

**UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE 1 – UNIVERSITÉ DE PROVENCE
AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ**

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Mémoire de 1^{re} année du master de sciences de l'éducation

présenté et soutenu publiquement

par

Julia MARIETTI

le 19 septembre 2009

TITRE :

**LE CONCEPT DE PER ET SA RÉCEPTION ACTUELLE
EN MATHEMATIQUES ET AILLEURS**

Une étude préparatoire

Directeur de mémoire :

Yves CHEVALLARD

JURY :

Yves Chevallard, professeur, Université de Provence, *directeur de mémoire*

Caroline Ladage, maître de conférences associée, Université de Provence, *présidente*

Yves Matheron, maître de conférences, INRP, *examineur*

Remerciements

Je tiens à remercier d'abord, tout particulièrement, mon directeur de mémoire, Yves Chevallard, pour sa grande disponibilité, pour l'aide constante qu'il m'a apportée et pour tout ce qu'il m'a permis d'apprendre jusqu'à aujourd'hui. Mes remerciements vont de même à Caroline Ladage et Yves Matheron, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir examiner ce travail.

Mes remerciements vont encore à l'équipe du séminaire TAD/IDD animé par Yves Chevallard dans le cadre de l'UMR ADEF, et en particulier à Michèle Artaud et Gisèle Cirade, ainsi qu'à Marianna Bosch, pour l'attention qu'elles m'ont témoignée, de même qu'à mes camarades de promotion Émily et Karine, dont le soutien m'a été précieux.

Mes pensées vont vers mon compagnon, Sylvain, qui sait tout ce que je lui dois, vers mes parents, Christian et Patricia, et vers tous ceux qui m'ont aidée au cours de l'année écoulée.

Sommaire

Introduction	5
Chapitre 1. La profession et la « perte de sens » des apprentissages	7
1.1. La notion de « perte de sens »	7
1.2. « Perte de sens » et enseignement	8
1.3. « Perte de sens » et enseignement des mathématiques	11
1.4. La « perte de sens » affrontée	20
1.5. La « perte de sens » désamorcée ?	24
Chapitre 2. La « perte de sens » et la notion de PER	34
2.1. Perte de sens, raisons d'être, questions	34
2.2. La notion d'AER et les raisons d'être	37
2.3. La naissance des PER	46
2.4. Des PER monodisciplinaires finalisés aux PER codisciplinaires ouverts	52
Chapitre 3. Les PER comme solution et problème	59
3.1. Vers une clinique des PER	59
3.2. Professeurs débutants : une première prise d'information	60
3.3. Professeurs débutants : une deuxième prise d'information	66
3.4. Trois PER conçus et réalisés	75
3.5. La clinique des PER : prolongements et perspectives	81
Conclusion	86

Références bibliographiques	90
Annexes	96
1. Glossaire	96
2. Sigles et acronymes	99
3. Corpus de textes – Extrait 1	100
4. Corpus de textes – Extrait 2	104
5. Corpus de textes – Extrait 3	106

INTRODUCTION

Le travail que nous présentons se veut une étude exploratoire relative au concept de *parcours d'étude et de recherche* (PER) tel qu'il a émergé au cours des années 2000 au sein de la *théorie anthropologique du didactique* (Chevallard, 2007b), que l'on désignera généralement, dans ce qui suit, par le sigle TAD.

Mon intérêt pour ce sujet est la conséquence non immédiate d'une double expérience : d'une part, mon propre vécu des études secondaires puis supérieures en mathématiques, qui m'ont conduit jusqu'à la préparation du CAPES de mathématiques (à l'IUFM d'Aix-Marseille, en 2006-2008), d'autre part, mes interventions auprès d'élèves du secondaire, soit dans le cadre de « leçons particulières » privées (depuis plusieurs années), soit en tant qu'assistante d'éducation dans un collège de l'académie d'Aix-Marseille (en 2008-2009). Les situations vécues dans ces différents contextes institutionnels et dans les diverses positions que j'y ai assumées ont attiré mon attention sur ce que l'on nomme parfois la « perte de sens » des mathématiques enseignées, phénomène commenté, on le verra, par de nombreux auteurs, qu'ils soient praticiens ou chercheurs. Yves Chevallard (2003) note ainsi que l'évolution du curriculum mathématique au cours des décennies passées aurait « conduit d'abord à la perte de sens – pour les élèves, mais aussi pour les professeurs – des œuvres mathématiques enseignées, puis à leur dégradation pure et simple ».

C'est ce type de constat, nous le verrons, qui a motivé, dans une large mesure, l'émergence et le développement des notions d'*activité d'étude et de recherche* (AER) et de *parcours d'étude et de recherche* (PER), que nous avons placées au cœur de notre travail. D'où le fait que nous commençons, dans ce qui suit, par interroger la notion même de « perte de sens » telle qu'elle apparaît dans les formulations des professionnels de l'enseignement. L'enquête que nous avons conduite sur ce point montre que l'expression même de « perte de sens » n'y reçoit guère qu'une signification rhétorique, même si son emploi insistant mérite qu'on la prenne au sérieux (chapitre 1). Par contraste, nous le verrons, la TAD, qui nous a fourni notre problématique théorique, en propose une définition précise et, surtout, opérationnelle, d'abord à travers la notion d'AER, ensuite avec le développement plus récent de la notion de PER et l'évolution actuelle de cette notion (chapitre 2). Quelle réception a, aujourd'hui, la notion d'enseignement par PER ? À quelles contraintes se heurte-t-elle ? Quelles conditions permettraient d'en favoriser l'intégration sans dénaturer dans la culture

et dans les pratiques des professionnels de l'enseignement ? Ces questions dessinent l'horizon d'un travail auquel nous avons tenté d'apporter de premiers éléments de réponse (chapitre 3).

Notre travail s'inscrit dans le champ de la *didactique** et, plus particulièrement, de la *didactique des PER*. Dans tout ce qui suit, nous utiliserons librement le vocabulaire de la TAD en précisant les notions utiles dans un glossaire placé en fin de mémoire (annexe 1), où l'on trouvera une définition des mots dont la première occurrence dans le corps du texte est accompagnée d'un astérisque, comme il en va du substantif « didactique » ci-dessus, ou encore comme il en ira ci-après du mot de *profession** figurant dans le titre du chapitre 1. Nous verrons dans ce chapitre que la question dite de la « perte de sens » est aujourd'hui l'un des grands *problèmes* de la profession*. Signalons ici que les sigles et acronymes de tous ordres que nous avons dû utiliser au long de ce travail sont explicités dans l'annexe 2, en fin de mémoire.

Au plan méthodologique, notre travail résulte d'enquêtes multiples qui nourrissent chacun des trois chapitres en lesquels nous l'avons scindé. L'une de ces enquêtes a porté sur les textes de chercheurs ou de praticiens consacrés aux PER : exploité en particulier au chapitre 3 (voir les annexes 3, 4 et 5), le corpus de textes ainsi réuni préfigure une bibliographie à venir sur le sujet. Comme on le verra, nous avons aussi utilisé systématiquement, lorsque le sujet s'y prêtait, les ressources de l'Internet, en usant de procédures que l'on trouvera explicitées au chapitre 1. Des données d'enquêtes auprès de professeurs stagiaires en formation à l'IUFM d'Aix-Marseille ont également été exploitées. En revanche, nous n'avons pas cru devoir mentionner les résultats d'une pré-enquête par questionnaire préalable à une enquête que nous voudrions aussi large que possible auprès des acteurs actuels du « mouvement des PER » et qui devrait nourrir en partie un travail ultérieur.

CHAPITRE 1

La profession et la « perte de sens » des apprentissages

1.1. La notion de « perte de sens »

L'expression de *perte de sens* n'appartient pas au lexique de la TAD mais à la langue française ordinaire. « Perdre le sens » signifiait classiquement, en français, « perdre l'usage du jugement, perdre la raison » (d'après le TLFi). Cet usage lointain semble avoir laissé des traces : dans l'ensemble des usages que nous avons pu rencontrer au cours de notre enquête, la « perte de sens » apparaît comme un fait premier, qui n'appelle pas d'analyse, et comme un fait « grave », qui ne suppose guère de commentaire. Le mot de *sens* est pourtant sémantiquement complexe, ainsi que le montre le *Dictionnaire historique de la langue française* (Rey, 1993) dans le passage suivant :

En ancien français, selon G. Matoré, six acceptions principales [du mot *sens*] sont en usage : faculté de juger, sagesse, jugement pratique (bon sens), finesse d'esprit et ruse, connaissance technique (valeur proche d'*art*), et manière de voir. Deux autres valeurs sont « faculté de percevoir les impressions » (v. 1119) et, à la même époque, « contenu intellectuel auquel renvoie un signe ». Les deux premiers axes correspondent à deux grands aspects de la vie psychique : raison et sensation. Le troisième met en rapport un type particulier d'objets perceptibles (les signes) et les contenus mentaux. Bien que l'unité profonde du mot puisse ainsi être dégagée, les trois « sens » du mot *sens* sont bien distincts dans la conscience langagière. Dans l'histoire, le premier, « raison », est lentement devenu archaïque, laissant cependant de nombreuses traces (notamment *bon sens*, *sens commun*) ; les deux autres restent vivants et actifs à travers huit siècles d'usage. (p. 1918)

Le « sens » dont il est question dans « perte de sens » relève du troisième axe évoqué ici, à condition d'en élargir la portée : il peut y avoir perte de sens d'un *mot*, bien sûr, mais aussi, plus généralement, d'un *objet** quelconque au sein d'une *praxéologie**.

Soulignons que l'expression « perte de sens » renvoie de fait à une relation *binaires* : perte de sens *de* l'objet *O* pour la *personne** *x* ou pour l'*institution** *I* (ou, plus exactement, pour la *position** *p* au sein de l'institution *I*) (Chevallard, 2003). Dans le cas qui nous

intéresse, la position p pourra être celle d'élève de collège ou d'élève de lycée ou, plus précisément, encore, celle d'élève de 5^e ou de 2^{de}, etc.

Notons aussi que l'expression de « *perte de sens* » est, en soi, curieuse : elle semble dire que, *avant*, un sens existait, qui s'est depuis perdu. Que cette expression semble ainsi évoquer un âge d'or du sens (de tel ou tel objet) constitue peut-être une stratégie pour énoncer de façon plus douce un fait brutal, celui de *l'absence* (actuelle) *de sens* (de O pour x ou pour I), ou, du moins, de l'existence actuelle d'un sens *jugé inapproprié*. Selon un anglicisme qui s'est introduit en français, on dit parfois alors que « *O ne fait pas sens* pour x » (par exemple) là où le français ordinaire conduirait à dire que « *O n'a pas* de sens pour x ». L'anglais, au reste, dispose de deux manières de dire voisines : la première énonce que “*O doesn't make sense*” (*O n'a pas de sens*, « *ne fait pas sens* », est un non-sens) ; l'autre que “*x can't make sense of O*” (x ne peut donner un sens à O). Il y a là une tension que l'on retrouvera plus généralement entre, d'un côté, l'affirmation d'absence de sens de O et, d'un autre côté, celle de l'impuissance de x (ou de I) à donner à O un sens (approprié).

Comment exprimer dans les termes de la TAD le « verdict » selon lequel il y aurait « *perte de sens* » de O pour x ou pour I ? Selon Y. Chevallard (communication personnelle, 22 juillet 2009), le fait qu'une personne z énonce un verdict de « *perte de sens* de O pour x » (par exemple) signifie que le *rapport personnel** de x à O , soit $R(x ; O)$, est jugé par z *non conforme* au rapport à O regardé par z comme étant le « bon rapport ». De la même façon, un verdict de *perte de sens* de O pour (les personnes occupant) la position p dans l'institution I exprime un jugement de non-conformité de $R_I(p ; O)$ à ce que le « *véridicteur* » z regarde comme le « bon rapport » à O .

1.2. « *Perte de sens* » et enseignement

Pour observer les usages de l'expression « *perte de sens* » en relation avec les choses de l'enseignement scolaire, nous avons considéré la population des textes correspondant aux résultats affichés par le moteur de recherche Google en réponse à la requête "**perte de sens**" AND enseignement. De cette population, dont l'effectif annoncé par Google le 20 juillet 2009 était de 37 300, nous avons extrait l'échantillon constitué par les 100 premiers résultats affichés. Ce choix est motivé par le principe de classement mis en œuvre par l'algorithme PageRank propre à Google (même si d'autres critères de classement interviennent aussi) : *grosso modo*, les résultats les mieux classés sont les plus souvent « cités » sur le Web et, en ce sens, correspondent en principe aux textes les plus « lus » parmi l'ensemble des textes classés (“PageRank”, 2009 ; et aussi Chevallard, 2008, séance 2). L'échantillon ainsi recueilli,

nettoyé des textes où l'expression « perte de sens » ne concerne pas l'univers de l'enseignement, est à la base des analyses de cette section, à laquelle il fournit les exemples illustrant les conclusions auxquelles nous sommes arrivés quant à l'emploi de l'expression « perte de sens ».

Dans ce qui suit, nous mettons **en gras** les occurrences de l'expression « perte de sens » dans les textes cités. Ces textes se réfèrent à des objets *O* divers. Ce peut être l'*École* en général : dans un texte voté le 12 juin 2005 lors de son assemblée générale, la Ligue de l'enseignement précise ainsi que, « sous l'effet des incertitudes, face au développement des inégalités, l'École est victime d'une **perte de sens** » (Ligue de l'enseignement, 2005). L'objet de la perte de sens peut encore être le *travail scolaire*, ainsi que l'indique le rapport du recteur Philippe Joutard sur l'évolution du collège (Joutard, 1989) :

On peut enfin s'interroger sur la dégradation d'intérêt que les élèves portent à leur scolarité de la sixième à la troisième. L'ennui et la **perte de sens du travail scolaire** semblent peu à peu gagner une majorité d'entre eux, même s'ils continuent à aimer le collège, mais comme lieu de vie où ils rencontrent leurs camarades. (p. 12)

On rencontre également la mention d'une perte de sens supposée, mais *sans indication explicite* quant à ce qui serait l'*objet* de cette perte de sens. L'affirmation d'une « perte de sens » est présentée fréquemment comme la conséquence, non autrement précisée, mais supposée quasi évidente, de certaines *causes*. À propos de projets récents de réforme du lycée, un blogueur, Guillaume Vergne (2008), écrit par exemple :

La « modularisation » pose plusieurs problèmes, qui ne se limitent pas à une simple question de réduction des postes et de baisse du taux d'encadrement [...] Au-delà, elle risque d'avoir des répercussions pédagogiques importantes. Elles font courir le danger d'un accroissement de **la perte de sens de l'enseignement**.

Évoquant la « pédagogie par objectifs » (sur laquelle on pourra se reporter à Marc Bru, 2006, pp. 77-82), un professeur, Gérard Naudy, écrit de même ceci (Naudy, 2008) : « La pédagogie par objectifs cherche à faire comprendre et non à agir, à réguler, à pouvoir évaluer facilement, à finir les transmissions prévues dans les programmes. La **perte de sens des apprentissages** qu'elle occasionne la rend aujourd'hui intenable. » Semblablement, un conseiller d'orientation-psychologue, Michel Breut, et deux professeurs d'histoire-géographie, Romuald Chollet et Laurent Loiseau, affirment sur le site Web qu'ils animent :

La transformation de l'école à l'œuvre depuis 1980, fondée sur l'incitation administrative à l'accès au bac et l'aspiration des milieux populaires à la poursuite des études pour leurs

enfants, a permis l'accès de 67 % de chaque classe d'âge au bac. Le même processus a eu un effet de massifier les symptômes de difficultés et de **perte de sens pour de nombreux élèves** dans les collèges, les LP, et aussi les Lycées.

Si l'on nous dit bien, ici, *pour qui* il y aurait perte de sens, on ne précise pas ce que sont les *objets* de cette perte de sens. L'affirmation d'une perte de sens est ainsi souvent incomplète et ses causes supposées énoncées comme en passant. Par contraste, dans un texte de 1995, Philippe Meirieu écrit ceci :

Il faut un « mythe dynamique », comme dit Abraham Moles pour décrire les grandes révolutions scientifiques, un mythe à la hauteur du mythe fondateur. Or, c'est peu de choses que de dire que le « mythe » n'est pas là et c'est une banalité que de souligner que cela se traduit dans la quotidienneté scolaire par la **perte de sens** de ce que l'on est censé [*sic*] faire à l'école, perte de sens qui frappe aussi bien les enseignants que les élèves.

Ici, même si elle reste « large », la description est explicite : perte de sens *pour* les enseignants et *pour* les élèves *de* « ce que l'on est censé faire à l'école », *due* à l'absence d'un « mythe fondateur » de l'École. Mais il n'en va pas toujours ainsi, même dans le monde « savant ». Un professeur de sciences de l'éducation à l'université de Mons, Jean-Pierre Pourtois, écrit par exemple (Pourtois, 1991) : « Le monde de l'enseignement se trouve donc confronté à une double **perte de sens**, résultant d'une part de la dissonance entre les idéaux proclamés et la réalité de l'expérience, et d'autre part, de la dévaluation de sa substance. » De même, à propos d'une question déjà rencontrée, celle de la pédagogie par objectifs (PPO), les auteurs d'un ouvrage intitulé *Développer un curriculum d'enseignement ou de formation*, Marc Demeuse, Christiane Strauven et Xavier Roegiers (2006) écrivent :

Comme nous l'avons signalé, l'acquis principal de la pédagogie par objectifs est d'avoir amené à préciser ce que l'on attendait au terme d'un apprentissage, mais elle a souvent aussi conduit à un découpage trop fin des objectifs, contribuant ainsi à une **perte de sens**. (p. 90)

Le même usage indéterminé de l'expression se retrouve encore, par exemple, dans le passage suivant d'un texte de Chantal Amade-Escot (2001) :

Ces difficultés se traduisent au niveau micro-didactique par la dissolution de la variable de commande dans un ensemble de consignes trop lâches ou, parfois, trop nombreuses. Les conséquences en sont **une perte de sens** ou une transformation **du savoir enseigné**, voire l'évanouissement du problème. (p. 31)

Ce qui se dégage ainsi est un schéma que l'on peut écrire

$$C \Rightarrow \text{Perte de sens [de } O \text{ pour } X]$$

où C désigne un ensemble de « causes » qui provoqueraient ($\Rightarrow$) une « perte de sens ». Dans tout cela, l'expression semble ne recevoir qu'un sens minimal : lorsqu'ils jugent certains facteurs néfastes, les auteurs consultés en repèrent les effets négatifs supposés en parlant de « perte de sens », sans préciser davantage le contenu sémantique de cette expression. Nous nous trouvons ainsi devant une construction qui semble être plus une façon de dire commode qu'une élaboration conceptuelle solide.

1.3. « Perte de sens » et enseignement des mathématiques

Nous nous tournons maintenant vers les discours invoquant plus particulièrement une « perte de sens » à propos d'objets qui relèvent de l'enseignement des *mathématiques*. Quatre questions seront désormais en filigrane de notre enquête ; les voici :

- 1) qu'entendent par « perte de sens » (en mathématiques) les auteurs qui s'expriment sur ce sujet ? À quels signes reconnaissent-ils qu'il y aurait « perte de sens » ?
- 2) comment analysent-ils ce phénomène (en termes d'origines, ou de causes, ou de conditions et contraintes*) ?
- 3) que proposent-ils pour lutter contre la perte de sens telle qu'ils l'identifient ?
- 4) quelle réception ces propositions ont-elles, avec quels effets, et pourquoi ?

Implicitement, les deux premières questions étaient sous-jacentes à l'enquête de la sous-section 1.2 ci-dessus. Les deux dernières questions les complètent dans la perspective du sujet même de notre travail : l'émergence, la diffusion et la réception de la notion de PER comme moyen de « restaurer le sens ».

Pour constituer un corpus de discours sur la « perte de sens » supposée en matière d'enseignement *des mathématiques*, nous avons mis en œuvre la technique déjà utilisée dans la section 1.2. Ici, nous avons demandé à Google d'afficher ses « réponses » à la requête **"perte de sens" AND enseignement AND mathématiques**. Le 25 juillet 2009, Google annonçait pour effectif de cette population de résultats le nombre 6720 ; en fait, l'affichage proposé comportait seulement 629 résultats, car, selon la formule consacrée, « pour limiter les résultats aux pages les plus pertinentes (total : 629), Google a ignoré certaines pages à contenu similaire ». Comme précédemment, nous avons tiré les documents composant notre corpus des 100 premiers résultats affichés, en écartant de ceux-ci et les documents « non pertinents » (où la « perte de sens » alléguée n'a pas un objet « mathématique »), et les

doublons (généralement nombreux), et les documents émanant d'auteurs qui se réfèrent à la TAD ou, du moins, à la notion de PER, type de discours que nous examinerons dans les chapitres 2 et 3.

L'examen du corpus que nous avons constitué suggère que l'affirmation selon laquelle les processus de diffusion des connaissances mathématiques à l'école seraient le lieu d'une « perte de sens » (et, plus encore, d'un *risque* de « perte de sens ») est en fait classique. En juillet 1999, Mireille Martin-Deschamps, alors présidente de la SMF, écrit ainsi dans la *Gazette des mathématiciens* :

Cependant nous sommes en période de crise : un nombre croissant d'enseignants s'inquiètent d'une perte de sens de la culture mathématique chez les élèves et les étudiants, ainsi que d'une incompréhension des enjeux et de l'utilité de ce qui leur est enseigné. Cette perte de sens est également bien répandue au sein de nos élites et l'enseignement des mathématiques est constamment remis en question.

Ce constat n'est pas nouveau : un dossier paru dans un numéro encore récent de la *Gazette* (Le rôle des Mathématiques, octobre 97) tentait déjà de réagir et de défendre les mathématiques. (p. 2)

Selon P. Dunand (1998), en Belgique, une commission des programmes aurait déclaré :

L'accident le plus fréquent dans l'apprentissage des mathématiques est la perte du sens et le repli sur la forme, sans contenu :

- ne plus penser
- se contenter d'exécuter des algorithmes selon l'unique procédé permis, tout cela devient insoutenable.

