de résultats inscrits au programme. Le problème prit plus haut pour exemple pourra ainsi recevoir en 4^{e} la solution illustrée ci-contre (dont l'itération permet de régler le problème qui surgit si le milieu O de [SC] tombe hors de la feuille), alors que, parce que les programmes sont ainsi faits (le résultat selon lequel la parallèle à un côté d'un triangle passant par le milieu d'un autre coupe le troisième côté en son milieu figure au programme de 4^{e}), le cheminement qui conduit à cette solution aurait dû être interrompu avant son terme par l'enseignant en classe de 5^{e}. Comme on le voit, le professeur n'est pas ici absent, pas davantage que les élèves : si un PER est impulsé par la volonté d'étudier une question déterminée, cette étude n'est pas elle-même entièrement déterminée – elle est toujours en quelque façon *sous-déterminée*. Comme il en va en tout groupe humain, quelle que soit au reste son activité, elle suppose des décisions négociées au sein de la classe, décisions qui doivent éviter tant l'opportunisme « pédagogique », péché mignon de beaucoup de professeurs, que le souci déterministe qui hante encore certains travaux d'ingénierie didactique. Le chantier ouvert est immense ; mais je suis heureux de constater que, notamment en Espagne, nombre de jeunes chercheurs s'y affairent avec énergie.