On a là, pour nombre d'auteurs, une cause importante de « perte de sens » potentielle : la réduction de l'activité mathématique à des manipulations formelles, réduction contre laquelle l'enseignant se devrait de réagir, ainsi que le souligne vigoureusement Jean-François Batisse (2008) :

Nous proposons donc à son accompagnateur de ne pas laisser s'évaporer ce sens et de le faire **rappeler** systématiquement en le faisant parler : « Qu'est-ce que **ça veut dire** de multiplier 382 par 73 ?... » Ou bien : « Qu'est-ce qu'on pourrait **imaginer comme problème** dont cette opération serait le résultat ?... » Parler une opération, c'est en dérouler le sens ; du coup, la technique opératoire – qui n'est que **l'application** de la logique de l'opération – devient naturelle, fondée ; elle s'en apprend d'autant mieux. On ne passera au **sens des signes** que progressivement, quand on aura acquis la certitude qu'ils correspondent bien, chez l'enfant,

aux opérations mentales indiquées. Observons que l'usage de la calculatrice **augmente le risque de perte de sens** : on voit, de plus en plus, au collège puis au lycée, des élèves pianoter sur l'instrument à la recherche moins d'un sens que d'une réponse... Et comme on l'a déjà souligné, plus un enfant semble en difficulté, plus il va essayer de se raccrocher à quelque chose « qui marche », en l'occurrence à une technique ou à une « machine ». C'est donc électivement ce genre d'élèves qui doivent **comprendre avant de faire**. (pp. 3-4)

La « perte de sens » évoquée ici se produirait quand on abandonne la *parole* – regardée par l'auteur comme un conservatoire du « sens » –, en ne manipulant plus, dès lors, que les symboles du calcul écrit. Pour cette raison, l'usage « silencieux » (et réputé quelque peu monomaniacal) de la calculatrice par les élèves est mis en cause. À cet égard, un document en ligne sur le site de l'IUFM de Créteil intitulé *La calculatrice au collège* (Saint-Raymond, 2002) offre les considérations suivantes :

Nous devons parfois exiger des élèves qu'ils abandonnent leur calculatrice...

– pour les calculs trop simples : $a \times 10$; $\frac{a}{10}$; $\frac{a}{2}$ etc.

– si cela engendre une **perte de sens** : $5/100 = 1/20$ et pourtant $5/100$ a peut être plus de sens.

On rencontre là un autre type de présupposé : la *fragilité du sens* (pour les élèves), qui peut se perdre pour un rien, en sorte que les causes potentielles de la « perte de sens » apparaissent multiples.

Parmi ces causes, plusieurs auteurs situent ainsi le goût trop vif des responsables de l'enseignement des mathématiques, des auteurs de manuels et des professeurs pour la *formalisation* des notions et procédures mathématiques. L'extrait suivant d'un ouvrage intitulé *Structurer l'enseignement des mathématiques par les problèmes* (Noël, Cazzaro, Pourbaix & Tilleuil, 2001) propose de cela des exemples choisis :

Si le mathématicien confirmé finit par ne plus voir en une droite et l'équation d'une droite que deux facettes d'un même objet, il est loin d'être certain que l'élève du secondaire maîtrise ce changement de cadre avec la même dextérité. Le risque de **perte de sens** est donc très grand.

EXEMPLE 2.1. On a parfois, dans certains manuels scolaires des années 70, rencontré des définitions du type suivant :

– un point de $\mathbb{R}^2$ est un triple de nombres réels non tous nuls, écrits en ligne et donnés à un facteur constant près.

– une droite de $\mathbb{R}^2$ est un triple de nombres réels non tous nuls, écrits en colonne et donnés à un facteur constant près.

– une conique est une classe d'équivalence de matrices symétriques non nulles 3×3 données à un facteur constant près.

Si l'exemple qui précède est extrême, la **perte de sens** peut être effective de façon beaucoup plus insidieuse. N'existe-t-il pas de nombreux élèves parfaitement capables de dessiner une droite d'équation donnée ou de trouver l'équation d'une droite passant par deux points connus qui, cependant, n'ont pas pleinement conscience de ce que l'équation d'une droite est une condition nécessaire et suffisante d'appartenance à cette droite ? (p. 75)

On voit sur le dernier exemple évoqué que la « perte de sens » d'un objet mathématique – ici, l'équation d'une droite – correspond à un rapport présumé « incomplet » (et, pour cela, jugé inadéquat) relativement au rapport institutionnel auquel le « véridicteur » se réfère. En ce sens, les tendances formalistes de l'enseignement mathématique « moderne » ont été bien souvent regardées comme engendrant presque mécaniquement pertes ou absences de sens, ainsi que le fait François Boule (2002) dans le passage suivant :

Élargissons encore un peu ce premier cercle : il arrive que l'enfant soit conduit à considérer des “objets” ou des énoncés qui, pour lui, n'ont pas de sens ; ils ne renvoient à aucune réalité, à aucune évidence, à aucune intuition. Stella Baruk [1973, 1977, 1985] a maintes fois évoqué avec véhémence le désarroi qui en résulte. L'une des raisons de cette perte de sens vient de ce qu'un vain souci de rigueur fait quelquefois préférer un enseignement formel, déraciné de toute allusion au réel et de toute problématique. Cette circonstance est plutôt rare à l'école maternelle ou élémentaire, mais malheureusement bien plus fréquente au collège. On n'insiste jamais assez sur la nécessité non seulement de partir d'objets ou d'actions réelles, de manipulations, de problèmes vraiment concrets, mais aussi d'y revenir souvent et de faire participer les enfants à ce mouvement.

La référence faite ici aux ouvrages de Stella Baruk est, dans ce contexte, classique. Ainsi, exprimant sa mauvaise humeur à l'encontre de l'évolution de l'enseignement des mathématiques depuis plusieurs décennies, Serge Mehl écrit-il sur son site (Mehl, s.d.) :

En 3^e :

- on factorise à tour de bras des expressions bien faites « pour que ça marche » ;
- on résout *automatiquement* des équations « produit nul » ;
- on confond avec délice, depuis 40 ans, $a^2 - b^2$ et $(a - b)^2$;
- on supprime l'étude intuitive des droites du plan au profit des fonctions linéaires et affines !

L'adverbe « *automatiquement* » renvoie à un néologisme popularisé par S. Baruk : les élèves seraient transformés, en certains cas, en *automathes*. S. Mehl conclut un peu plus loin :

Stella Baruk (...) a bien raison depuis 30 ans. On fabrique des automathes déréglés et on exige des élèves des connaissances académiques excessives et rébarbatives. Dans notre enseignement, les mathématiques sont une fin alors qu'elles devraient être un moyen, un outil.

Sur le site *PaperBlog* (<http://www.paperblog.fr/>), à propos de l'émission « Sciences et conscience » du jeudi 6 novembre 2008 sur France Culture, dont le thème est ce jour-là « Mathématiques et langage », et à laquelle participe notamment S. Baruk, un commentateur, Bruno K. [sic], écrit :

D'après Stella Baruk l'une des causes de la perte de sens en maths est la confusion entre trois langues distinctes : la langue usuelle, la langue académique (dans laquelle sont rédigés les énoncés par exemple) et la langue mathématique elle-même.

L'article de l'encyclopédie *Wikipédia* (en français) intitulé « Stella Baruk » propose ce résumé (que nous ne développerons pas davantage) :

Stella Baruk dénonce l'indifférence de l'institution scolaire vis-à-vis de la **perte du sens** pour les élèves qui ont des difficultés en maths. Elle dénonce aussi les erreurs pédagogiques qui engendrent cette perte du sens.

À force de ne pas comprendre ce qu'ils écrivent, les élèves deviennent des « automathes » (automates qui reproduisent mécaniquement des objets prétendus mathématiques) et renoncent complètement à trouver du sens aux expressions mathématiques. Les maths deviennent comme un monde à part où l'intelligence n'a plus cours.

Il ne s'agit pas là, pourtant, de l'unique direction dans laquelle pointent les auteurs de notre corpus.

On a vu ainsi l'idée selon laquelle les changements de programme, qui modifient le paysage mathématique jusque dans certains de ses détails, devraient être parfois incriminés. Une autre source de « pertes de sens » se trouverait dans la volonté de simplifier, de morceler la matière enseignée, pour viser à une réussite qui ne s'obtiendrait qu'au détriment du « sens ». C'est ainsi que Marie-Lise Peltier (2007) décrit divers moyens – artificiels – de susciter la réussite :

Les moyens d'obtenir la réussite sont variés :

Aplanissement des difficultés, modification des consignes ou des données (souvent à l'insu de l'enseignant) conduisant à la résolution sans mise en œuvre du savoir visé, choix de contextes familiers, proches du « vécu » supposé des élèves pouvant conduire à des modes de résolution dans la logique pragmatique du quotidien, **simplification et morcellement des tâches risquant de conduire à une perte de sens de l'activité**, centration sur les algorithmes

risquant de renforcer la logique de conformation et du « faire » dans laquelle sont certains élèves, un étayage très important pouvant conduire à une perte d'autonomie, une individualisation des tâches ne permettant pas la mise en place de phases d'institutionnalisation, une valorisation souvent excessive pouvant conduire à un leurre sur les compétences et connaissances des élèves : ceux-ci et leurs familles pensent que tout va bien puisqu'ils ont des « bonnes notes » et c'est plus tard et notamment au collège que leur niveau réel sera découvert, ce qui pourra entraîner une incompréhension des attentes de l'école voir un rejet de celle-ci.

Il s'agit là d'un point de vue que partagent divers auteurs, de l'école primaire jusqu'à l'université, qui répètent un argument rencontré plus haut à l'encontre de la PPO. Ainsi, dans une étude intitulée *Les « classes mathématiques » et la liaison cycle 3-Sixième*, Pierre Eysseric (2001) mentionne-t-il l'objectif consistant à « limiter les problèmes de morcellement, de dispersion, de linéarisation des apprentissages mathématiques qui provoquent une perte de sens et de motivation ». Dans une perspective voisine, se référant en 2002 au futur nouveau programme de la terminale scientifique des lycées, Gérard Kuntz (2002) écrit :

Ma critique ne porte pas sur le fait que le programme actuel ne retienne que deux cas particuliers d'équations différentielles. Après tout, il faut faire des choix. Mais elle stigmatise la perte de sens à laquelle conduit, par un laxisme intolérable, cette limitation. Ce chapitre, même réduit, n'est pas anodin. L'équation différentielle est un des outils majeurs de la science. Le minimum d'estime dû aux élèves consiste à leur expliquer la nature radicalement nouvelle du problème et ses enjeux avant de leur donner des théorèmes et des formules « prêtes à l'emploi ».

Dans la même veine encore, le collectif *Action Sciences*, dans son compte rendu d'une entrevue au ministère de la Recherche le 3 octobre 2007, précise ainsi le contenu de l'une de ses déclarations à ses interlocuteurs ministériels :

Le morcellement des enseignements, dû à une application mal maîtrisée de la réforme LMD, joue aussi un rôle dans la perte de sens des apprentissages et la démotivation des étudiants. Cela conduit un étudiant à avoir en mathématiques, par exemple, 8 à 12 enseignants. Il n'est donc pas suivi convenablement. Quand on compare avec une CPGE, le professeur de mathématiques se sent personnellement responsable de tous ces élèves jusqu'à la réussite au concours.

À la parcellisation de la matière enseignée s'ajoute ici la multiplication corrélative des enseignements et des enseignants, considérée comme un facteur de « perte de sens ». On voit

ainsi émerger deux grands ensembles de conditions et contraintes réputées engendrer des « pertes de sens » dans la diffusion scolaire des praxéologies mathématiques. L'ensemble C_1 rassemble les faits de réduction des contenus mathématiques à des jeux langagiers et formels réputés ne pas « faire sens » dans l'univers cognitif d'un certain nombre d'élèves. L'ensemble C_2 réunit les pratiques délibérées de « morcellement » de la matière à enseigner, comme si l'on voulait la découper assez finement pour que son « ingurgitation » – sinon son assimilation – par les élèves s'opère presque sans qu'on y pense. L'étude du corpus de textes révèle cependant un autre point de vue, qui va à rebours des considérations rapportées jusqu'ici, on va le voir.

Dans une conférence donnée à l'Université de la Rochelle, un professeur belge, André Pétry (2006), précise vouloir « envisager la place du formalisme dans l'enseignement des mathématiques, les freins qu'il peut parfois constituer mais aussi ses apports ». À ce propos, il indique :

Le formalisme peut revêtir plusieurs formes : il peut se traduire par une simple complexification des énoncés, ou par une perte de sens du fait d'un effort trop grand apporté à la compréhension du langage, ou encore par un éloignement de l'intuition..., mais il peut aussi éviter les paradoxes et donc apporter du sens.

Le formalisme mathématique apparaît ici comme un objet ambivalent. On notera en particulier cet apparent paradoxe : un « effort trop grand apporté à la compréhension du langage », regardé dans tout ce qui précède comme générateur de « sens » (et outil de lutte contre la « perte de sens »), pourrait au contraire engendrer une « perte de sens » ! Dans un texte intitulé *Sens et algorithmes*, Annick Flückiger (1999) cite cette remarque de Guy Brousseau (1997) :

On peut prévoir que les efforts déployés pour aider les professeurs à « donner du sens » aux savoirs mathématiques (je m'y suis employé) appelleront des efforts contraires car les limites dans ce domaine ont été largement dépassées. Le sens n'est pas une panacée. Il faut pouvoir s'en débarrasser. La nature même des mathématiques consiste à oublier le sens pour tirer les bénéfices des formalisations et des généralisations. (p. 38)

Elle-même écrit :

La question du sens est omniprésente dans l'ensemble des textes – officiels ou non –, discours, prises de position... quand il s'agit de l'enseignement des mathématiques; cette question du sens des connaissances enseignées est à l'origine du développement de la didactique des mathématiques.

La position la plus communément admise est que travailler sur les algorithmes de calcul – prenons la division – à l'école primaire est au plus une nécessité culturelle mais n'est en aucun cas générateur de « sens » pour les élèves ; d'autant plus que, maintenant, les calculatrices semblent permettre de se dispenser de cet apprentissage perçu comme sans intérêt pour les apprentissages mathématiques et coûteux en temps. Enfin, il est de bon ton d'associer sens et problème concret sans que, le plus souvent, soit interrogé ce couplage.

Il nous semblait intéressant de questionner toutes ces évidences et de poser le problème en d'autres termes, par exemple, quel « sens » cela peut-il bien avoir de travailler sur des algorithmes de calcul – donc uniquement dans le numérique à l'exclusion de tout énoncé formulé avec des mots – et ce, à la fois du point de vue de l'élève et du point de vue du savoir mathématique de référence.

En pointant une faille dans les prises de position « anti-formalistes », ces analyses désignent aussi – de façon encore allusive – un troisième ensemble de conditions et contraintes, C_3 , qui favoriseraient la « perte de sens ». La prise de distance que suppose l'activité mathématique avec un « sens premier » *supposé* des objets manipulés est bien marquée dans le résumé proposé dans la fiche de la base de données bibliographiques sur l'enseignement des mathématiques Publimath consacrée à un article intitulé *Que sont et à quoi servent les mathématiques ?* dû à André Deledicq (2003) :

... l'auteur met en lumière le double aspect des mathématiques : outil de résolution des problèmes pratiques qui se posent à l'homme et construction intellectuelle durable. Il démontre que l'efficacité des mathématiques se situe dans cette double nature, et que la force des mathématiques est d'accepter une perte de sens temporaire dans le cadre du fonctionnement du modèle appliqué dans une situation.

On arrive ainsi à l'idée d'une « perte de sens » *utile*, voire *indispensable* pour entrer dans la compréhension du travail mathématique. Soulignons qu'il ne s'agit pas là de pures spéculations épistémologiques ; dans un texte officiel consacré naguère à la rénovation de l'enseignement des mathématiques en SEGPA, on trouve l'exemple de la technique classique des « produits en croix », développé un peu longuement, et que, exceptionnellement, nous reproduisons ici dans son intégralité (MEN, 1999) :

Procédure 5

Elle est très connue sous le nom de « **technique des produits en croix** ».

Elle ne s'appuie sur aucun raisonnement mettant en œuvre les grandeurs.

Mise en œuvre sur un exemple

La procédure porte un nom (produit en croix) qui est inséparable du dispositif sémiotique que constitue le tableau à quatre cases dit « de proportionnalité ». Considérons, par exemple, le tableau suivant, relatif à un achat de viande :

Masse de viande (en kg)	2,5	1,75
Prix correspondant	230	?

La procédure consiste à multiplier 230 par 1,75 (on obtient ainsi l'un des produits en croix), puis à multiplier 2,5 par ? On écrit que les « produits en croix » sont égaux, et on en déduit que le prix recherché s'obtient en divisant le produit $230 \times 1,75$ par 2,5. Parfois même, on court-circuite l'étape consistant à écrire l'égalité des « produits en croix » (car elle nécessite de désigner l'inconnue par un symbole) et l'on obtient alors la procédure suivante : on multiplie 230 par 1,75, puis on divise par 2,5.

À propos de l'enseignement de la procédure 5

Le lecteur aura d'emblée compris que cette procédure – dans laquelle on commence par multiplier un nombre qui mesure une masse de viande, par un nombre qui mesure un prix – est plus abstraite que toutes celles qui précèdent, car elle nécessite une perte de sens : l'unité « $\text{kg} \times \text{F}$ » n'a aucune existence dans les pratiques commerciales dans nos sociétés.

Cette procédure n'est pas explicitement évoquée dans les programmes actuels. L'algorithmisation de cette procédure, notamment dans les problèmes de recherche de quatrième proportionnelle, se voit facilitée par l'emploi du « tableau à quatre cases », et par des outils à forte sémiotité tels que les expressions « on fait le produit en croix ». Professeurs et élèves ont alors à leur disposition des moyens langagiers – gestuels, oraux et écrits – pour dire ce qu'il convient de faire, et comment le faire. C'est l'une des raisons de son succès, en dépit de la difficulté de la justification de son bien-fondé, et de l'abstraction plus forte qu'elle suppose (perte de sens évoquée ci-dessus).

Elle trouve légitimement sa place dans l'enseignement à un niveau plus élevé, et notamment à partir du moment où l'on dispose de lettres pour désigner les inconnues (classes de 5^e, et surtout, de 4^e).

Justification mathématique de cette procédure

Considérons la fonction linéaire f qui à tout nombre x associe le nombre Ax .

Comparons $af(c)$ et $cf(a)$; $af(c) = a(Ac)$; $cf(a) = c(Aa)$. L'égalité de $af(c)$ et de $cf(a)$ résulte de la commutativité et de l'associativité de la multiplication.

À une époque déjà lointaine, si on avait disposé de la notion de fonction et des écritures qui lui sont associées, ce qui n'était évidemment pas le cas, cette propriété se serait écrite par exemple : $a : f(a) : : c : f(c)$. En divisant le produit des « moyens » ($c f(a)$) par l'autre extrême a , on obtient $f(c) : f(a) = \frac{cf(a)}{a}$.

L'intérêt de cette propriété dans la résolution de problèmes est le suivant :

Si j'ai à calculer le prix de c (kg de viande), et si je dispose d'un nombre a pour lequel je connais $f(a)$, il me suffira de multiplier c par $f(a)$, puis de diviser ce produit par a .

Cet exemple permet de préciser la difficulté que pointent les auteurs consultés. À suivre le document relatif aux SEGPA, il semble en effet qu'il faille persuader beaucoup de professionnels de l'enseignement des mathématiques que le « sens » d'une construction mathématique – ici le produit $230 \text{ F} \times 1,75 \text{ kg}$ – ne se réduit pas au sens qui lui aurait été par avance conféré par des pratiques sociales extramathématiques connues des élèves, comme il en irait, ici, si l'on parlait de $230 \text{ F} / 1,75 \text{ kg}$, prix au kilogramme d'un bien dont $1,75 \text{ kg}$ ont coûté 230 F . Les objets mathématiques, à l'instar des autres objets, trouvent d'abord leur sens dans les activités où ils interviennent ; le « sens » de l'expression $230 \text{ F} \times 1,75 \text{ kg}$ *n'a pas à préexister* à son apparition dans le travail mathématique que la « technique des produits en croix » suppose : c'est *ce travail* même qui lui donne son sens spécifique.

Tout cela conduit à penser que le verdict selon lequel il y aurait « perte de sens » ou « absence de sens », l'objectif corrélatif de « construction du sens » (ou de « restauration du sens ») et les égarements dans la poursuite de cet objectif butent en fait sur une difficulté clé : la notion même de « sens » d'un objet (mathématique) et la définition du sens d'un objet. Nous verrons au chapitre 2 comment la TAD prend en charge cette difficulté.

1.4. La « perte de sens » affrontée

On a rencontré jusqu'ici trois ensembles de conditions et contraintes (notés respectivement C_1 , C_2 et C_3) qui favoriseraient (ou risqueraient de favoriser) des « pertes de sens ». On peut se demander s'il existe des dispositifs ambitionnant de créer des conditions antagonistes – au moins partiellement – de C_1 , C_2 ou C_3 . Bien qu'une mise en relation stricte entre ensembles C_i et dispositifs proposés ne soit guère possible de ce point de vue, nous illustrerons ici rapidement ce travail d'élaboration de dispositifs didactiques motivés par la lutte contre certaines causes supposées de « perte de sens ».

L'un des résultats affichés par Google en réponse à la requête "**perte de sens**" AND enseignement AND mathématiques nous mettra sur la piste d'un type de dispositifs qu'on peut regarder comme associé à l'ensemble C_1 . Il s'agit d'une présentation,

signée de Christophe Durand (physicien) et de Marc Legrand (mathématicien), de stages de formation proposés en 2008-2009, dans le cadre du CIES de l'académie de Grenoble, aux moniteurs. (Le monitorat est un statut spécifique créé en 1989 – mais qui doit disparaître à la rentrée 2009 – pour offrir aux étudiants inscrits en thèse une initiation sur trois ans au métier d'enseignant chercheur.) Les auteurs de cette présentation formulent d'abord le problème didactique à résoudre :

Le double problème que nous rencontrons tous dans nos enseignements est le suivant : les savoirs théoriques que nous enseignons sont porteurs de sens et c'est leur sens profond qui rend l'étude véritablement utile, intéressante, voire passionnante ; ce n'est que lorsque nos étudiants commencent à comprendre véritablement de quoi il retourne qu'ils se mettent à approfondir et à intérioriser nos enseignements, et qu'ils les travaillent bien au delà de la seule perspective de réussir ou de ne pas échouer à l'examen.

Mais à tous les niveaux, et dans toutes les disciplines, les constats suivants sont réels :

- Un grand nombre de nos interlocuteurs ne donnent que très peu de sens à tout ce qui est énoncé en cours de façon théorique et abstraite, beaucoup d'ailleurs ne vont pas en cours et/ou ne les retravaillent absolument pas seuls, ils attendent qu'on leur donne en TD ou en TP les quelques rappels et recettes qui suffisent pour réussir aux contrôles et examens ;
- même quand ils travaillent assidûment, un grand nombre de nos étudiants sont très passifs vis-à-vis de la recherche du sens, ils ne se posent que très peu de vraies questions. Quand on veut les faire intervenir, beaucoup se comportent en simples consommateurs de savoirs, ils prétendent n'avoir aucune idée originale, aucune proposition personnelle intéressante à faire, ils se contentent d'appliquer ce qu'on leur indique sans marquer de réel appétit pour ce qu'on leur propose.

Devant ce constat souvent très déprimant pour un enseignant, nos exhortations « posez-vous des questions ! cherchez à comprendre par vous-mêmes ! soyez imaginatifs et créatifs, vous allez voir, c'est passionnant ! » ne changent en général rien à cet état de fait, et si nous nous ouvrons de ce problème à quelques collègues plus anciens, il n'est pas rare que sa réponse soit du type : « on ne fait pas boire un âne qui n'a pas soif ! »

On aura noté la présence récurrente de la notion de « sens », et même la référence à un « sens profond ». Cela fait, le texte passe alors à la présentation d'une idée de solution du problème ainsi posé :

Un grand nombre de recherches en didactique se sont attaqué à ce double problème du sens (perte de sens profond et passivité des étudiants dans la recherche du sens), elles tendent toutes à montrer deux choses :

– cet état de fait, qui est bien réel et généralisé, n’a rien d’inéluctable (la plupart de nos interlocuteurs sont capables de comprendre et de s’intéresser sur le fond à nos savoirs essentiels) ;

– les deux problèmes (perte de sens et passivité) se mordent la queue : « si nos étudiants ne comprennent pas sur le fond nos théories, c’est en grande partie parce qu’ils sont trop passifs vis-à-vis de toute démarche d’abstraction, et s’ils sont si passifs vis-à-vis de toute démarche de construction théorique, c’est parce que le sens profond de ce qu’on entreprend en théorisant leur échappe ! ».

À la base de ces analyses didactiques du double problème qui nous préoccupe se trouve un courant de pensée qu’on peut nommer le « constructivisme ». Cette approche consiste non pas à vouloir faire inventer le savoir par les élèves, mais à leur donner la possibilité de devenir des acteurs dans nos constructions théoriques : s’ils confrontent en permanence la théorie à des situations concrètes, à leurs propres pensées et à celles de leurs pairs, ces abstractions deviennent « quasi concrètes » pour eux (comme c’est le cas pour le chercheur) car ils en parlent, les manipulent, les transforment.

En pratique, lorsqu’on arrive à insérer une dose raisonnable de constructivisme dans ses propres enseignements, le climat de la classe, du groupe de TD, voire de l’amphi change radicalement : la passivité de beaucoup de nos étudiants, leur manque d’appétit pour chercher le sens des concepts et des théories se transforment de façon très importante. Il n’est pas rare de pouvoir observer au bout de quelque temps que certains étudiants qui subissaient nos développements théoriques, voire notre discipline même (par exemple les mathématiques pour un futur physicien), se mettent à s’intéresser en profondeur aux sujets qu’on étudie, font des propositions très pertinentes et progressent énormément.

Le principe de la solution évoquée ici se résume en un mot – constructivisme – qui s’incarne lui-même en un type de dispositifs qu’une expression symbolise, celle de « débat scientifique » : c’est par le débat scientifique, introduit dans le cadre même du cours traditionnel, que l’étudiant est ici censé devenir *acteur* des constructions praxéologiques impulsées par l’enseignant.

Nous n’irons pas plus loin à propos de ce type de dispositifs, qui, bien qu’ayant reçu une certaine attention des médias grand public – ainsi que l’atteste par exemple un article de Sophie Blitman (2008) dans *Le Monde de l’éducation* –, n’a, semble-t-il, qu’une diffusion encore limitée. Il en va de même pour un type de dispositifs associé au nom de Stella Baruk : un article signé de Pascale Krémer (2008) dans le quotidien *Le Monde*, qui en fait une ample

présentation, ne cache pas que les thèses de cette auteure, quoique fortement médiatisées, ont une réception contrastée et une diffusion somme toute limitée.

Par contraste avec l'ensemble C_1 , auquel s'adressent les types de dispositifs évoqués jusqu'ici – qu'il s'agisse du « débat scientifique » ou de la « méthode Baruk » –, l'ensemble C_2 de causes de « pertes de sens » a trait à des contraintes qui, pour une part d'entre elles, sont relativement *hors de portée de l'action de l'enseignant*. En témoignent les demandes adressées au ministère par le collectif Action Sciences afin que ne soit pas accentué encore, dans la *mise en œuvre* de la réforme LMD, le morcellement du savoir à enseigner que cette réforme porte en elle. De là, paradoxalement, une demande « négative », celle d'un allègement de la pression « pédagogique » du ministère de tutelle, afin que les enseignants universitaires puissent recouvrer une part de leur capacité d'action à cet égard. « Les exigences de mise en œuvre des réformes, lit-on ainsi dans le compte rendu déjà cité, ont souvent conduit à des absurdités pédagogiques. Nous insistons pour que le ministère évite d'interférer avec les maquettes de licence. »

L'ensemble C_3 de causes possibles d'une certaine « perte de sens » est en revanche au cœur de nombre de travaux classiques en didactique des mathématiques, qui trouvent pour la plupart leur inspiration dans la *théorie des situations didactiques* (TSD) élaborée par Guy Brousseau (2003) et ses collaborateurs. Témoigne de cela, ainsi, un texte déjà cité (Flückiger, 1999), où diverses propositions sont évoquées en vue de faire vivre concrètement ce postulat désormais familier : « qu'il s'agisse de calcul algébrique ou d'algorithmes, une certaine “perte de sens” est bien en effet au cœur de l'intérêt même de ces connaissances mathématiques ». On y lit en particulier ceci :

Le choix fait par nous pour cette recherche est d'investir un temps important dans la construction par les élèves d'un algorithme de calcul, exploitant le fait que l'algorithme de la division est l'occasion de retravailler l'ensemble des connaissances numériques à l'œuvre pendant la scolarité primaire. Les algorithmes de calcul écrit, on le sait, sont historiquement et culturellement situés : en particulier ils sont dépendants du système de numération utilisé et peuvent donc être l'occasion de questionner ce système de numération. Une proposition faite, suite à une recherche sur les erreurs des élèves dans les algorithmes de calcul écrit, était de « considérer un algorithme comme une curiosité à explorer au moyen des connaissances numériques et numérales dont on dispose, jusqu'à ce qu'on puisse en retrouver la clé » (Brun et coll., 1994). Ce n'est pas cette proposition que nous avons retenue mais celle qui consiste à essayer de constituer dans la classe une « microsociété de recherche », microsociété dans laquelle une organisation didactique articulant situations d'action, de communication et de

débat de preuve peut permettre, sur le long terme, la constitution d'un répertoire d'algorithmes de division.

Les notions de « situation d'action », de « situation de communication », etc., employées ici appartiennent typiquement au vocabulaire de la TSD (Brousseau, 2003). Tout cela nous rapproche des propositions issues de la TAD, qui sont au cœur de notre travail. Dans cette perspective, on peut considérer un quatrième ensemble de conditions et de contraintes, C_4 , que l'on trouve par exemple explicité partiellement dans une présentation due à Marie-Alix Girodet et Françoise Duquesne-Belfais (2008) :

Une quête de sens

Aussi bien de la part des formateurs que des élèves, les maths sont habituellement perçues comme un savoir en soi, un objet à étudier mais pas suffisamment comme un outil pour comprendre le monde qui nous entoure. D'où une perte de sens liée à une incompréhension de la cohérence entre les objets de travail en maths. (diapo. 3)

Un auteur déjà rencontré, Guy Noël, écrit dans une perspective analogue (2002) :

L'écueil majeur est la perte de sens. Les activités soumises aux élèves apparaissent gratuites. On résout des équations pour le plaisir. On ne sait pas à quoi ça sert. Il en résulte l'absence de réflexion et de motivation.

Mais nous arrivons ainsi sur le seuil de la « proposition » – relative aux PER – que nous étudierons plus longuement dans les chapitres 2 et 3.

1.5. La « perte de sens » désamorcée ?

Reprenons ici les quatre questions formulées dans la sous-section 1.3 :

- 1) qu'entendent par « perte de sens » (en mathématiques) les auteurs qui s'expriment sur ce sujet ? À quels signes reconnaissent-ils qu'il y aurait « perte de sens » ?
- 2) comment analysent-ils ce phénomène (en termes d'origines, ou de causes, ou de conditions et contraintes) ?
- 3) que proposent-ils pour lutter contre la perte de sens telle qu'ils l'identifient ?
- 4) quelle réception ces propositions ont-elles, avec quels effets, et pourquoi ?

Un bilan sommaire peut être formulé au vu de ce qui précède. La question 1 n'a pas jusqu'ici reçu de réponse sérieuse (ni même de véritable attention) de la part des auteurs consultés. À la question 2, le travail conduit sur le corpus de textes réuni a permis de dégager quatre réponses distinctes, sinon disjointes, symbolisées par les ensembles de conditions et contraintes C_1 , C_2 ,

C₃, C₄. Les questions 3 et 4 n'ont été un peu examinées que dans la sous-section 1.4, où nous avons mis au jour des ébauches d'un petit nombre de réponses.

Dans la présente sous-section, nous procéderons en quelque sorte à rebours, en évoquant un ensemble de types de dispositifs *que l'on peut regarder*, de prime abord au moins, comme s'inscrivant dans la lutte contre la « perte de sens » des connaissances enseignées, notamment parce qu'ils rompraient concrètement avec les causes C₄ évoquées ci-dessus. Nous les passerons ici en revue rapidement, sans ambitionner d'en donner une analyse didactique approfondie, en nous limitant à esquisser des rapprochements ponctuels avec la notion de PER (ou d'AER) : la distance entre ces dispositifs et celui des PER resterait donc à estimer plus précisément.

L'un des types de dispositifs les plus connus du grand public est celui de *La main à la pâte*. Lancé sous ce nom par Georges Charpak, lauréat français du prix Nobel de physique en 1992, il est inspiré à l'origine par l'action du physicien américain Leon Lederman, prix Nobel de physique 1988, qui, afin de rénover l'enseignement des sciences et de la technologie, avait lancé aux États-Unis un programme d'activités de découverte scientifique mis en place de façon spectaculaire dans les écoles primaires de Chicago et de Pasadena. Observant le fonctionnement de cet enseignement rénové, Charpak (1995/2007) illustre par les exemples suivants les principes d'un tel *hands-on program* (programme de travaux pratiques) :

J'ai été frappé par le cahier d'expériences que les enfants devaient tenir. Par exemple, dans une classe d'enfants de six ans à qui l'on apprenait les différents états de la matière, le matériel était composé de petits gobelets et de morceaux de mousse blanche. Il s'agissait de savoir s'ils allaient flotter, se dissoudre ou couler. Ces mots nouveaux étaient inscrits au tableau. On demandait aux enfants de répondre à la question qui leur était posée en écrivant le verbe adéquat, puis on réalisait l'expérience correspondante et on la leur faisait dessiner. Les résultats du cahier d'expériences pouvaient être affreux au mois d'octobre mais magnifiques en juin suivant : les enfants avaient appris à lire et à écrire en décrivant des expériences.

J'ai également apprécié les expériences menées dans les classes de niveau supérieur. Ainsi à huit, neuf ou dix ans, les enfants faisaient de l'astronomie diurne, à l'aide de petits ballons de baudruches gonflés et d'une lampe électrique puissante. Par groupe de quatre, ils discutaient pour comprendre les mouvements de la Terre et du Soleil, ainsi que les saisons qui en résultaient. Or je suis persuadé que 80 % des adultes sont incapables d'expliquer la différence entre l'été et l'hiver.

On rencontre chaque fois, ici, une *question* à laquelle on s'efforce d'apporter réponse en s'engageant dans une *dialectique des médias et des milieux**. Nous ne sommes pas loin, ainsi,

de l'idée de PER au sens de la TAD, à ceci près notamment que les « systèmes » (gobelets, ballons) qu'on devra faire fonctionner comme des milieux sont ici « apportés tout faits », au double plan de la conception et de la réalisation.

Dans le même temps où était lancé le programme *La Main à la pâte*, les CPGE connaissaient une réforme importante, marquée notamment par l'introduction d'un nouveau type d'épreuve, les *travaux d'initiative personnelle encadrés* (TIPE), qui deviennent une composante de certains concours d'entrée aux grandes écoles scientifiques dès la session 1997 (« Travail d'initiative personnelle encadré », 2009). Le BOEN hors série n° 1 du 20 juillet 1995 précise à ce propos (« L'épreuve commune de TIPE aux concours », 1997) :

Lors des TIPE, l'étudiant a un travail personnel à effectuer sous sa propre responsabilité. Cette activité constitue un entraînement à la démarche scientifique, l'amenant à poser des questions avant de tenter d'y répondre et rechercher des compromis, comme le font couramment les scientifiques et les ingénieurs.

Il s'agit donc de « poser des questions » puis de « tenter d'y répondre » : à un autre niveau d'études, nous sommes bien là face à un dispositif de formation semblable à *cet égard* à celui de *La main à la pâte*.

Les TIPE vont inspirer la création, à la rentrée 2000, dans les classes de première des lycées d'enseignement général, d'un nouvel « enseignement » sous le nom de *travaux personnels encadrés* (TPE). La circulaire de rentrée 2000 (MEN, 2000a) le présente ainsi :

Les TPE représentent une innovation pédagogique forte de la réforme du lycée et un enjeu stratégique important, symbolique de toute une évolution des pratiques pédagogiques. Les TPE débutent, en classe de première des séries générales, à la rentrée 2000. Les élèves réaliseront une seule production en travail personnel encadré au cours de l'année de première et travailleront en autonomie, par groupes ou individuellement, sur un projet articulant des notions issues des programmes de deux disciplines dominantes de la série.

Des thèmes seront sélectionnés par les professeurs et les documentalistes à partir de la liste nationale de thèmes, si possible en fin d'année scolaire 1999-2000, pour que les professeurs des disciplines concernées puissent établir des propositions de sujets à présenter aux élèves à la rentrée.

Les élèves seront répartis dans différents groupes autour des sujets choisis sur les conseils des enseignants. Un carnet de bord, tenu par chaque élève, permettra de mesurer la progression du travail. Ce travail personnel encadré aboutira à une réalisation concrète qui fera l'objet d'une communication orale, lors de l'évaluation qui sera effectuée en fin d'année scolaire, à une date

arrêtée par l'équipe pédagogique. Les résultats de cette évaluation des compétences développées par les TPE seront portés sur le livret scolaire.

Pour mettre en œuvre les TPE, soixante douze heures par division seront à répartir entre les professeurs concernés (p. 134)

La définition du travail dans lequel les élèves doivent s'engager est soumise à des contraintes institutionnelles fortes qui émoussent un peu le schéma des TIPE en donnant à la question étudiée, quand elle existe, un statut ambigu. En témoigne cet extrait de l'article que l'encyclopédie *Wikipédia* consacre au sujet (« Travaux personnels encadrés », 2009) :

Les textes officiels donnent des thèmes nationaux communs ou spécifiques aux séries du baccalauréat. Suffisamment vastes, ils doivent amener le chercheur en herbe à s'interroger sur des problèmes du monde qui l'entoure. Le sujet de TPE s'obtient par déclinaison du thème national. Sa définition précise fait partie du travail de recherche. Enfin la question posée, constituant la problématique, doit servir de fil conducteur à l'activité.

La « question posée », lit-on donc ici, n'aurait pour fonction que de « servir de fil conducteur à l'activité » de l'élève, alors que l'on pourrait s'attendre à ce que cette activité *se définisse* comme étant *l'étude* – à l'aide des moyens pertinents disponibles – de la « question posée ». Soulignons à ce propos une importante contrainte, celle de la « bidisciplinarité préalable » imposée au travail demandé aux élèves, contrainte qui transparaît clairement dans ce passage d'un texte de l'Inspection pédagogique régionale de l'académie de Lyon (s.d.) :

Un objet commun aux deux disciplines partenaires devra donc être précisé avec l'aide des professeurs. La part de chaque discipline est envisagée dès la caractérisation de cet objet. On n'attend pas forcément que les élèves aient tous les acquis nécessaires pour traiter le sujet car l'objectif des TPE est aussi de développer des connaissances. Il s'agit donc de vérifier, lorsque le sujet est validé par les professeurs, que ces connaissances à développer sont accessibles aux élèves de ce niveau. Il serait d'ailleurs important que les élèves puissent faire un état de leurs acquis dans le domaine concerné par le sujet avant de commencer leurs recherches destinées à traiter ce sujet.

Il s'agit ici, si l'on peut dire, d'organiser et d'encadrer une enquête dont, pour l'essentiel, les besoins praxéologiques auraient été *décidés à l'avance*, avant même le démarrage de l'enquête – ce qui constitue, ainsi que nous le verrons, une divergence sensible avec la notion de PER. Cette inversion dans la logique de l'émergence des besoins n'est pas, à l'évidence, l'effet d'une inattention, puisque les auteurs y insistent, écrivant ainsi qu'on l'a vu (c'est nous qui soulignons) : « Il serait d'ailleurs important que les élèves puissent faire un état de leurs

acquis dans le domaine concerné par le sujet *avant* de commencer leurs recherches destinées à traiter ce sujet. »

Ces ambiguïtés se retrouvent, avec des nuances, dans les *projets pluridisciplinaires à caractère professionnel* (PPCP) qui, à la rentrée 2000, sont l'analogue en lycée professionnel des TPE introduits en lycée d'enseignement général. La circulaire définissant les PPCP (MEN, 2000b) indique ainsi :

Les projets pluridisciplinaires à caractère professionnel peuvent se présenter comme :

- des activités liées à un thème,
- la réalisation d'un produit, d'un service ou d'un ensemble de tâches professionnelles,
- la mise en œuvre d'un chantier.

La suite du propos, cependant, semble retrouver en partie le schéma des TIPE puisqu'on y voit apparaître la mention du « problème posé » :

C'est autour d'un objectif de production ou d'une séquence de service que seront identifiés :

- les savoir faire [*sic*] mobilisés, les connaissances technologiques et générales impliquées figurant dans les référentiels,
- le problème posé et les activités correspondantes,
- les ressources et contraintes du contexte professionnel.

La relation au schéma originel de base – une question *Q* que l'on étudie pour produire une réponse *R* – se retrouve s'agissant d'une création scolaire légèrement ultérieure, celle des *itinéraires de découverte* (IDD), qui, à la rentrée 2002, succèdent, au collège, à des dispositifs antérieurement mis en place au cycle central, les « parcours diversifiés » (à partir de la rentrée 1997 en classe de 5^e) puis les « travaux croisés » (à partir de la rentrée 2000 en classe de 4^e). La motivation de cette introduction est formulée ainsi (MEN, 2002) :

Les itinéraires de découverte s'inscrivent dans la continuité des parcours diversifiés et des travaux croisés qui, depuis quelques années, ont installé ou confirmé les pratiques interdisciplinaires au collège. Les itinéraires de découverte visent à généraliser ces pratiques, en les référant explicitement aux programmes des différentes disciplines.

Intégrés à la grille horaire des classes du cycle central à raison de deux heures hebdomadaires, les itinéraires de découverte contribuent à donner aux enseignements dispensés au collège un sens et une cohérence qu'ils semblent parfois avoir perdus pour un certain nombre de collégiens.

Une triple ambition doit animer la mise en œuvre de ces itinéraires de découverte :

- donner davantage de sens aux contenus d’enseignement et développer l’autonomie des élèves dans leur travail scolaire ;
- contribuer à la valorisation des goûts et aptitudes des élèves, par l’exploration de différents domaines d’étude, et faciliter ainsi la préparation des projets d’orientation ultérieurs ;
- élargir l’espace d’initiative des équipes pédagogiques à travers la conception des thèmes et sujets d’étude ainsi que le suivi et l’évaluation des travaux des élèves.

On voit ainsi réapparaître le thème du « sens » : des IDD, on attend qu’ils « contribuent à donner aux enseignements dispensés au collège un sens et une cohérence qu’ils semblent parfois avoir perdus pour un certain nombre de collégiens » et qu’ils donnent « davantage de sens aux contenus d’enseignement ». C’est là un thème qui était présent déjà dans les textes gouvernant les « parcours diversifiés » et les « travaux croisés ». La circulaire de rentrée 2000 (MEN, 2000a), déjà citée, qui introduit les travaux croisés en 4^e, le rappelle en ces termes :

Il est apparu que le cloisonnement des enseignements disciplinaires constituait un obstacle, pour certains élèves, à la compréhension du sens général de leurs études et à la perception du lien entre ces études et le monde environnant. C’est la raison pour laquelle a été offerte aux équipes pédagogiques la possibilité d’organiser l’an passé, en classes de 5^e et de 4^e, des « parcours diversifiés » prenant appui sur les intérêts des élèves pour les aider à assimiler, grâce à une méthode pédagogique originale, certains points des programmes des disciplines impliquées dans ces projets. Cette formule est maintenue en classe de 5^e, où elle a fait ses preuves ; elle sera renforcée, à partir de la rentrée 2000, au niveau de la classe de 4^e pour laquelle sont créés des « travaux croisés ».

Dans un document diffusé en son temps dans les collèges de l’académie de la Réunion (« Les parcours diversifiés en mathématiques », 1997), on rencontre déjà une telle insistance. Les parcours diversifiés, y lit-on, « relèvent de la pédagogie du détour qui donne sens à la formation et fait saisir aux élèves la finalité des apprentissages ». Le document note ensuite que « beaucoup d’élèves font de grosses erreurs car ils utilisent des notions qui sont vides de sens pour eux », avant de proposer comme l’un des objectifs des parcours diversifiés de « redonner du sens à des notions essentielles (périmètre-aire-volume, fraction, proportionnalité, symétrie...) ». Bien entendu, comme dans l’ensemble des dispositifs évoqués jusqu’ici, d’autres objectifs sont évoqués : ainsi en va-t-il de « l’autonomie » que l’élève devrait conquérir dans le travail scolaire (et mathématique en particulier). Les motifs se croisent et se mélangent : la circulaire de la rentrée 2000, par exemple, précise qu’il convient de « marquer, sur l’ensemble du collège, la volonté de valoriser le travail personnel des élèves et [de] donner du sens à cette démarche en s’appuyant sur l’interdisciplinarité »

ainsi que de « mettre en œuvre au lycée, comme au collège, un enseignement plus individualisé garant de l'apprentissage de l'autonomie nécessaire à chaque élève, et du développement des capacités d'initiative ». En même temps on voit poindre la volonté de donner une formation plus adéquate aux exigences des sociétés contemporaines : à propos de l'école primaire, le même texte indique que « la formation des élèves par des pratiques actives d'investigation raisonnée, à partir de l'observation d'objets et de phénomènes du monde vivant ou technique, est une nécessité dans le monde et la culture actuels ».

Le document déjà cité à propos des parcours diversifiés formule diverses propositions à l'attention des enseignants de mathématiques de collège. L'une d'elles est la pratique des *problèmes ouverts*, auquel ce document donne pour objectif, notamment, d'amener les élèves à « percevoir le sens du travail effectué en cours de mathématiques et la cohérence des différents savoirs qui y sont rencontrés ». On parle classiquement, en français, de « question ouverte » (ce que le TLFi définit comme une « question à laquelle une réponse définitive n'a pas été donnée »). La langue anglaise fait de même : le *OneLook Dictionary* (<http://www.onelook.com/>) recense ainsi, parmi différents emplois de l'adjectif *open*, cette acception : “not brought to a conclusion; subject to further thought (‘An open question’)”. Les mathématiciens et les scientifiques en général parlent, eux, de *problèmes ouverts* (“Open problem”, 2009). C'est cette terminologie que reprend, dans les années 1980, une équipe de l'IREM de Lyon dont l'un des animateurs est le mathématicien et didacticien Gilbert Arsac et dont le travail donne lieu à la publication d'une première brochure en 1984. Un ouvrage intitulé *Problème ouvert et situation problème* paraît en 1988 à l'IREM de Lyon, cosigné par Gilbert Arsac, Gilles Germain et Michel Mante. Vingt ans plus tard environ paraît un nouvel opus, sous le titre *Pratiques du problème ouvert* (Arsac & Mante, 2007), dont la présentation constitue un résumé utile de la problématique du problème ouvert dans l'enseignement scolaire des mathématiques.

Le problème ouvert est une situation d'enseignement qui place l'élève dans la position d'un mathématicien confronté à un problème dont il ne connaît pas la solution. Il devra lui aussi mettre en œuvre une « démarche scientifique » : essayer, conjecturer, tester, prouver. Cette pratique introduite au collège il y a plus de vingt ans a été étendue aux écoles primaires, aux classes de SEGPA, aux lycées, aux centres de formation. Vous trouverez ici une présentation détaillée des problèmes ouverts avec des exemples d'utilisation, des rapports d'expérimentations, de nombreux énoncés et des propositions d'organisation du travail dans les classes des premier et second degrés.

Pour illustrer brièvement la notion de problème ouvert, nous emprunterons à un document proposé sur le site Web de l'académie de Nice sous le titre *Exemples de problèmes ouverts pour le cycle III*. Tout d'abord, le texte avance une quasi-définition de la notion de problème ouvert :

Caractérisation

problème inédit (que l'élève n'a pas appris à résoudre),
énoncé court, sans difficulté de compréhension de la situation évoquée,
l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution,
donc la solution n'est pas immédiate...
mais elle est possible.

Le document donne ensuite, à la pratique des problèmes ouverts, les objectifs suivants :

Objectifs

activité de recherche

essayer, s'organiser, gérer des essais successifs conjecturer, faire des hypothèses
tester une hypothèse, formuler une solution, argumenter

attitude de recherche

oser être original, autonome, travailler en commun, échanger.

Suit une liste d'exemples de problèmes ouverts « au cycle 3 ». Nous en extrayons, à titre d'illustration, le suivant :

17) Plusieurs groupes d'élèves arrivent pour une promenade en bateaux. Les élèves d'un même groupe veulent absolument rester ensemble pendant la promenade.

Un bateau ne peut transporter que 150 élèves, et il y a seulement 3 bateaux. Voici le nombre d'élèves dans les groupes : 25 – 50 – 65 – 70 – 85 – 100 – 55.

Comment faut-il mettre les groupes dans les bateaux ?

Amorçons, sur cet exemple, une première comparaison avec ce que proposera la TAD sous le nom d'*activité d'étude et de recherche* (AER). Dans une AER, la rencontre avec une tâche problématique démarre avec l'évocation d'une tâche d'un type culturellement familier, notée de façon générique à l'aide du signe ✓ et désignée comme « tâche "coche" ». Ici, la tâche ✓ consiste à distribuer les différents groupes d'élèves entre les différents bateaux disponibles, au nombre de trois. La tâche problématique, notée *t*, consiste alors à réaliser cette opération de façon que 1) chacun des bateaux ne transporte pas plus de 150 élèves, 2) que tous les groupes d'élèves soient embarqués. Le « problème » dont est porteuse la tâche *t* a une solution (relativement) facile : on peut embarquer sur un premier bateau les groupes d'effectif 100 et

50 respectivement ; sur un deuxième bateau, les groupes d'effectif 85 et 65 ; enfin, sur le troisième bateau, les groupes d'effectif 25, 70 et 55. Mais si l'on s'arrêtait là, on n'aurait fait qu'accomplir avec bonheur une tâche isolée, erratique, au risque d'être mis en échec, un jour prochain, par une seconde tâche *t' du même type*. Pour cette raison, la notion d'AER intègre l'idée que, ni au plan du fonctionnement des institutions « ordinaires » de la société (c'est peut-être tous les jours, voire plusieurs fois par jour, que, en un certain embarcadère, on doit « résoudre le problème » que posent les tâches du même type que *t*), ni au plan de la science, on ne peut délibérément en rester là. Il ne s'agit donc pas simplement de *réaliser t* : il convient de construire une technique τ permettant de réaliser (en principe) les tâches du type *T* dont *t*, soit la tâche problématique rencontrée à propos de la suite finie d'entiers 25, 50, 65, 70, 85, 100, 55, *n'est qu'un spécimen*. Plus exactement, il convient d'élaborer une praxéologie $[T / \tau / \theta / \Theta]$ qui précisera notamment sous quelles conditions une suite d'entiers $n_1, n_2, \dots, n_p$ (où p est un entier ≥ 1), représentant les effectifs de p groupes d'élèves, peut permettre ou non une distribution adéquate entre les trois bateaux. Il est clair par exemple que la suite 150, 150, 150 le permet mais que la suite 100, 100, 100, 100 (dont la somme est pourtant inférieure au maximum théorique de 450) ne le permet pas. En ce sens, le « problème » posé par *t* n'est pas celui de réaliser la tâche singulière *t* mais bien celui d'élaborer une praxéologie $[T / \tau / \theta / \Theta]$ adéquate afin de pouvoir réaliser de façon justifiée les tâches du type *T*. Il se peut, il est vrai, que, à un moment donné, on n'y réussisse pas, et qu'on ne parvienne à résoudre le problème que dans le cas d'un petit nombre de tâches particulières du type *T* ; cela voudra dire alors que le problème de l'élaboration d'une praxéologie $[T / \tau / \theta / \Theta]$ convenable *reste ouvert*.

Les dispositifs des TIPE (en CPGE), des TPE (en lycée), des PPCP (en lycée professionnel), des IDD (en collège) sont présents officiellement dans les cursus de formation correspondants. Conçus d'emblée comme pluridisciplinaires, ils n'ont pas à s'intégrer dans la classe de mathématiques ou dans quelque autre classe « monodisciplinaire ». Il en va autrement du dispositif des « problèmes ouverts », créé (ou du moins regardé par beaucoup) comme un adjuvant d'un enseignement des mathématiques en « perte de sens ». Dans une page Web déjà citée, intitulée *Démarche scientifique, problème ouvert et (mauvaise) humeur...*, Serge Mehl écrit ainsi :

La notion de problème ouvert trouve aujourd'hui sa place en pédagogie (comme, depuis de nombreuses années, à l'IREM de Lyon et de Grenoble). Son objectif est d'initier à la démarche scientifique dans la recherche, par petits groupes, de la solution d'un problème dont l'énoncé est court, formulé en langage ordinaire, compréhensible par tous, sans indications de

méthode ou solution, permettant de faire des essais, de conjecturer, et ne devant faire appel, pour sa résolution, qu'à des outils adaptés au niveau et aux savoirs du public concerné.

Mais il ajoute plus loin ceci :

Il n'est pas dit ici que l'on doit limiter l'enseignement des mathématiques qu'à ce type de recherche : principalement au collège, les questions doivent, à part égale, être ouvertes (elles ne renferment pas le résultat) et fermées (elles renferment le résultat).

Ce qui est présenté ici comme une « part » – la moitié, en gros – de l'activité mathématique d'une classe est pourtant ce qui devrait être depuis longtemps, d'après les instructions officielles relatives à l'enseignement des mathématiques, la règle ordinaire de la classe de mathématiques, règle dont l'emblème dans les programmes du collège est, depuis plusieurs décennies, le mot d'*activité* (que l'on retrouve dans l'expression d'activité d'étude et de recherche adoptée par la TAD). L'enseignement des mathématiques semble ainsi aujourd'hui se trouver dans un état historiquement « intermédiaire », sans doute instable, et son avenir paraît incertain. À cet égard, le tableau d'ensemble que nous avons tenté de brosser rapidement ici serait incomplet si nous ne mentionnions encore, comme un vecteur d'évolution situé à la périphérie de la classe de mathématiques, le mouvement *MATh.en.JEANS* (ce qui s'explicite en « Méthode d'Apprentissage des Théories mathématiques en Jumelant des Établissements pour une Approche Nouvelle du Savoir »), qui, depuis l'année 1989-1990, à l'instigation notamment de Pierre Duchet et de Pierre Audin, s'efforce de transposer au niveau du collège et du lycée, en matière mathématique, les pratiques de la recherche et du débat au sein d'une communauté scientifique (Duchet & Audin, 1996 ; « MATh en JEANS », 2008). Sans aller plus loin sur ce sujet en lui-même très riche, nous pouvons y voir un autre signe tangible de la pression croissante pour faire advenir un changement qui tarde à se faire.

CHAPITRE 2

La « perte de sens » et la notion de PER

2.1. Perte de sens, raisons d'être, questions

Rappelons ici les quatre questions qui, au chapitre 1, ont orienté notre enquête relative au phénomène de « la perte de sens » :

- 1) qu'entendent par « perte de sens » (en mathématiques) les auteurs qui s'expriment sur ce sujet ? À quels signes reconnaissent-ils qu'il y aurait « perte de sens » ?
- 2) comment analysent-ils ce phénomène (en termes d'origines, ou de causes, ou de conditions et contraintes) ?
- 3) que proposent-ils pour lutter contre la perte de sens telle qu'ils l'identifient ?
- 4) quelle réception ces propositions ont-elles, avec quels effets, et pourquoi ?

Dans ce chapitre, nous nous référerons à des auteurs – dont certains ont déjà été mentionnés – travaillant sur la question des PER : il s'agit essentiellement de membres (ou de membres associés) des équipes de recherche animées respectivement par Yves Chevallard (UMR ADEF, Marseille), par Marianna Bosch (Université Ramon Llull, Barcelone) et Josep Gascón (Université Autonome de Barcelone), enfin par Yves Matheron (INRP). Quelles réponses ces auteurs apportent-ils aux trois premières des questions ci-dessus ? C'est ce que nous tenterons de préciser dans ce chapitre.

Selon ces chercheurs, tout d'abord, la perte de sens des objets mathématiques enseignés aurait tout à la fois pour cause et pour principale manifestation l'évanouissement des *raisons d'être** de ces objets. À cet égard, Yves Chevallard (2007a) n'hésite pas à évoquer une véritable « nécrose épistémologique » :

L'enseignement des mathématiques tend aujourd'hui à se réduire à une visite de monuments plus ou moins dégradés, que l'on révère encore parfois, que l'on restaure aussi, mais dont la vie s'est retirée au point qu'on en a oublié les usages vivants. Visite tantôt sévère (comme le voudraient les fétichistes d'une certaine école d'avant-hier, qui prétendent par là « sauver les maths ») et tantôt badine, désinvolte, voire niaise (comme la veulent, dérisoirement, certains

modernistes attardés). Devant ce tableau, le verdict s'énonce simplement : nécrose épistémologique.

Dans la même veine, Berta Barquero, Marianna Bosch et Josep Gascón (2007) écrivent de leur côté :

One of the drawbacks of such organization is that it hides the problematic questions which constitute the rationale of the taught notions, properties, theorems and techniques. The contents are reduced to a finite set of pre-existent “works” to study, but generally the questions that motivated the construction of these contents disappeared from the school’s culture.

Non seulement les raisons d’être de beaucoup d’objets enseignés auraient été « perdues », mais en outre la *question même* des raisons d’être et de l’utilité des objets enseignés se trouverait occultée. De tels « oublis » auraient des conséquences plus que néfastes dans le tableau que l’on peut brosser de l’école d’aujourd’hui, ainsi que le précise Yves Chevallard dans le texte déjà cité :

La naturalisation des œuvres humaines – qui en fait des monuments à visiter, à honorer, à vénérer même pour certains et, bien sûr, à *fuir* pour d’autres – est corrélatif de *l’oubli* de leurs raisons d’être, et même de la *question* de leurs raisons d’être. L’absence de questionnement des œuvres – et en particulier des savoirs – sur leurs raisons d’être ne permet qu’une entrée *fictive* dans la culture, et fait des œuvres des *idoles* (du grec *eidos*, forme) que d’aucuns vénèrent non sans agressivité à l’encontre de ceux qui se refusent à ce rite absurde. L’idolâtrie, le fétichisme des œuvres et des savoirs a, en quelques décennies, créé un paysage scolaire ravagé, où l’on étudie des œuvres « privées de sens », comme on dit, qui ne seraient plus désirables qu’en elles-mêmes – en soi et pour soi – et non pour ce qu’elles permettraient de comprendre et de faire en le comprenant.

Trop souvent, donc, aucune explication n’est explicitée dans l’enseignement donné quant à l’origine des problèmes posés et aux raisons d’être des objets enseignés. Pourquoi traite-t-on telle ou telle question ? D’où naît tel problème proposé ? Pourquoi étudie-t-on telle notion ? C’est à faire vivre un tel questionnement que s’attache notamment l’équipe AMPERES (Matheron et al., 2007) :

Il y a urgence à redonner du sens aux mathématiques enseignées dans le secondaire. Trop souvent, des objets mathématiques, leurs propriétés, sont enseignés sans que l’on fasse apparaître l’intérêt de leur étude. Par exemple, au collège puis au lycée, le triangle fait l’objet

d'un enseignement qui couvre une importante partie du programme de géométrie, mais on peut se demander quelles sont les raisons qui motivent tant d'attention accordée à cet objet.

L'exemple esquissé, celui du triangle, objet à la fois scolairement familier et mathématiquement mystérieux, est un classique, ainsi que l'illustre entre autres le passage suivant (Chevallard, 2005) :

L'enseignement des mathématiques est un vieil enseignement, qui peine à trouver un second souffle. De quoi souffre-t-il ? Essentiellement de la fuite, de l'exténuation du sens. Les objets enseignés condensent des réponses à des questions *que nous avons perdues*. Il faut retrouver ces questions. Pourquoi s'intéresse-t-on aux triangles ? Pourquoi s'évertuer à simplifier les fractions ou à récrire une expression numérique ou littérale dans une forme canonique ? Pourquoi s'intéresser aux propriétés des figures ? Autant de questions qui ont perdu leurs réponses dans une culture scolaire devenue muséographie sans vie.

Le tableau de la dégradation de l'état actuel de l'enseignement peut encore être développé, ainsi que le fait Yves Matheron (2009) dans le passage suivant :

Lorsqu'on observe cet enseignement depuis la France, quelques phénomènes peuvent être relevés qui contribuent à expliquer pour partie cette crise : « perte » des questions fondatrices de divers domaines des mathématiques induisant en retour une perte de sens des mathématiques chez les élèves, cloisonnement thématique qui induit une forme parcellaire de l'enseignement découpé en chapitre duquel la cohérence et les liens échappent, recours massif au recopiage plus ou moins arrangé et la passation en classe d'activités dites « introductives » trouvées dans les manuels et le plus souvent non signifiantes, purement formelles.

Il apparaît donc essentiel de réformer l'enseignement actuel. Dans ce but, l'équipe AMPERES (Matheron et al., 2007) propose de restaurer les raisons motivant l'attention accordée aux objets mathématiques enseignés « à travers une dynamique d'études et de recherches qui permette de les faire rencontrer et vivre par les élèves dans l'enseignement des mathématiques du secondaire ». Dans cette même perspective, Yves Chevallard (2005) souligne fortement le rôle que doivent jouer les *questions*, seules susceptibles d'aider à rompre avec une « culture scolaire devenue muséographie sans vie » :

C'est cette culture qu'il faut restaurer et faire revivre dans les classes. Comment cela ? En mettant au principe de l'apprentissage des mathématiques l'étude de *questions*, que l'on prend au sérieux (au contraire d'une certaine culture d'opérette qui badine avec un concret sans

consistance épistémologique) et auxquelles on s'efforce véritablement de répondre. De ce travail émergent les objets mathématiques, qui naissent alors, non de façon formelle et immotivée, mais poussés en avant par le rôle qu'ils jouent dans une certaine aventure intellectuelle.

Un changement radical est ainsi indispensable, qui passe fondamentalement par une redécouverte, voire une réinvention, des raisons d'être du contenu à enseigner. « Il ne s'agit plus de visiter des mathématiques, écrit ainsi Yves Chevallard (2005), mais d'en “faire”, c'est-à-dire d'en revivre les raisons d'être. » Une « révolution épistémologique et didactique » (Chevallard, 2007a) est ainsi jugée nécessaire, qui mette « au principe de l'apprentissage des mathématiques l'étude de questions que l'on prend au sérieux [...] et auxquelles on s'efforce véritablement de répondre ». La solution proposée à ce grand problème, on va le voir, prendra la forme de dispositifs didactiques développés par Yves Chevallard et connus aujourd'hui, familièrement, à travers leur sigle : les AER et les PER.

2.2. La notion d'AER et les raisons d'être

Nous avons déjà évoqué la notion d'AER, qui trouve son inspiration dans la théorie des situations didactiques (TSD) de Guy Brousseau. On y suppose le projet de réaliser une tâche ✓ d'un type culturellement familier, la tâche « coche », dans l'accomplissement de laquelle – selon une *technique* supposée elle-même culturellement familière – va se rencontrer une tâche *t problématique* – c'est-à-dire une tâche que l'on croit ne pas savoir accomplir. La rencontre avec *t* est censée se placer délibérément dans une problématique d'étude du type de tâches *T* auquel on rattachera *t* après avoir construit à partir de *t* ce type de tâches *en principe jamais encore rencontré*. Comme nous le notions au chapitre 1, il ne s'agit donc pas simplement de réaliser *t* de façon purement empirique, mais de construire de façon justifiée une technique τ permettant de réaliser (en principe) les tâches du type *T* dont *t* n'est qu'un spécimen parmi d'autres ; il s'agit donc, finalement, d'élaborer une praxéologie de la forme $[T / \tau / \theta / \Theta]$.

Dans ce qui suit, nous nous appuyerons notamment sur le contenu des Unités 6 et 7 du *Cours de didactique fondamentale 2008-2009* rédigé par Yves Chevallard à l'intention des étudiants de 1^{re} année du master de sciences de l'éducation de l'Université de Provence (Chevallard, 2009a). Nous ajouterons à cela des développements plus récents, présents dans le cours donné par le même auteur à la 15^e école d'été de didactique des mathématiques tenue à Clermont-Ferrand du 16 au 23 août 2009 (Chevallard, 2009c). Qu'entend-on par AER ? Une AER est à l'origine une organisation didactique précisant un ensemble de conditions *C* dont la réalisation dans une classe, sous l'impulsion et la direction d'un enseignant *y* ou, plus

généralement, d'une équipe d'enseignants Y , va engendrer la rencontre des élèves X avec une certaine entité praxéologique $\wp$, et cela à l'occasion de l'étude d'une question déterminée, Q . En d'autres termes, l'AER provoque la formation, au sein d'une classe qu'on notera $[X, Y]$, d'un système didactique noté $S(X; Y; Q)$ dont la finalité est la production d'une certaine réponse $R^\heartsuit$, ce qu'on écrit ainsi :

$$S(X; Y; Q) \rightsquigarrow R^\heartsuit.$$

Cette « formule » est appelée le *schéma herbartien réduit*, l'adjectif « herbartien » faisant référence au philosophe et pédagogue allemand Johann Friedrich Herbart (1776-1841). L'entité praxéologique visée, $\wp$, peut être (mais n'est pas toujours) la réponse $R^\heartsuit$ elle-même. (Le symbole $\wp$, lu simplement « p », est connu en mathématiques comme le « p de Weierstrass ».) Dans le processus d'étude de Q , cependant, d'autres entités praxéologiques sont rencontrées : celles qui composent le *milieu didactique*, constitué de l'ensemble des ressources mobilisées par la classe $[X, Y]$ pour étudier la question Q , produire la réponse $R^\heartsuit$ et la valider. Ce complexe praxéologique (dont on verra plus loin la composition type) est noté M et son rôle est rendu visible dans le *schéma herbartien semi-développé* que voici :

$$[S(X; Y; Q) \Rightarrow M] \rightsquigarrow R^\heartsuit.$$

Cette dernière formule s'interprète ainsi : le système didactique $S(X; Y; Q)$ « fabrique » le milieu M (ce que note la flèche $\Rightarrow$) à partir de ressources déjà existantes dans ses environnements internes et externes ou de ressources créées en son sein ; et c'est en « travaillant » ce milieu qu'il va élaborer et valider $R^\heartsuit$ (ce que note la flèche $\rightsquigarrow$). L'entité praxéologique visée, $\wp$, peut être alors l'un des constituants du milieu M . On peut réunir les deux cas de la façon suivante :

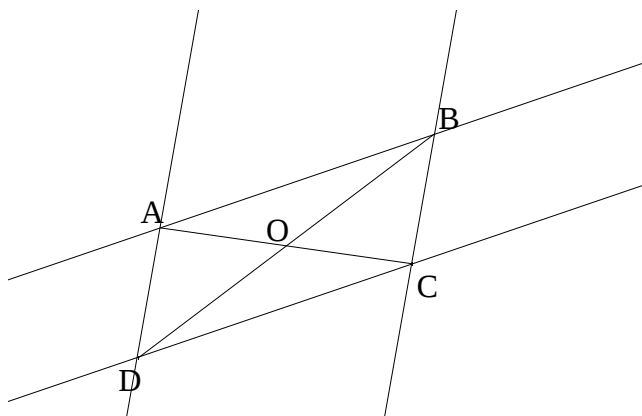
$$\wp \in M \cup \{ R^\heartsuit \}$$

Nous donnerons de tout cela un exemple élémentaire, celui d'une AER relative à une entité praxéologique qui est, en l'espèce, une propriété mathématique traditionnellement enseignée en classe de 5^e :

θ_1 . Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.

On définit un parallélogramme comme un quadrilatère dont les deux paires de côtés opposés sont portés par des droites parallèles, comme l'illustre la figure ci-dessous : le point O , point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$, est le milieu de chacune d'elles (on a $OA = OC$ et $OB = OD$). On notera que, en revanche, les diagonales *ne sont pas*, en général, de même

longueur : on démontre qu'il n'en est ainsi que lorsque le parallélogramme est un *rectangle* (en mathématiques, un rectangle est regardé comme un cas particulier de parallélogramme).



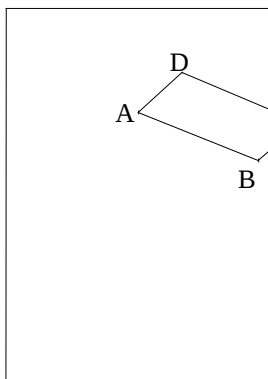
La propriété θ_1 caractérise les parallélogrammes parmi les quadrilatères ; en d'autres termes, la proposition réciproque de la proposition θ_1 , que nous noterons θ_1^r , est donc également valide :

θ_1^r . Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme.

L'AER considérée ici, cependant, ne vise qu'à faire rencontrer (et utiliser) la propriété θ_1 , et non sa réciproque θ_1^r . Dans une réalisation effectivement observée le 9 février 2006, la professeure – désignée ci-après par la lettre P, pour des raisons d'anonymat – avait choisi de formuler ainsi la question Q :

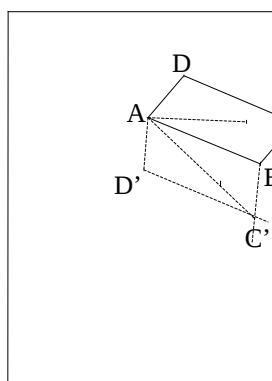
« Le sommet C du parallélogramme ABCD est sorti des limites de la feuille. [Comment] Tracer la partie visible de la droite (AC). »

Cet énoncé se référait à la figure suivante.

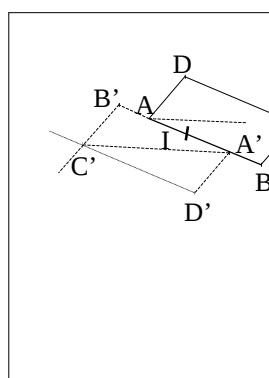


L'issue espérée était celle-ci : bien qu'ils ne connaissent pas à l'avance la propriété θ_1 , des élèves, devinant – pour des raisons de « symétrie » – que la diagonale [AC] doit passer par le

milieu O de [BD], proposeraient de marquer ce point O afin de tracer alors la partie de la demi-droite [AO) figurant sur la feuille. C'est bien ce qui devait se produire au cours de la séance observée, même si des techniques alternatives furent également proposées par certains élèves. À l'exception de la technique reposant sur l'énoncé technologique θ_1 , ces techniques faisaient appel à des praxéologies mathématiques antérieurement étudiées (et donc connues). L'une d'elles consistait par exemple à utiliser la symétrie axiale étudiée en 6^e : comme le montre la figure ci-après, elle conduit à tracer le segment [AD'] symétrique de [AD] par rapport à la droite (AB), puis à construire le point C' comme intersection de la parallèle à (AB) passant par D' et de la parallèle à (AD') passant par B, ensuite à tracer la diagonale [AC'], enfin à construire la droite symétrique de (AC') par rapport à (AB), ce qui donne la diagonale demandée.



Une autre technique évoquée tirait profit de la symétrie centrale, étudiée en 5^e, selon une technique non explicitée durant la séance mais que la figure ci-après illustre (la symétrie se faisant par rapport à un point I bien choisi de [AB]).



La conduite d'une AER aboutissant, comme ici, à l'élaboration d'une praxéologie de la forme $[T / \tau / \theta / \Theta]$, s'articule, précise la TAD, en différents *moments didactiques* (ou *moments de l'étude*), que nous présenterons rapidement dans le cas de l'AER du « parallélogramme

tronqué ». Le *premier moment didactique* est le moment de la première rencontre avec le type de tâches T – à travers la rencontre, ici, avec la tâche problématique t consistant à « tracer la partie visible de la droite (AC) ». Une telle rencontre soulève de nombreuses difficultés : elle peut être durablement « ratée », la classe (ou du moins une partie des élèves) passant à côté du problème proposé, sans bien le comprendre. Nous reviendrons là-dessus car, comme nous le verrons, ces difficultés seront en partie à l'origine de la notion de PER. Le *deuxième moment didactique* est le moment de l'exploration du type de tâches T et de l'émergence de la technique τ . Exceptionnellement, nous reproduisons ici à titre d'illustration la partie du compte rendu de la séance observée où la technique fondée sur θ_1 émerge.

Il est 11 h 32. Les élèves travaillent en silence. P circule lentement. Peu à peu des élèves se manifestent auprès de P. Un élève dit à voix basse : « Ça y est, j'ai trouvé ! J'ai trouvé ! » P s'adresse bientôt à la classe : « Bon, on va partager les solutions. » Elle sollicite un élève : « Explique-nous ce que tu as fait. » L'élève a... ajouté une feuille pour tracer le parallélogramme. Une élève, interrogée, va droit au but : « On trace le segment [DB], on prend le milieu, on le nomme, et après on trace (AI), si I est le milieu... » Plusieurs ont trouvé cette solution. Une élève a fait comme le premier élève interrogé. Un autre élève parle de l'angle $\widehat{DAB}$. P : « Mais où le tracer l'angle $\widehat{BCD}$? » Un élève encore propose une tentative qui n'aboutit pas. Un autre veut faire la symétrie par rapport à (AD). P indique qu'on verra cette idée demain : pour le moment, on examine la solution par le milieu de [DB]. Après un court dialogue à ce sujet, P écrit [au tableau] :

Les diagonales [AC] et [DB] se coupent,
en un point O

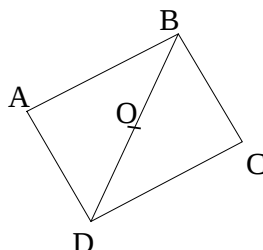
P : « Il se balade sur le segment ? Il est où ? » « Au milieu », répond une voix. Un autre élève intervient ; il a compris la solution, mais il semble qu'il veuille « placer le point C », à partir de A et O. P fait reformuler le problème : il s'agit de tracer la droite (AC), pas le point C. Un élève encore parle de « trouver où est le point C ». P : « Est-ce que c'est ça le problème ? »

Des élèves en chœur : « Non ! » Mais certains semblent avoir un peu de mal à l'entendre.

Le *troisième moment didactique* est le moment *technologico-théorique*, qui voit la création (ou l'identification) du bloc $[\theta / \Theta]$. Ici, la technologie θ est faite essentiellement (mais non pas exclusivement !) de l'énoncé technologique θ_1 , qu'il reste cependant à justifier (il n'a au départ que le statut de conjecture « intéressante »). Classiquement, cela se fait, en mathématiques, en montrant que l'on peut déduire l'énoncé en question d'énoncés tenus pour vrais (parce qu'ils ont été antérieurement démontrés ou sont regardés comme des axiomes) :

on dit alors que l'on a donné une *démonstration* de l'énoncé en cause. Ici, une telle démonstration (utilisant des énoncés connus de la classe) pourrait être la suivante :

Désignons par O le milieu de la diagonale [BD] (voir la figure ci-après) ; la symétrie de centre O transforme le point B en le point D et les droites (BA) et (DA), respectivement, en les droites parallèles (DC) et (BC).



Cette symétrie transforme donc le point d'intersection de (BA) et (DA), soit A, en le point d'intersection de (DC) et (BC), soit C. Il en résulte que A et C sont symétriques par rapport au point O et donc que O est le milieu de la diagonale [AC], CDFD.

Dans la réalisation observée, la professeure choisit de ne pas démontrer la propriété θ_1 (les instructions officielles lui en laissent la possibilité), mais de la vérifier expérimentalement, opération qui s'effectuera dans la classe de manière spectaculaire et convaincante ; c'est ici l'occasion de souligner un élément *théorique* – appartenant donc à ce qui a été noté ci-dessus Θ – qui, naturalisé en géométrie élémentaire, est essentiel en géométrie euclidienne (Chevallard, 2009a, Unité 6, p. 22) :

Un élément *théorique* sous-jacent – ici comme ailleurs en géométrie « élémentaire » – est que les propriétés d'une figure *sont indépendantes de sa taille* (et de sa position dans l'espace), en sorte qu'il suffit de procéder à l'expérimentation sur des figures qui peuvent être tracées à l'intérieur d'une feuille de papier (ou affichées à l'écran d'un ordinateur) [pour pouvoir conclure d'une façon générale].

Les trois premiers moments de l'étude – première rencontre avec T , exploration de T et émergence de τ , création du bloc technologico-théorique [θ / Θ] – contribuent de façon essentielle à la construction de la praxéologie [$T / \tau / \theta / \Theta$], qui est la réponse $R^\heartsuit$ à la question Q proposée. Mais le travail entrepris n'est pourtant pas achevé : aux trois moments envisagés, il faut encore en ajouter trois autres, dont nous empruntons ici la présentation au *Cours de didactique fondamentale* déjà cité (Chevallard, 2009a, Unité 6, pp. 23-24) :

d) Le *quatrième moment* est le moment du travail de l'organisation praxéologique créée (ou en cours de création), où l'on fait travailler les éléments praxéologiques élaborés pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on

travaille sa propre maîtrise de cette organisation praxéologique, en particulier de la technique τ élaborée.

e) Le *cinquième moment* est le moment de *l'institutionnalisation*, où l'on met en forme l'organisation praxéologique $[T / \tau / \theta / \Theta]$ (ou $[T, T', T''... / \tau, \tau', \tau''... / \theta / \Theta]$) en précisant chacun de ses composants, et en « l'intégrant » à l'organisation praxéologique éventuellement déjà institutionnalisée.

f) Le *sixième moment* est le moment de *l'évaluation*, où l'on évalue sa maîtrise de l'organisation praxéologique créée, mais aussi où l'on évalue cette organisation praxéologique elle-même, c'est-à-dire où l'on tente d'estimer la valeur que l'on peut attribuer à l'une et à l'autre dans la perspective d'un certain projet – plus vaste – d'élaboration praxéologique. On soulignera donc que, à l'instar des autres moments didactiques, l'évaluation *n'est pas* un artefact scolaire, mais participe de l'activité humaine en général, où qu'elle prenne place. Qu'est-ce que cela vaut pour ce qu'on veut en faire ? Telle est la question cardinale à cet égard, à tous propos et en tout lieu.

Lorsque la réponse $R^\heartsuit = [T / \tau / \theta / \Theta]$ a ainsi été *travaillée*, puis *institutionnalisée*, enfin *évaluée*, lorsque, le cas échéant, les trois derniers moments de l'étude ont relancé temporairement le travail relevant des trois premiers moments – l'évaluation a pu montrer, par exemple, que le bloc $[\theta / \Theta]$ n'était pas satisfaisant, suscitant alors une reprise du moment technologico-théorique –, le processus d'étude et de recherche engendré par l'étude de la question Q est, en principe, achevé.

En quoi la notion d'AER répond-elle aux inquiétudes concernant la « perte de sens » des entités praxéologiques enseignées $\wp$? (Dans ce qui précède, $\wp = \theta_1$.) Notons d'abord la réponse apportée à la première des quatre questions rappelées plus haut : qu'entendent par « perte de sens » (en mathématiques) les auteurs qui s'expriment sur ce sujet ? À quels signes reconnaissent-ils qu'il y aurait « perte de sens » ? La « perte de sens » se manifesterait, selon les chercheurs travaillant sur la question des AER et des PER, par l'absence, dans la culture mathématique scolaire, de réponses à la question « À quoi sert $\wp$? », c'est-à-dire encore à la question : « Quelles sont les raisons d'être de la présence de $\wp$ dans le curriculum mathématique ? » C'est là un phénomène qu'illustre clairement l'exemple du triangle : quelles sont les raisons d'être de l'étude scolaire des propriétés du triangle et par exemple de la propriété de *concours des hauteurs* d'un triangle ?

Passons à la deuxième question, envisagée ici à propos des mêmes auteurs : comment ceux-ci analysent-ils le phénomène de « perte de sens » en termes d'origines, ou de causes, ou de conditions et contraintes ? Yves Chevallard a plusieurs fois abordé cette question, à

laquelle il apporte, dans le passage suivant (Chevallard, 2007b), une réponse explicite :

L'étude de la question Q conduit à une réponse R validée par la culture, par la société, par l'École ; si X est le groupe des élèves de la classe, y son professeur, la chose s'écrira :

$$S(X, \{ y \} ; Q) \mapsto R,$$

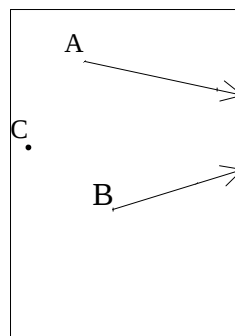
« formule » que l'on retouchera un peu plus loin. Le programme d'études, lui, s'écrit alors véritablement sous la forme $P = (Q_i ; R_i)_{1 \leq i \leq n}$. Mais bientôt, par un court-circuit culturel et didactique, « étudier Q » est regardé comme un synonyme inutile d'une expression qui, institutionnellement, la supplante : « apprendre R ». Alors, sans encore que R perde tout à fait son statut de réponse, les questions commencent à s'effacer : le programme d'études P doit désormais s'écrire plutôt sous la forme $P = (? ; R_i)_{1 \leq i \leq n}$. C'est ensuite que, en une involution sans doute différenciée (elle n'atteint pas également toutes les disciplines scolaires ni, en leur sein, toutes les praxéologies à enseigner), un refoulement s'opère : les réponses R cessent d'être regardées comme telles et se trouvent hypostasiées en *œuvres* de la culture ayant valeur en soi et pour soi, œuvres dont les *raisons d'être* – d'être là, dans la culture, mais aussi dans le programme scolaire – *se sont perdues*. Un programme scolaire devient ainsi une suite $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n$ d'œuvres à étudier : on doit l'écrire désormais sous la forme $P = (\mathfrak{R}_i)_{1 \leq i \leq n}$. Alors que la réponse R était socialement précieuse parce que, précisément, elle répondait à la question Q , l'œuvre $\mathfrak{R}$ est considérée maintenant *pour elle-même* : on la visite avec déférence comme un monument qui a perdu sa fonctionnalité, que l'on honore formellement, et qui n'a plus que de rares emplois, adventices, opportunistes, minuscules. C'est là une tendance que j'ai nommée la *monumentalisation* des savoirs (et, plus largement, des praxéologies), qui, de la part des institutions comme des personnes, peut aller jusqu'à une passion sombrement *fétichiste*.

Dans des textes récents (Chevallard, 2009b, 2009c), le même auteur dit voir l'origine du phénomène de monumentalisation des savoirs enseignés dans le règne actuel d'un « paradigme » de l'étude scolaire qu'il nomme *paradigme de la visite des savoirs*. Corrélativement, il considère que la création d'un enseignement praxéologiquement *motivé* (c'est-à-dire capable de faire revivre les raisons d'être des praxéologies enseignées) suppose la transition historique vers un paradigme *du questionnement du monde* fondé (notamment) sur le concept de PER, tel que nous tenterons de l'exposer un peu plus loin.

À la troisième question – que proposent les auteurs examinés pour lutter contre la perte de sens telle qu'ils l'identifient ? –, nous avons apporté une partie importante de la réponse : la proposition originelle est celle d'un enseignement « par AER ». L'AER du parallélogramme tronqué, ainsi, donne à la propriété θ_1 *une* raison d'être : sa raison d'être est

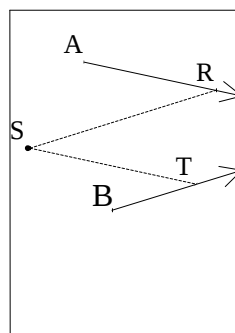
de permettre de résoudre un problème de construction graphique, le tracé de la partie de la diagonale [AC] qui se trouve sur la feuille. On peut juger que c'est là un motif bien mince : n'y aurait-il pas d'autres raisons qui motiveraient aussi l'étude cette propriété ? Bien que les raisons d'être apparaissent toujours particulières, ce qu'un enseignement immotivé tend à masquer, elles sont généralement multiples. Tout d'abord, il faut citer les problèmes apparentés au problème « générateur » – ici, celui du parallélogramme tronqué – que la même propriété permet de résoudre. Considérons ainsi le problème suivant :

Sur la figure ci-après, deux personnages A et B regardent un certain point P, à l'intersection de leurs regards (représentés par des flèches). Ce point est situé hors de la feuille de dessin. Un troisième personnage, C, doit être ajouté à la figure, qui lui aussi regarde le point P au loin.



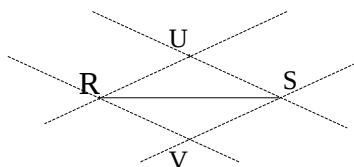
Comment tracer la direction du regard de C ?

On se ramène au problème du parallélogramme tronqué en traçant les parallèles passant par C aux droites (AP) et (BP) : il suffit alors (voir la figure ci-après) de tracer la partie se trouvant sur la feuille de la diagonale [SO] du parallélogramme RSTO.



Bien d'autre « interventions » de la propriété θ_1 peuvent encore être recherchées par la classe. Pour n'en citer qu'une, observons ici que θ_1 permet de concevoir et de justifier une autre technique de construction du *milieu d'un segment* [RS], en utilisant simplement une *règle à deux bords parallèles*. On obtient en effet la figure ci-après en positionnant d'abord la règle

de façon que l'un de ses bords passe par R et l'autre par S pour tracer alors les parallèles (RU) et (SV) matérialisées par les bords, avant de positionner la règle de façon symétrique pour obtenir deux autres parallèles, (SU) et (RV).



Le quadrilatère URVS qui en résulte est, par définition, un parallélogramme ; on obtient donc le milieu de [RS] en traçant la diagonale [UV]. La praxéologie mathématique élaborée à l'origine, $[T / \tau / \theta / \Theta]$, qui est une praxéologie dite *ponctuelle* (elle est formée autour de ce « point » qu'est le type de tâches T), s'enrichit et deviendra par ce processus une praxéologie dite *locale*, que l'on peut écrire $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{1 \leq i \leq n}$ où $T_1 = T$, l'entier n étant en règle générale de l'ordre de quelques unités. Les raisons d'être de θ_1 pour la classe $[X, Y]$ sont là : θ_1 , c'est ce qui sert de façon cruciale à concevoir ou à justifier les techniques $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ relatives respectivement aux types de tâches $T_1, T_2, \dots, T_n$. On va voir pourtant qu'un enseignement « par AER » souffre de certaines limitations invalidantes, qui vont provoquer la création de la notion de PER.

2.3. La naissance des PER

La *clinique** des AER devait rapidement montrer qu'un enseignement « par AER » vient buter sur deux grands types d'obstacles au moins. C'est ainsi pour corriger les difficultés d'un tel enseignement que, dès l'année 2003-2004, la notion de *parcours d'étude et de recherche* (et le sigle PER, qui en facilite l'usage) apparaît dans le séminaire adressé aux professeurs stagiaires de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille.

Le premier type d'obstacles se situe du côté de ceux qui ont à concevoir et à construire les AER, et en particulier les professeurs : pour le dire brièvement, il n'est pas facile de concevoir et de construire, pour *chacune* des entités praxéologiques figurant au programme d'études de l'année, une AER conduisant à rencontrer cette entité praxéologique ! Le second type d'obstacles se situe du côté des X et des Y , c'est-à-dire du côté de ceux qui ont à réaliser et à « vivre » les AER. Il est engendré essentiellement par la non-familiarité des élèves (et parfois du professeur) avec le problème proposé. Ainsi en va-t-il pour le problème du parallélogramme tronqué, qui ne fait pas sens immédiatement dans la classe de 5^e observée (Chevallard, 2009a, Unité 6, p. 26) :

... certains élèves au moins semblent ne pas comprendre le *type* de problèmes dont il s'agit, qui leur impose de procéder à une certaine construction géométrique (avec les instruments habituels : règle, compas, équerre, etc.), mais sous des conditions où certains éléments de la figure, ordinairement « donnés », ne le sont pas (il s'agit en l'espèce du point C, qui « tombe » hors de la feuille).

En revanche, et telle est du moins une hypothèse de travail raisonnable, une fois ce type de problèmes « compris » (comme il en va, à l'évidence, à l'issue de la séance observée en 5^e), d'autres problèmes du même *genre* pourront être étudiés par la classe sans que celle-ci soit bloquée (ou déviée) de façon répétée par une compréhension défailante de la difficulté à résoudre (Chevallard, 2009c) :

Le point important est alors le suivant : alors que la réalisation observée de l'AER du parallélogramme tronqué a été en partie occupée par la rencontre avec le *genre* de tâches auquel renvoie la question Q, une fois cette première rencontre faite, la *connaissance de ce genre de tâches* acquise en cette circonstance devrait être suffisante pour que la classe puisse s'y appuyer : la dévolution à X de questions *de même genre* relatives à des types de configurations *nouveaux* en sera dès lors grandement facilitée.

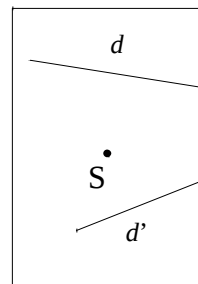
C'est de cela que part l'idée d'un enseignement des mathématiques « par PER » (Chevallard, 2009c) :

C'est en ce point que naît l'idée de PER dans la classe de mathématiques : au lieu de faire rencontrer à X les œuvres mathématiques du programme à travers une multiplicité d'AER dont chacune repose sur une question Q différente et mobilise des œuvres « auxiliaires » différentes, ce qui accroît grandement le coût didactique de l'entreprise (au point de mettre sérieusement en danger sa viabilité à long terme), on recherche un fort degré d'intégration en faisant découler tout un ensemble de questions Q d'une question « génératrice » unique, $\tilde{Q}$, telle celle évoquée ci-dessus : « Comment réaliser une construction graphique exacte définie par des éléments dont certains sont extérieurs à la feuille de dessin ? » Cela étant, il est clair en même temps qu'une telle question $\tilde{Q}$ « indéterminée » permettra à y d'engendrer des questions « déterminées » Q dont l'étude fera rencontrer une part substantielle des œuvres *géométriques* du curriculum du collège...

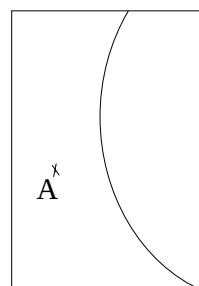
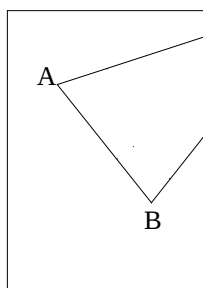
Notons que ce qui est appelé ici une question « indéterminée », et est noté $\tilde{Q}$, est nommé ailleurs « schéma de question ». Une question « indéterminée » – telle la question « Comment réaliser une construction graphique exacte définie par des éléments dont certains sont extérieurs à la feuille de dessin ? » – constitue le « patron » de questions « déterminées », ce

qu'illustrent les trois énoncés suivants (Chevallard, 2009a, Unité 6, pp. 26-27) :

Problème 1. Sur une feuille, on a tracé deux droites d et d' qui se coupent hors de la feuille (voir ci-contre). On voudrait tracer sur la feuille la partie du segment qui joint un point S donné au point d'intersection de d et d' .

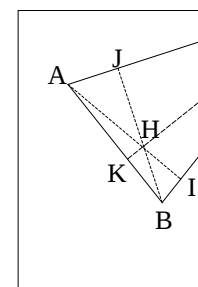
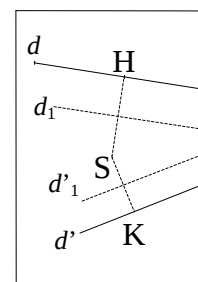


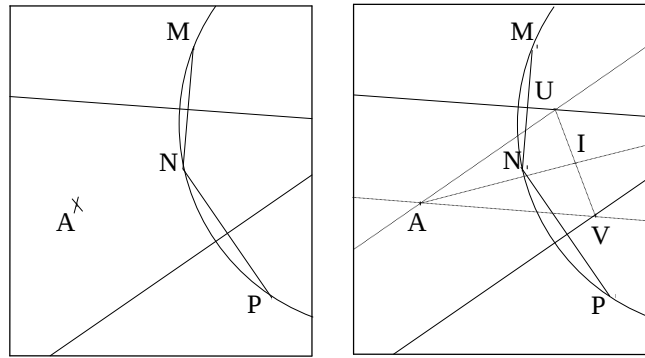
Problème 2. Sur une feuille de papier, on a voulu tracer un triangle ABC dont, en fait, le sommet C tombe hors de la feuille (ci-dessous, à gauche). Pour une raison non précisée, on souhaite tracer la partie figurant sur la feuille de la hauteur issue de C .



Problème 3. Sur une feuille de papier, on a marqué un point A et un arc de cercle dont le centre O tombe hors de la feuille (ci-dessus, à droite). On veut tracer la partie du segment $[AO]$ figurant sur la feuille.

Le premier problème ressemble beaucoup à un problème résolu plus haut à l'aide de la propriété θ_1 ; mais un coup d'œil sur la figure proposée ici montre que ce principe de résolution échoue : les parallèles aux droites d et d' ne coupent pas d' et d sur la feuille. Une autre technique est donc requise, qui nécessitera un autre résultat technologique – le « théorème des milieux » – utilisé le cas échéant de façon répétée, comme le suggère la figure ci-contre. Semblablement, la résolution des problèmes 2 et 3 conduira à rencontrer diverses propriétés géométriques « classiques ». Ainsi le problème 2 fera appel au théorème selon lequel les hauteurs d'un triangle sont concourantes, ce qui est l'une des raisons de l'intérêt pour cette propriété : à l'aide par exemple d'une équerre, on trace les hauteurs issues des sommets A et B du triangle « tronqué » ABC ; ces hauteurs se coupent en un point H : la partie « visible » de la hauteur issue de C s'obtient en traçant la perpendiculaire à (AB) passant par H (voir la figure ci-contre). Quant aux figures ci-après, elles suggèrent une technique de résolution du problème 3 : on y voit comment on peut, en ce cas, se ramener au problème du parallélogramme tronqué.





Dans ce type de PER, la classe $[X, Y]$ étudie une « question indéterminée » $\tilde{Q}$ qui va être déclinée en une ou plusieurs questions « déterminées » $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$, dont l'étude amènera (successivement ou, parfois, simultanément) la formation et le fonctionnement de systèmes didactiques $S(X; Y; Q_i)$ pour $i = 1, 2, 3, \dots$. Si la distinction entre questions « indéterminées » et « questions déterminées » a été cruciale dans le passage, en classe de mathématiques, des AER aux PER – cette distinction formalise en effet un aspect important de l'économie didactique gérée par le professeur, lequel est ici censé choisir les questions $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ d'une façon qu'il juge appropriée –, les travaux réalisés ultérieurement montreront qu'il est utile de ne pas distinguer *a priori* entre *degrés d'indétermination* d'une question Q étudiée (Y. Chevallard, communication personnelle, 28 août 2009). Dans le cas de la séance observée en 5^e, ainsi, le degré d'indétermination est nul : la figure à propos de laquelle le problème est posé est elle-même *imposée* aux élèves. On a vu, en revanche, que la question fournissant son énoncé au problème 1 ci-dessus comportait une indétermination cruciale, selon notamment que les parallèles passant par S aux droites d et d' coupent ou non, respectivement, d' et d sur la feuille ou *hors* de la feuille. D'une façon générale, on considérera une question Q *sans préjuger de son degré d'indétermination* et on envisagera (ou on observera) le « traitement » par une classe $[X, Y]$ de cette question Q à travers la formation et le fonctionnement d'un système didactique $S(X; Y; Q)$ engendrant lui-même, successivement ou simultanément, des systèmes didactiques $S(X; Y; Q_i)$, pour $i = 1, 2, 3, \dots$.

Le degré d'indétermination d'une question Q est lié à une propriété importante du point de vue de l'économie didactique, la *généralité* de la question. À cet égard, Yves Chevallard (2009b) apporte les précisions suivantes :

Toute question Q admet en effet des *cas particuliers* ou *particularisations* (en anglais : *instances* ou *instantiations*). C'est évident par exemple pour la question « Quelle est la durée de vie moyenne d'un insecte ? », que l'on peut songer à particulariser en la posant seulement à propos des mouches, ou des cigales, ou des puces, etc. D'un cas particulier à l'autre, ce qui

peut changer c'est, non seulement la réponse R , mais aussi le parcours d'étude et de recherche emprunté (et, en particulier, le milieu didactique mobilisé) pour arriver jusqu'à R . Le fait qu'une réponse R vaille pour un ensemble de « cas particuliers », en outre, peut n'apparaître qu'après-coup, une fois les études et recherches utiles accomplies. L'étude d'un cas particulier peut, inversement, engendrer des sous-cas non prévus au démarrage de l'étude.

Dans un contexte plus large – les PER évoqués ici sont regardés comme *codisciplinaires*, et non comme « mathématiques » ou, plus généralement, comme *monodisciplinaires* –, on retrouve en cette description le cas du PER sur les constructions graphiques « tronquées », dont la question génératrice (« Comment réaliser une construction graphique exacte définie par des éléments dont certains sont extérieurs à la feuille de dessin ? ») se laisse décliner, ainsi qu'on l'a vu, en de multiples questions « particulières ». Notons en outre la « démultiplication » des PER : l'étude d'une question Q (ou $\tilde{Q}$) va se concrétiser en un parcours d'étude et de recherche « général » qui, parce qu'il intègre l'étude de plusieurs questions $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$, se composera lui-même de multiples parcours d'étude et de recherche « particuliers », attachés chacun à une question Q_i .

La *générativité* d'une question Q , c'est-à-dire la capacité qu'a son étude d'engendrer la rencontre avec des questions « dérivées », est une notion plus fine que celle de *généralité* (une question *particulière* peut ainsi être *fortement générative*). La notion de générativité doit notamment se comprendre à la lumière d'une autre notion, celle de question *cruciale* (Chevallard, 2004a, Séance 13) :

On dira qu'une question Q_2 est cruciale pour (ou par rapport à) une question Q_1 si le fait de savoir répondre à Q_2 permet d'avancer dans l'élaboration d'une réponse à Q_1 . Bien entendu, pour une question Q_1 il peut exister *plusieurs* questions $Q_2, Q_2', Q_2'', \dots$, cruciales pour Q_1 .

Sans entrer ici dans le détail technique de cette notion, appelée à jouer un rôle essentiel dans la conduite d'un PER, nous soulignerons que la notion de générativité est étroitement corrélée au souci de concevoir des PER provoquant de nombreuses rencontres praxéologiques « ciblées » : dans la perspective d'un enseignement « par PER », un PER sera d'autant plus « intéressant » pour le professeur y qu'il permettra de rencontrer davantage d'entités praxéologiques $\wp_1, \wp_2, \dots, \wp_k$ inscrites au programme d'études de la classe :

$$\wp_1, \wp_2, \dots, \wp_k \in M \cup \{ R^\heartsuit \}.$$

Il est utile à cet égard de compléter les schémas herbartiens réduit et semi-développé en introduisant ici le schéma herbartien *développé*, dans lequel le milieu M s'écrit

$$M = \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \},$$

en sorte que le schéma herbartien développé s'écrit lui-même

$$[S(X; Y; Q) \Rightarrow \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \}] \Rightarrow R^\heartsuit$$

et que les rencontres praxéologiques visées s'écrivent à leur tour :

$$\wp_1, \wp_2, \dots, \wp_k \subset \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \} \cup \{ R^\heartsuit \}.$$

Que désignent les notations $R_i^\diamond$ (avec $1 \leq i \leq n$) et O_j (avec $n+1 \leq j \leq m$) ? À la première partie de cette question on peut apporter la réponse suivante (Chevallard, 2009c) :

Les entités notées ici $R_i^\diamond$, pour $i = 1, \dots, n$, sont des réponses « toutes faites » supposées à la question Q ; les entités O_j , pour $j = n+1, \dots, m$, sont des œuvres autres, qui permettront par exemple d'élaborer $R^\heartsuit$ à partir notamment des réponses $R_i^\diamond$, dont l'exposant $\diamond$ rappelle que chacune a reçu l'« estampille » de quelque institution (non nécessairement « savante »).

Les réponses « toutes faites » $R_i^\diamond$ incluent aussi bien des réponses d'origine *externe* à la classe, tel un corrigé du problème étudié ou une page de manuel (ce qui est étranger à la tradition scolaire ordinaire) que « les réponses R_x éventuellement proposées par des élèves x à partir de leur activité propre, la réponse R_x étant regardée, en référence au schéma herbartien, comme “estampillée” *ipso facto* par son proposant, x lui-même, de la même façon que $R^\heartsuit$ sera estampillée par la classe $[X, y]$ », réalité qui, en revanche, est conforme à la tradition scolaire – même si, dans cette tradition, la réponse $R^\heartsuit$ « de la classe » apparaît trop souvent comme la réponse, élaborée préalablement, *du professeur* y , R_y , et ne doit rien aux réponses R_x des élèves $x \in X$ (ce qui signifie alors que les réponses R_x n'auront pas été admise par y dans le milieu $M...$).

Le mot d'*œuvre* a été employé, dans ce qui précède, à de nombreuses reprises. Yves Chevallard (2009c) précise que le mot « est dépourvu ici de charge axiologique : il désigne un “objet” quelconque regardé comme le fruit d'une activité anthropique visant un but déterminé (qui peut être inconnu), c'est-à-dire le produit d'une action humaine *finalisée* ». Les *questions* sont ainsi des œuvres, de même que les *savoirs* et les *savoir-faire*, et plus généralement que les *entités praxéologiques* (et donc en particulier que les *réponses* à des questions) ; et il en va de même des différents « construits » matériels et immatériels qu'ils mobilisent. Les œuvres O_j mentionnées dans la formule de M peuvent être tout cela : dans l'AER du parallélogramme tronqué, ainsi, l'étude de la question posée mobilise des réponses d'élèves R_x , des outils « graphiques » classiques dans ce contexte, par exemple le matériel usuel de dessin géométrique, ou moins classique (tel le logiciel de géométrie utilisé), des œuvres mathématiques connues (la symétrie axiale) ou conjecturées (la propriété θ_1), etc.

On voit en ce point qu'une AER apparaît bien comme un cas particulier de PER.

Ainsi, le PER engendré par la question « indéterminée » des constructions graphiques « tronquées » peut commencer par l'AER du parallélogramme tronqué, qui est un PER « court », engendré par une question particulière. Impulsé au départ pour des raisons de « réalisme économique » (le professeur et les élèves n'ont plus, le premier à « inventer » et à conduire, les seconds à vivre, une situation problématique très largement inédite), le passage des AER aux PER va permettre un approfondissement de la rupture avec le paradigme de la visite des savoirs. C'est ainsi que l'entendront les chercheurs les plus engagés dans des recherches en « didactique des PER ». Il en est ainsi d'Esther Rodríguez, Marianna Bosch et Josep Gascón (2007), qui écrivent :

The most recent developments of the ATD (Chevallard 2004 and 2006) put forward the consideration of a new type of didactic mechanism called “Study and Research Courses” (from now on SRC). Changing right round the institutional didactic contract in force, which tends to favour the “study of answers” in detriment of the “study of questions”, the SRC are generated by a question Q with strong generating power, capable of imposing numerous derived questions leading to various bodies of knowledge to teach. Instead of starting from “contents” previously established in the strict framework of a discipline or a body of knowledge, the proposal consists in ideally “covering” school curricula with a set of SRC without a specific connection to the programmed contents. The study of these SRC should cause the encounter with some of these contents (and also many others) but it maintains a high degree of widening comparing to the majority of study processes. We postulate that the intrinsically co-disciplined nature of the SRC should allow attenuating the “thematic confinement” in which teachers and students used to work at school (Chevallard 2001). (p. 1800)

Tout en s'inscrivant dans la perspective ouverte par la notion d'AER, la notion de PER développe donc certains aspects de cette notion première au-delà de ce qui avait cours jusque-là. Comment préciser alors le contenu et la direction de ce développement ? Telle est la question que nous examinerons maintenant.

2.4. Des PER monodisciplinaires finalisés aux PER codisciplinaires ouverts

Le schéma herbartien développé fournit des repères pour dégager un certain nombre de caractères que doit posséder une réalisation didactique observée pour se qualifier comme PER : il doit y avoir eu formulation d'une question Q à laquelle la classe ait pris la responsabilité d'apporter une réponse ; il doit y avoir eu constitution d'un milieu M ; il doit y avoir élaboration, validation, institutionnalisation d'une réponse $R^\forall$. Mais il y a plus, comme

le précise Yves Chevallard (2009c) :

Pour qu'il y ait PER en un sens raisonnable, il faut en effet que l'organisation didactique conçue ou observée apparaissent viser (dans le premier cas) ou manifester (dans le second cas) un certain nombre de conditions touchant tout à la fois la *mésogenèse*, la *topogenèse* et la *chronogenèse*.

Nous suivrons ici l'exposé de ces conditions, en commençant par la *mésogenèse**, la genèse du milieu M . À cet égard, le principe premier, qui tranche avec les pratiques didactiques scolaires dominantes, peut s'exprimer ainsi : « M n'est pas "tout fait" ; il est constitué par la classe à partir de productions diverses, *externes* à la classe comme *internes* à celles-ci. » En outre, le milieu

$$M = \{ R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m \}$$

doit tout à la fois offrir des matériaux idoines pour construire une réponse $R^\heartsuit$ validée et satisfaisant les contraintes institutionnellement imposées et fournir des outils appropriés pour soumettre chacune des réponses $R_i^\diamond$ qui le composent ainsi que la réponse $R^\heartsuit$ en cours d'élaboration à une analyse critique adéquate. Mais, ainsi qu'on l'a déjà souligné, un point surtout doit être noté :

Par rapport aux usages scolaires traditionnels, un fait doit être clairement souligné : plusieurs types d'œuvres qui peuvent, *en principe*, venir constituer le milieu M d'un PER sont exclues *par principe* de l'enseignement traditionnel, même s'il arrive qu'elles y soient présentes clandestinement (comme il en va des corrigés d'exercices tout faits utilisés discrètement par les élèves).

Ce changement dans la nature même du milieu va de pair avec un changement dans le « travail » que la classe doit effectuer sur ce milieu, on le verra. Tout cela va de pair avec des changements radicaux dans la *topogenèse**, point sur lequel Yves Chevallard (2009c) insiste fortement :

La condition mésogénétique rappelée va de pair avec une condition relative à la *topogenèse* : la constitution du milieu M est le fait *de la classe* $[X, y]$, non de y seul. Le *topos* des élèves doit recevoir à cet égard une extension importante : non seulement un élève pourra apporter sa réponse personnelle R_x (comme il en va classiquement quand il produit sa solution de tel problème donné à chercher par y), mais encore il pourra proposer d'introduire dans M toute

œuvre qu'il souhaitera, par le truchement d'une documentation qu'il apportera ou suggèrera. À ce changement dans le *topos* des élèves correspond un changement important dans le *topos* de celui qu'on nommera ici le *directeur d'étude* – il dirige l'étude de Q – ou le *directeur d'enquête* – il dirige l'enquête sur Q . C'est ainsi y (ou Y , plus généralement) qui décidera *en dernier ressort*, non sans en expliciter les attendus, si la classe verra ou non son milieu d'étude être augmenté de telle ou telle œuvre, documentée de telle ou telle façon (et cela y compris s'agissant de réponses de la forme R_x). De la même façon, y pourra verser au milieu M telle pièce documentant une certaine réponse $R^\diamond$ qui ne sera pas nécessairement « sa » réponse personnelle (s'il en a une). Dans tous les cas, la réponse notée plus haut R_y ne sera pas traitée autrement que les autres réponses $R_i^\diamond$: ainsi sera-t-elle soumise à la dialectique des médias et des milieux, nul média n'ayant ici le privilège d'être « cru sur parole ».

Qu'en est-il enfin de la *chronogenèse** ? « La *chronogenèse*, écrit l'auteur que nous suivons, est ce par quoi un PER se distingue en principe de la façon la plus facilement repérable des épisodes didactiques usuels à l'école (si l'on excepte IDD et TPE notamment)... ». Et il précise la chose en ces termes :

... la constitution et le « travail » du milieu M sont en effet à l'origine d'une *dilatation du temps didactique* et donc, corrélativement, d'une *extension du temps d'horloge* requis. C'est ainsi que le travail de M en vue de produire $R^\heartsuit$ comportera *notamment* une étude finalisée *plus ou moins poussée* (elle peut être très sommaire en certains cas) des œuvres O_j , exigence fonctionnelle qui conduit le système didactique $S(X ; Y ; Q)$ à se transformer momentanément en un système didactique de type « classique », $S(X ; Y ; O_j)$. Cette étude de l'œuvre O_j – qui est, je le répète, finalisée par l'élaboration de $R^\heartsuit$: comment se servir de O_j pour déconstruire $R_i^\diamond$, ou pour tirer profit de telle autre œuvre O_k , ou pour « fabriquer » $R^\heartsuit$? – peut supposer *pour cela même* une étude plus large de O_j – quelles en sont les raisons d'être et comment « fonctionne »-t-elle, etc. ?

La « dilatation » de la *chronogenèse* renvoie ainsi à la complexification de la *mésogenèse* ; et celle-ci a des implications fortes pour la *topogenèse*, ainsi que le souligne encore Y. Chevallard (2009c) :

En tout cela, la direction de l'étude confiée à y suppose que y ne se laisse pas déborder par l'habitus professoral consistant à « pousser l'étude » de façon artificielle pour y inclure des

outils non appelés par l'enquête en cours mais ayant par exemple la vertu d'être usuellement associés, dans l'organisation disciplinaire dominante, aux outils dont l'emploi semble effectivement requis. Cette observation conduit tout près d'une notion d'étude plus encore en rupture avec la tradition scolaire que ne l'est la notion de PER évoquée jusqu'ici, on va le voir.

La notion évoquée *in fine* est celle de PER *praxéologiquement ouvert*, par opposition à la volonté de finalisation praxéologique stricte, typique de l'enseignement ordinaire, et présente encore dans la pratique (et la théorie) des AER. On a vu cependant que l'enseignement « par PER » évoqué jusqu'ici relâchait quelque peu cette contrainte de finalisation praxéologique ; de façon explicite, Yves Chevallard (2009c) écrit à ce propos :

... au lieu de rechercher, pour une entité praxéologique $\wp$ fixée à l'avance, une question $Q_\wp$ dont l'étude – sous certaines contraintes et dans certaines conditions – provoque la rencontre de $[X, Y]$ avec $\wp$ et avec le moins possibles d'autres œuvres (même relevant de la discipline enseignée), on voit poindre l'idée d'un *petit* nombre de PER, engendrés par des questions indéterminées $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3$, etc., dont Y (par exemple) tire des questions « déterminées » $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, \dots, Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, \dots, Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, \dots$, qui fassent rencontrer *ensemble* l'essentiel des œuvres du programme dans un certain domaine.

Cette finalisation praxéologique « large » conduit à souligner une distinction terminologique indispensable à l'analyse :

Une précision terminologique doit être apportée en ce point : une question Q appelle une *enquête*, laquelle se concrétise en un certain *parcours d'étude et de recherche*. Une *même* question Q peut ainsi conduire une classe à rencontrer un complexe d'œuvres qui peut varier selon le parcours emprunté (lequel dépend de l'activité de X , des décisions de y , mais aussi des ressources praxéologiques $R_i^\diamond$ et O_j actuellement accessibles) ; ce qui importe alors, c'est que le « ciblage praxéologique » qui devait s'opérer au niveau de chaque AER se produise maintenant au niveau du *système* des PER réalisés, *principe qui représente un changement d'envergure par rapport au schéma classique*.

C'est de cette observation que découlera la distinction entre PER *praxéologiquement finalisés* et PER *praxéologiquement ouverts*. Sur ce thème, la distinction entre *enquête* sur Q et parcours d'étude et de recherche suscité par Q permet d'apporter certains éclaircissements. Les entités praxéologiques rencontrées au cours d'une enquête sur la question Q ne dépendent

pas *uniquement* de cette question. En particulier, ce qu'on a appelé « la générativité de Q » dépend fortement des ressources disponibles composant le milieu ; et, de même, « la généralité d'une question Q n'est pas intrinsèque à Q : elle dépend de l'outillage praxéologique disponible (ou qui sera rendu disponible) pour l'étudier » (Chevallard, 2009b, p. 46).

Pour avancer encore, il nous faut revenir en arrière de quelques années dans l'histoire des PER. Au cours de l'année 2000-2001 est installé dans les classes de première des lycées d'enseignement général un nouveau dispositif de formation, les *travaux personnels encadrés* (TPE). Formellement, ceux-ci se concrétisent en la constitution de systèmes didactiques $S(X ; Y ; Q)$ où X est une équipe de deux ou trois élèves, Y une équipe de professeurs « encadreurs » (de disciplines différentes, et en général au nombre de deux), et Q une certaine question, choisie – sous contraintes – par X et validée par Y (en principe). Une exigence institutionnelle inédite est que l'étude de Q supposera l'appel à des entités praxéologiques relevant d'au moins *deux* disciplines enseignées (physique et biologie, ou histoire et anglais, etc.). Contrairement au cas des enseignements « monodisciplinaires » classiques, on voit ainsi se créer un cadre d'étude au moins *bidisciplinaire*. Pour couvrir les cas les plus divers, on parlera de situations d'étude et de recherche *codisciplinaires*, « le préfixe *co-* signifiant que les disciplines sollicitées sont amenées à “travailler ensemble” – plutôt que de façon dissociée – dans l'étude de Q » (Chevallard, 2009a, Unité 7, p. 2). Cet auteur ajoute alors une notation cruciale (c'est nous qui soulignons) :

Par ailleurs, les éléments praxéologiques mobilisés dans l'étude de Q devaient, pour l'essentiel, s'inscrire dans les programmes scolaires des disciplines sollicitées, même s'il y avait là des occasions de rencontres praxéologiques à la périphérie, voire à *l'extérieur de ces programmes*.

Avec l'idée de codisciplinarité, on tient là l'idée d'un PER *non strictement finalisé*, et même relativement *ouvert* en ce qui concerne les « rencontres praxéologiques » qu'il est susceptible de provoquer. Cette situation, toute nouvelle dans la culture scolaire traditionnelle, conduit Yves Chevallard à brosser, dès mars 2001, un tableau d'une culture didactique supposée plus adéquate que la culture courante aux exigences didactiques des TPE. Il écrit d'abord (Chevallard, 2001) :

L'étude d'une question Q peut être modélisée comme un entrelacement de cycles à *cinq temps* : *observation* de réponses $R_\diamond$ déposées dans les œuvres ; *analyse*, expérimentale et

théorique, des réponses $R_\diamond$; *évaluation* de ces mêmes réponses $R_\diamond$; *développement* d'une réponse R ; enfin *défense & illustration* de la réponse R ainsi produite.

Une note de bas de page indique : « La notation $R_\diamond$ (lue “r poinçon”) manifeste le fait que ces réponses participent d’œuvres institutionnellement “estampillées”. » (On aura noté que le symbole $\diamond$ figure ici en indice ; mais il passera en exposant dès l’année suivante.) Mais surtout l’auteur dégage alors sous le nom de *dialectiques* des praxéologies didactiques – alors au nombre de six – qu’il juge indispensables et dont il suggère qu’elles contrastent fortement avec les habitus didactiques scolaires traditionnels. Nous en reproduisons la description en mettant entre crochets le texte des notes de bas de page :

– La première dialectique est celle *du sujet et du hors-sujet* : contre le postulat scolaire du plus court chemin, qui ne conduit jamais qu’à un but déterminé à l’avance, elle pousse, dans une recherche en principe *ouverte*, à risquer le hors-sujet tant en matière de recherche documentaire par exemple [en opposition avec l’un des principes apparemment les mieux établis – et pour cause ! – de la profession de documentaliste] que dans le choix des questions engendrées dont on entamera l’étude.

– La deuxième dialectique est celle *du parachutiste et du truffier* : contre l’habitus scolaire de la rareté documentaire [même dans les disciplines qui pratiquent « abondamment » le travail documentaire], elle porte à « ratisser » de *vastes zones*, où l’on sait *a priori* qu’on ne trouvera pas grand-chose, mais où pourra advenir *de l’inattendu*, et où l’on apprendra à repérer les rares « pépites », souvent peu visibles, qui feront progresser la recherche.

– La troisième dialectique est celle *des boîtes noires et des boîtes claires* : contre le primat de la connaissance disponible et la propension à clarifier les boîtes... claires enchâssées dans les savoirs enseignés, elle invite à donner le primat à la connaissance *pertinente*, fût-elle impertinente envers les savoirs enseignés, à limiter au nécessaire la clarification (les boîtes « claires » sont toujours des boîtes *grises*), à prendre le risque, donc, de clarifier des boîtes noires ordinairement abandonnées aux ténèbres extérieures, et d’obscurcir des boîtes claires dans le curriculum familial, enfin à traquer les boîtes « invisibles » parce que « transparentes », pour *déconstruire les évidences* de la culture de l’institution d’accueil chaque fois que c’est utile.

– La quatrième dialectique est celle *de la conjecture et de la preuve* : contre la mise à l’épreuve réglée à l’avance [par exemple par des « expériences » parfois ambiguës, telles qu’il arrive aux sciences « expérimentales » d’en pratiquer] d’assertions réputées sûres en vertu

surtout de l'autorité de l'institution, elle engage à soumettre les assertions obtenues à la critique des diverses dialectiques et à évaluer le degré d'incertitude d'une assertion donnée.

– La cinquième dialectique est celle *de l'excription* [sur cette notion, voir ma communication au Séminaire national du 18 octobre 1998] *et de l'inscription* : contre le recopiage de réponses R_0 , corrélatif d'une écriture déterministe, contre aussi le dogme du « plan » préalable à un écrit pré-inscrit, elle convie à entrer dans la dialectique de la lecture excriptrice de réponses R_0 et de l'écriture inscriptrice d'une réponse R , en multipliant les niveaux d'écrit (carnet de bord, notes de synthèse, le glossaire, production finale).

– La sixième dialectique est celle *de la diffusion et de la réception* : contre la tentation de ne pas défendre sa réponse R , supposée par avance connue et reconnue, contre l'opportunisme à l'endroit de R afin de complaire à qui l'on s'adresse, elle provoque à défendre R sans infidélité mais dans l'attention à ce qu'autrui en peut recevoir.

Plusieurs années plus tard, dans un contexte différent, une septième dialectique sera nommée (Chevallard, 2009b, p. 44) : la dialectique *de l'individu et du collectif* ou *de l'autonomie et de la synnomie*. Dans un texte adressé aux professeurs stagiaires des disciplines scientifiques dès l'année 2002-2003, Y. Chevallard proposait trois « principes structurants » pour organiser « des IDD et TPE ». Ceux-ci deviendront deux ans plus tard les « principes structurants des PER », la notion de PER subsumant alors divers dispositifs de formation existants, tels les TPE et les IDD (Chevallard, 2004b). Le premier de ces trois principes consiste à *organiser le PER autour d'une question génératrice*, ce qui est une exigence *sine qua non*. Le deuxième principe demande d'*organiser le PER autour de cinq gestes de base*, ceux énumérés plus haut (*observer, analyser, évaluer les réponses $R^\diamond$, développer puis diffuser et défendre la réponse $R^\heartsuit$*). Le troisième principe, enfin, enjoint de *piloter le PER en régulant [les] six dialectiques fondamentales*. Nous retiendrons ici, surtout, que l'équipement didactique traditionnel des X comme des Y n'est plus, dans le cadre d'un PER, un équipement praxéologique approprié. La chose est d'autant plus vraie que l'on passe de PER monodisciplinaires (par exemple mathématiques) et fortement finalisés au plan praxéologique à des enquêtes codisciplinaires et largement ouvertes quant aux « rencontres praxéologiques » qui pourront se produire dans les parcours d'étude et de recherche en lesquels, sous des contraintes données, elles seront susceptibles de se concrétiser.

CHAPITRE 3

Les PER comme solution et problème

3.1. Vers une clinique des PER

Dans le premier chapitre de ce travail – *La profession et la « perte de sens » des apprentissages* –, nous avons mis en évidence l'émergence pratique d'un *problème de la profession*, énoncé en une question *Q* que de nombreux praticiens de l'enseignement soulèvent sans toutefois lui donner un contenu précis : *Comment prévenir la « perte de sens » qui affecte aujourd'hui le travail scolaire ?* Dans le deuxième chapitre – *La « perte de sens » et la notion de PER* –, nous avons explicité d'un point de vue théorique la signification précise que la TAD donne – à l'aide notamment de la notion de *raison d'être* – à l'expression « perte de sens » et nous avons exposé la réponse $R^\heartsuit$ qu'elle apporte alors à la question *Q* posée au sein de la profession – une réponse, on l'a vu, qui se résume en un sigle, celui de PER, lequel se superpose sans l'annuler à celui, plus ancien, d'AER.

De cette réponse $R^\heartsuit$, la *diffusion et la réception* – qui, en TAD, est au cœur de la sixième des sept « dialectiques » de l'enquête codisciplinaire – constituera l'objet propre de ce chapitre. Nous nous limiterons ici, toutefois, à amorcer une enquête dont le plein développement devra trouver sa place dans un travail ultérieur. Ainsi abordons-nous l'étude de la dernière des quatre questions formulées au chapitre 1, que nous rappelons encore une fois :

- 1) qu'entendent par « perte de sens » (en mathématiques) les auteurs qui s'expriment sur ce sujet ? À quels signes reconnaissent-ils qu'il y aurait « perte de sens » ?
- 2) comment analysent-ils ce phénomène (en termes d'origines, ou de causes, ou de conditions et contraintes) ?
- 3) que proposent-ils pour lutter contre la perte de sens telle qu'ils l'identifient ?
- 4) quelle réception ces propositions ont-elles, avec quels effets, et pourquoi ?

Plus précisément, la question à laquelle nous nous attacherons sera celle-ci : *Quelle réception la proposition d'un « enseignement par PER » a-t-elle dans la profession, là où elle diffuse, avec quels effets, et pourquoi ?* Bien entendu, nous nous concentrerons sur certains aspects

seulement de cette réception, en tentant dans chaque cas d'en mettre en évidence les *conditions et les contraintes*, nous situant ainsi dans le cadre de la *didactique des PER*, et cela par une combinaison de méthodes de recherche – c'est-à-dire de *praxéologies de recherche* (Chevallard, 2009c) – qui participent de la *clinique du didactique* et, plus précisément, ici, de la *clinique des PER* (Chevallard, 2009b, 2009c).

Plus exactement, nous étudierons les conditions et les contraintes actuelles de la *création d'un enseignement par PER* dans une école qui demeure gouvernée pour l'essentiel par le *paradigme de la visite des savoirs* et en laquelle prévaut ce que l'on peut appeler une *pédagogie d'enseignant* (Yves Chevallard, communication personnelle, 28 août 2009), notion que nous préciserons un peu plus loin. Les vicissitudes de cette création, on le verra, peuvent en effet être regardées comme *l'indicateur principal de la réception par la profession de l'idée de PER*. Nous nous efforcerons de l'observer et de l'analyser en ayant en tête ses trois moments solidaires : tout d'abord, le moment de *la conception et de la construction de PER* ; ensuite, celui de *la réalisation didactique de PER* ; enfin, celui de *l'observation, de l'analyse et de l'évaluation* de telles réalisations, l'évaluation se situant dans la perspective d'un *projet éducatif*, lui-même à examiner.

3.2. Professeurs débutants : une première prise d'information

Le premier lieu de diffusion de la notion de PER à des praticiens (débutants) que nous considérerons est la formation donnée à l'IUFM d'Aix-Marseille aux élèves professeurs de deuxième année, professeurs stagiaires de mathématiques, cadre dans lequel, au reste, est née l'idée de PER. Grâce à l'obligeance de Michèle Artaud et de Gisèle Cirade, maîtres de conférences de mathématiques et didacticiennes des mathématiques respectivement à l'IUFM d'Aix-Marseille et à l'IUFM Midi-Pyrénées, nous avons pu accéder à toutes les questions rédigées par les professeurs stagiaires de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille des promotions 2003-2004 à 2007-2008 dont la formulation contenait le sigle PER ou l'expression « parcours d'étude et de recherche ». Les circonstances générales de la rédaction de ces questions est explicitée dans le passage suivant (Chevallard et Cirade, 2009)

Dans la formation des élèves professeurs de mathématiques conçue et mise en œuvre depuis des années à l'IUFM d'Aix-Marseille, le choix d'une procédure *bottom-up* s'est d'emblée imposée. Sans que cela constitue à nos yeux la seule procédure possible, le dispositif suivant a été adopté : les élèves professeurs sont invités chaque semaine à coucher par écrit, de façon concise, une difficulté rencontrée dans la semaine écoulée. L'équipe de formation dispose ainsi en continu d'une information prise à la source, faite de ce qu'on peut nommer des

questions *ombilicales*, pour signifier par là qu'elles se branchent sur le quotidien de ces professionnels en formation initiale. À la fin du mois de mars 2007, et pour ce qui est des élèves professeurs de mathématiques de deuxième année, le fichier des questions posées depuis le mois de septembre 2006 comportait déjà plus d'une centaine de pages. Sur les six années précédentes, le recueil de ces « questions de la semaine » (telle est la dénomination adoptée) contient plus de sept mille questions touchant à tous les aspects de la vie professionnelle dont un professeur de mathématiques débutant puisse prendre conscience au fil de son année de formation à l'IUFM. (p. 57)

Les questions ainsi recueillies n'ont en principe d'autre motif que de faire connaître aux formateurs concernés – ainsi qu'aux autres élèves professeurs de la promotion – les difficultés que leurs rédacteurs pensent avoir rencontrées dans leur formation au métier (qui inclut une part substantielle d'*exercice* du métier). Les questions retenues ici ont en conséquence l'avantage, au plan méthodologique, de n'être en rien influencées par la problématique propre à notre étude. Peu nombreuses – on en compte 20 en cinq ans –, elles émanent de professionnels débutants censés s'essayer à un enseignement par PER encore à l'état naissant, sans qu'il y ait pour eux d'obligation à cet égard. La reproduction de ces questions, dans ce qui suit, est toujours accompagnée de la mention de l'année universitaire et du numéro de la semaine dans le temps de formation (qui occupe en règle générale 24 semaines).

Parmi les questions relatives à la *conception et à la construction* de PER, on en trouve tout d'abord qui expriment une incertitude quant à la nature exacte d'un PER. Ainsi en va-t-il de cette prudente requête :

Pourriez-vous ré-expliquer ce qu'est concrètement un PER ? (2006-2007, 20^e semaine)

Une autre question suggère une incompréhension plus marquée (l'explicitation du sigle PER y est même fautive) :

De quoi est fait un PER (Plan d'Étude et de Recherche) exactement ? Est-ce l'ensemble du travail fait sur un thème avec la classe ou faut-il rajouter la préparation du professeur sur ce thème ? (2006-2007, 16^e semaine)

Dans certaines questions, l'interrogation a trait, de façon plus ou moins explicite, à l'articulation entre AER et PER, la première notion étant, semble-t-il, regardée comme « acquise » (du fait de la formation reçue), tandis que la seconde demeurerait incertaine. La question suivante montre ainsi une tension entre le PER entendu comme simple succession d'AER et le PER conçu comme engendré par l'étude d'une question génératrice unique,

appelée ici « transcendantale », se déclinant localement en PER « courts » assimilés à des AER :

Un PER peut-il être un regroupement d'AER portant sur des praxéologies « proches » ou doit-il nécessairement porter sur la réponse à une question « transcendantale » ? (2006-2007, 20^e semaine)

Cette « dialectique » *problématique* entre AER et PER paraît insistante. La question suivante, ainsi, semble manifester une résistance à passer des AER aux PER :

Une AER peut-elle amener la rencontre de types de tâches relevant de thèmes distincts ? Un tel syncrétisme appelle-t-il le cadre d'un PER ou est-il plus judicieux de cibler l'objectif d'une AER, quitte à y revenir plus tard, lors de l'abord d'un nouveau thème ? (2004-2005, 7^e semaine)

Inversement, telle autre question explicite longuement ce qui semble bien être une prise de conscience de la fonction d'intégration didactique des PER :

Pour le cours sur les valeurs absolues, j'ai préparé une AER. En la faisant avec mes élèves je me suis rendue compte qu'elle se rapprochait plus d'un PER.

Mathias et Armel se déplacent l'un vers l'autre. Mathias est au point d'abscisse -4 et marche à une vitesse de 3 km/h . Armel est au départ au point d'abscisse 3 et marche à une vitesse de 2 km/h . Il y a du brouillard et ils ne peuvent se voir que si la distance qui les séparent est inférieure à 500 m . Au bout de combien de temps peuvent-ils se voir et pendant combien de temps ?

En AER, je leur ai fait modéliser le problème et résoudre deux inégalités distinctes. Des élèves ont proposé des méthodes graphiques qui donnaient des résultats approximatifs. Puis j'ai motivé le cours en leur disant que ça serait plus simple de résoudre une seule inégalité avec des valeurs absolues. Bref, j'aimerais savoir si mon AER n'est pas en fait un PER. (2005-2006, 14^e semaine)

Dans cette perspective, toutefois, plusieurs questions, telle la suivante, trahissent une conception des PER comme fournissant simplement un « contenant » – on pourrait dire un « conditionnement » – à des contenus éventuellement disparates :

Puisque la forme d'un nombre entier est à la fois une question algébrique mais aussi géométrique (représentation pythagoricienne), et bien sûr numérique, un PER sur le pythagorisme n'est-il pas indispensable, surtout pour des élèves issus de familles sans culture mathématique ? Personnellement, j'ai introduit les nombres carrés, rectangles et segments

dans le cadre des racines carrées et du théorème de Pythagore, en guise d'AER. Il me semble que la représentation grecque parle à tout le monde et que les difficultés que vous soulevez sur la lourdeur arithmétique grecque seraient un moyen de dévoluer la création de la formulation algébrique. Qu'en pensez-vous ? (2004-2005, 21^e semaine)

Cette conception des PER comme ayant des vertus « écologiques » exploitables de façon opportuniste se retrouve dans une question évoquant des contenus regardés par son rédacteur, semble-t-il, comme étant hors programme :

On considère la calculatrice comme une « boîte noire ». On fournit en entrée des données et elle nous retourne des résultats en sortie (courbes représentatives, tableaux de nombres, valeurs numériques, etc.). Serait-il possible dès la 2^{de} jusqu'à la terminale, dans le cadre de PER successifs par exemple, d'initier les élèves à la programmation (sur calculatrice et sur PC) ? Ceci leur permettrait de ne plus être de simples utilisateurs qui appuient sur des touches pour avoir un résultat lorsqu'ils en ont besoin, mais de commencer à être vraiment actifs dans ce domaine. (2004-2005, 18^e semaine)

Il existe de ce point de vue des cas limites, comme dans ce PER où la classe s'interroge sur la vérité de la réciproque d'implications connues pour être vraies, sans pour cela chercher à déterminer *l'utilité possible* de ces réciproques, fonction qui est véritablement, pour le rédacteur de la question, dévolue aux AER :

Dans le cadre d'un PER installé dans la classe depuis le début de l'année sur la véracité de la réciproque d'une propriété, est-il nécessaire de faire quand même une AER posant un problème, ou une activité de conjecture est-elle suffisante ? (Dans ce cas précis, il s'agit de voir la réciproque du théorème de Pythagore.) (2007-2008, 17^e semaine)

On en reste au moment de la conception et de la construction, qui inquiète particulièrement ces professeurs stagiaires, avec des questions « réclamant » aux formateurs des AER ou des PER. Une première inquiétude est formulée dans une question dont l'objet est de savoir si *tout* ce qui figure dans le programme de la classe devrait, au fond, être « mis en PER » :

Est-ce que, pour chaque thème étudié, il faut trouver une question génératrice dont les questions cruciales correspondront aux différents types de tâches du thème ? Faut-il construire un PER pour chaque thème ? (2003-2004, 14^e semaine)

On aura noté ici l'association discutable d'une part entre *thèmes d'études* (par exemple « le triangle rectangle ») et *PER*, d'autre part entre *type de tâches* relevant d'un certain thème (par exemple « déterminer si un triangle donné par la mesure de ses trois côtés est ou non

rectangle ») et *questions cruciales* par lesquelles se met en place le parcours effectivement suivi. La crainte exprimée va donc de pair, en l'espèce, avec une conception rigide, mécanique et finalement inauthentique de ce que peut être un PER. Une semblable interrogation apparaît encore, quoique de façon plus sereine, dans la question suivante :

Pour un enseignement utilisant des PER, peut-on (ou doit-on) envisager que toute l'étude de la classe soit organisée autour des PER ou est-il plus sage de proposer un système mixte (PER + chapitres classiques) ? (2003-2004, 18^e semaine)

Derrière ces demandes se cache, nous semble-t-il, la vraie difficulté qu'il y a à concevoir et à construire un PER approprié. Dans la question que voici, la requête présentée est la conséquence d'une auto-évaluation « brutale », par le professeur stagiaire lui-même, de la réalisation didactique d'une AER qu'il a assumée :

Après avoir fait des « calculs sans parenthèses » dans le cadre du PER « Enchaînements d'opérations », j'ai entamé les « calculs avec parenthèses ». Je leur ai proposé une AER à ce sujet, mais je ne suis pas réellement satisfaite : ils ont eu du mal à comprendre. En fait, je leur ai donné deux modèles du type suivant :

$$\begin{aligned} A &= (8 - 3) \times (4 - 1) \\ &= 5 \times 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 9 - ((8 - 5) \times 2) \\ &= 9 - (3 \times 2) \\ &= 9 - 6 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Je leur ai demandé de calculer d'autres expressions du même type en s'aidant des deux modèles et en vérifiant à la calculatrice et ainsi d'en déduire les règles de calcul. Est-ce une bonne AER ? Avez-vous une autre AER à me proposer ? Les questions fusaient : c'était un peu « panique à bord » ! (2005-2006, 6^e semaine)

Mais les demandes formulées le sont plus fréquemment *avant* toute tentative en classe. Ainsi en va-t-il avec les questions ci-après :

- En ce qui concerne l'éducation à la citoyenneté, que pourrait être un PER dans le domaine de la géométrie ? (2006-2007, 23^e semaine)
- Quel PER proposer pour introduire le calcul intégral ? (2003-2004, 21^e semaine)
- Quel parcours d'étude et de recherche pourrait motiver la recherche d'un maximum et l'étude de la variation ? (2006-2007, 21^e semaine)

Dans d'autres cas, on demandera plus largement *comment concevoir et construire* un PER. Une équipe de professeurs stagiaires qui travaille alors à son TER (le « travail d'étude et de

recherche », mémoire professionnel avec lequel s'achève l'année de formation), formule à deux semaines d'intervalle deux questions dans ce sens :

- Quelles sont les notions que l'on retrouve au lycée sur la modélisation ? Que faut-il institutionnaliser ? Comment faut-il le faire alors que, comme nous l'avons vu dans un séminaire précédent, la modélisation est un thème transversal du collège ? Faut-il prévoir un PER à ce titre et comment le construire ? (2004-2005, 19^e semaine)
- Lors de nos recherches sur la modélisation (pour notre mémoire), nous nous sommes rendu compte que cette partie (la modélisation) est une compétence transversale, et même plus, joue un rôle important dans l'apprentissage des mathématiques et même après. Nous pensons qu'il serait intéressant de construire un PER sur ce sujet, mais y a-t-il une « méthode » ou « technique » pour construire un tel document ? (2004-2005, 21^e semaine)

On retrouve ici l'idée du conditionnement possible de contenus « erratiques », qu'un PER bienvenu pourrait rassembler pour permettre d'en organiser l'étude. Ajoutons aux questions qui précèdent une question suscitée par le souci d'inclure dans le TER évoqué plus haut un *scénario didactique de PER* (Chevallard, 2009c), ou du moins un fragment d'un tel scénario :

Lorsque dans notre TER on veut faire un PER, comment le présenter ? Faut-il détailler toutes les parties ou simplement celle qui nous intéresse ? (2004-2005, 23^e semaine)

Si concevoir et construire un PER n'est pas facile, il ne le serait donc pas plus de « présenter » un PER sur le papier !

Peu de questions abordent le moment de la *réalisation didactique*. Une question concerne à cet égard un point essentiel, celui, au fond, de la redéfinition avec les élèves du « contrat pédagogique », afin que, si l'on peut dire, ils comprennent le jeu auquel le professeur veut les faire jouer :

Comment introduire en pratique les PER pour que les élèves en aient conscience ? (2005-2006, 5^e semaine)

Une question encore touche un point classique de la pratique des AER et des PER :

Comment organiser les traces écrites relatives à un PER ? (2004-2005, 3^e semaine)

Enfin, à propos de son TER encore, une équipe de professeurs stagiaires signale une difficulté qui naît du choc entre une « pédagogie d'enseignant », dans laquelle l'introduction de tel sujet d'étude est à chaque instant contrôlée par le professeur, et une « pédagogie de l'enquête » adéquate à un enseignement par PER, où le surgissement de telle ou telle question à étudier dépend d'abord du *milieu* et de la logique intrinsèque de l'étude en cours :

Dans notre TER sur l'introduction de la fonction exponentielle, nous partons d'une équation différentielle $y' = ax + b$ (issue d'un PER), qui donne naissance, *via* la méthode d'Euler, à des suites arithmético-géométriques. Cela nous gêne car nous croyons ainsi rajouter une difficulté (inutile) à la découverte de la fonction exponentielle : traiter de telles suites, alors que la fonction exponentielle est, elle, la version continue d'une suite géométrique. Qu'en est-il selon vous ? (2003-2004, 24^e semaine)

On aura noté que le moment articulant *observation, analyse et évaluation* n'est guère présent qu'en filigrane (hormis dans la question relative au « calcul avec parenthèses »). Rien n'atteste en vérité que ces professeurs stagiaires auraient eu l'occasion d'observer des PER, sinon dans un cadre d'auto-observation. Nous prolongerons maintenant ce premier « geste clinique » à l'endroit du rapport de professeurs débutants à la notion de PER, et cela par le moyen d'une deuxième prise d'information.

3.3. Professeurs débutants : une deuxième prise d'information

Nous nous plaçons ici, si l'on peut dire, en une étape *antérieure* de la rencontre de professeurs (débutants) avec la notion de PER. Comme précédemment, nous devons les données que nous examinerons ci-après à l'obligeance de Michèle Artaud, responsable de la formation des professeurs stagiaires de mathématiques à l'IUFM d'Aix-Marseille. Dans le cadre de la quatrième séance (c'est-à-dire de la 4^e semaine) du séminaire qui leur est destiné, et à la suite « d'un travail sur la notion de PER », chacun des élèves professeurs de la promotion 2008-2009 a eu à mettre par écrit « un point qui lui semblait positif et un point qui lui semblait négatif dans la mise en œuvre de la notion de PER ». Nous disposons ainsi des déclarations de 41 élèves professeurs, qui ont chacun fait connaître, quant aux PER, un élément jugé « positif » et un élément jugé « négatif » – à une exception près, celle d'un répondant qui n'a pas explicité de point « négatif ». De telles déclarations ne sont certainement pas exemptes d'intentions à l'endroit de l'équipe de formation : ainsi ne peut-on écarter l'hypothèse que certaines soient sous-tendues par le souci de négocier une forme d'évitement pratique, dans la conduite de la classe en responsabilité, de la mise en œuvre concrète de la notion de PER. Mais la remarque déjà formulée plus haut s'applique à nouveau s'agissant de l'absence de tout caractère « réactionnel » de ces déclarations vis-à-vis de la problématique qui est la nôtre.

Dans l'analyse du corpus recueilli, nous partirons de ce premier couple de réponses :

☺ Cela force les élèves à réfléchir, à avoir une démarche mathématique inhabituelle de recherche guidée par le professeur.

☹ Pour l'instant, on manque d'exemples de PER et cela semble difficile à fabriquer.

Le point positif, formulé de manière certes concise, semble mettre le doigt sur un aspect essentiel d'un enseignement par PER : le changement dans le rapport à la connaissance mathématique censé aller de pair avec la situation d'étude et de recherche « guidée par le professeur » que promeut un tel enseignement. Le point négatif retenu touche également un aspect sensible : il paraît évident que, aujourd'hui encore, les « infrastructures » spécifiques (Chevallard, 2009b, 2009c) indispensables à un enseignement par PER *ne sont pas prêtes*. Ce point négatif peut en fait être rangé dans la catégorie relativement peu nombreuse des réponses qui invoquent les difficultés auxquelles le *professeur* devrait s'attendre, dont une première sous-catégorie insiste sur le caractère chronophage, *en classe* et *hors de la classe*, d'un enseignement par PER :

- ⊗ La mise en œuvre d'un PER réduit la marge de manœuvre du professeur. Il doit le préparer à l'avance et se restreindre à certaines AER, quitte à en laisser certaines de côté, même pertinentes, si jamais elles ne s'inscrivent pas dans le parcours prévu.
- ⊗ Le PER demande un temps de préparation, une étude.
- ⊗ La perte de temps pour la conception d'une AER et pour l'apprentissage aux élèves.
- ⊗ S'il faut faire une AER pour chaque méthode importante de résolution en laissant du temps pour la recherche, etc., cela représente un grand investissement en temps, peut-être *trop* important.
- ⊗ Beaucoup de temps pour mettre en œuvre un PER.
- ⊗ Il me semble que la gestion d'un PER sur une longue période est difficile et que cela prend beaucoup de temps.
- ⊗ La mise en œuvre d'un PER semble prendre beaucoup de temps. Il y a aussi des difficultés pratiques (bavardages, dispersion de la classe,...) que risque de provoquer un PER.
- ⊗ Pour exploiter l'effet structurant du PER, il faudrait que les AER qui lui sont rattachées soient exécutées les unes après les autres. On risque alors de passer trop de temps sur un même thème, en contradiction avec le principe de mener plusieurs thèmes de front.
- ⊗ Pour pouvoir faire un PER, il me semble qu'il faut prendre deux séances au moins et donc, on peut avoir l'impression de perdre du temps. De plus si lors de la première séance, la première AER a été mal menée, la seconde risque d'être pire.
- ⊗ La complexité du problème peut ouvrir trop de portes et prendre trop de temps entraînant un certain dispersement [*sic*].

De rares répondants invoquent leur manque de métier actuel (on se souviendra que, sauf exception, ils ne possèdent qu'une expérience de moins de quatre semaines d'enseignement) :

- ⊗ Dispositif complexe faisant perdre pied au professeur débutant, celui-ci se noyant et noyant sa classe avec lui, rendant impossible l'avancement de l'étude (je n'ai jamais réussi à bien mettre en œuvre autre chose que des AER isolées et ponctuelles).
- ⊗ Il faut beaucoup de recul sur les enseignements pour pouvoir les relier. C'est un travail difficile à mettre en œuvre en début de carrière.

D'autres réponses mettent en avant des difficultés présentées davantage comme « intrinsèques » aux PER (plutôt que liées au professeur lui-même) :

- ⊗ Difficulté de mise en place.
- ⊗ Le dispositif peut être difficile à appréhender par les élèves en tous les cas au début. Difficile à mettre en place.
- ⊗ La mise en œuvre de la notion de PER est plus difficilement gérable, mise en place difficile.
- ⊗ Difficile à organiser. De plus, s'il se déroule sur plusieurs séances, obligation de faire un rappel sur ce qui a déjà été vu, pour pouvoir redémarrer.
- ⊗ Ce n'est peut-être pas évident de trouver un PER en restant dans les limites du programme, et abordant toutes les notions d'un chapitre (= difficulté de la mise en place du PER pour le professeur).

Notons en passant que, contrairement à ce que semble admettre cette dernière réponse, un enseignement par PER n'a pas à se couler strictement dans le découpage du programme en « chapitres », lequel procède d'une tout autre logique didactique : il suffit en vérité que des PER *en petit nombre* « couvrent » *ensemble* tout un ensemble de « chapitres » (Chevallard, 2009c, p. 28). Plus généralement, l'argument selon lequel un enseignement par PER ne saurait prendre en charge également bien les différents contenus du programme – ce qui serait une difficulté objective, indépendante du savoir-faire du professeur – est aussi explicité :

- ⊗ Il me semble difficile de créer des AER, et des notions s'y prêtent moins.
- ⊗ Un PER n'est peut-être pas faisable dans n'importe quel chapitre.

À cela s'ajoute un argument de « professeur » – celui-ci verrait sa « liberté pédagogique » amputée :

☹ Cela rajoute une contrainte pour la conception des AER et limite donc la liberté que l'on a lors de leur conception.

On soulignera ici la manifestation d'une idée très prégnante : un PER serait une structure organisant un défilement d'AER et constituerait en cela une contrainte supplémentaire pesant sur l'activité du professeur (et de la classe). De là sans doute cette autre critique :

☹ Il y a une réduction de la variété des situations où on rencontre des outils dégagés [sic]. À compenser par des exercices variés.

Nous mentionnerons en ce point une réponse qui pourrait tenir du paradoxe aux yeux des promoteurs d'un enseignement par PER ; car, selon son rédacteur, les PER seraient susceptibles d'entraîner... cela même qu'ils sont censés bannir :

☹ Morcellement des tâches, peut engendrer une perte de sens. Gourmand en temps.

L'affirmation qu'un « morcellement des tâches » peut entraîner une « perte de sens » est classique, nous le savons ; mais ce qui peut surprendre, ici, c'est l'affirmation qu'un enseignement par PER soit de nature à « parcelliser » l'étude au lieu d'en permettre, tout au contraire, une « recomposition ». Notons cependant que de nombreux répondants voient dans les PER, à l'inverse, un facteur d'organisation, de cohérence, de « liaison », comme l'attestent les formulations ci-après (dont la dernière fait référence à l'AER du parallélogramme tronqué et au PER en lequel on peut la prolonger) :

☺ Cela permet d'organiser l'étude du thème.

☺ Permet d'avoir une vision globale sur une thématique (un secteur ?).

☺ Cela permet d'avoir un suivi de l'étude et donne un enchaînement dans la continuité. Un PER peut donc servir de fil conducteur à l'étude.

☺ Dispositif permettant de motiver les AER qui elles-mêmes motivent les OML étudiées, réduisant ainsi l'énergie nécessaire à l'avancement de l'étude, au fur et à mesure que celle-ci avance dans l'année.

☺ Disposer d'un sujet d'étude riche, d'où peuvent être dégagés plusieurs outils (objets de synthèse) qui apparaissent alors liés. Cela apporte une cohérence dans le cours.

☺ Cela permet de faire le lien entre plusieurs notions « voisines ».

☺ Permet d'aborder plusieurs types de tâches et techniques associées. Permet de faire le lien entre des « notions proches ».

☺ Les PER permettent de faire le lien entre les différents thèmes étudiés (ici en 5^e, les parallélogrammes et les droites remarquables).

Existerait-il donc un conflit sous-jacent aux réponses recueillies ? Par leur « fabrication » même, nous le savons, les couples de réponses proposés par les enquêtés sont clivés entre un point positif et un point négatif. Mais derrière ce clivage constitutionnel existe un caractère unificateur très largement partagé par les réponses examinées : les PER y semblent en effet regardés *essentiellement* comme un moyen de *faire autrement la même chose*, c'est-à-dire de faire *ce que tout enseignant serait censé faire*. En d'autres termes, loin que les PER soient regardés comme contemporains d'un changement de paradigme d'*enseignement*, ils sont tenus d'emblée, par ces professeurs débutants, comme un autre moyen d'« enseigner », *ce verbe étant pris absolument* ; de là, sans doute, que les répondants n'aient guère de mal à leur trouver des « vertus » et des « vices ». Le tableau d'ensemble des réponses recueillies montre au vrai la ferme emprise d'une *pédagogie d'enseignant* associée au paradigme de la visite des savoirs, où l'élève est censé ne rien *voir* que le professeur ne lui *montre* expressément (« enseigner », rappelons-le, a son origine dans le latin classique *insignire* « signaler, indiquer », de *signum* « signe »), pédagogie qui, au demeurant, d'après les réponses faites, paraît aux répondants compatible avec un « enseignement par AER » (chaque AER étant vue comme permettant de faire « visiter » tel thème ou sous-thème du programme). *La rupture à cet égard semble donc se situer entre AER et PER*. Corrélativement, on lit dans les réponses le refoulement ou du moins l'endiguement auquel se trouve soumis ce qui serait une *pédagogie de l'enquête* au service d'un enseignement par PER. Cette situation se traduit alors par une incompréhension au moins apparente du concept de PER : d'une manière générale, il semble que soit ici barrée l'idée cruciale d'un *nouveau rapport à la connaissance*, engendré par des situations où les élèves rencontrent des objets (mathématiques ou autres) pour des raisons fonctionnelles et non pas d'abord parce que le professeur les leur montre. Ce ratage d'une première réception du concept de PER révèle de façon inattendue les contraintes imposées par une pédagogie d'enseignant fortement dominante, la seule reconnue, sauf exception, par ces professeurs débutants, en dépit de leur rencontre récente avec la notion d'AER.

Avant de poursuivre l'examen du corpus des réponses – en gardant en tête les conclusions que nous venons d'explicitier –, un point encore mérite d'être noté. Alors que, jusqu'ici, les réponses examinées ne mentionnaient pas *explicitement* les élèves (à trois exceptions près), le mot d'*élève* est, en règle générale, *fortement mobilisé* dans les réponses recueillies. Ainsi seuls 10 répondants sur 41 ne l'utilisent-ils pas ; les trois quarts d'entre eux,

donc, en font usage, et cela de façon plutôt généreuse : alors que, dans le corpus des « questions de la semaine » précédemment exploré, qui compte 1034 mots, « élève » a seulement 5 occurrences, dans le texte des réponses examiné ici, qui compte 1916 mots, soit moins du double du texte des questions de la semaine, « élève » se rencontre 43 fois. Quoique l'invocation des élèves soit donc centrale dans les arguments *pour* et *contre* que nous examinerons maintenant, elle ne devra pas cacher que l'interrogation sous-jacente reste celle-ci : « Les PER me permettent-ils de faire mieux, ou au contraire moins bien, ce que tout enseignant de mathématiques doit faire ? » Voici de cela un exemple (positif) typique :

☺ La mise en œuvre d'un PER permet de prendre un certain recul vis-à-vis des notions abordées dans les AER, de les coordonner et les harmoniser au mieux afin de construire un parcours cohérent dont tous les obstacles seront clairement définis à l'avance pour permettre une assimilation plus solide par les élèves (grâce aux successions « intelligentes » des notions abordées).

Il semble bien qu'il y ait là une part de projection : de supposées « bonnes » propriétés sont prêtées aux PER, celle par exemple d'offrir « un parcours cohérent dont tous les obstacles seront clairement définis à l'avance ». Le thème de la cohérence est d'ailleurs plus d'une fois souligné :

☺ Le PER permet une plus grande cohérence des AER, et clarifie leur intérêt pour les élèves. C'est donc un élément structurant, aussi bien pour les connaissances des élèves que pour le « cours » proprement dit.

☺ Cohérence dans l'enchaînement des questions, notions rencontrées. Il existe un fil conducteur qui permet de construire les mathématiques à acquérir par les élèves.

On rencontre encore l'idée que les PER *dynamisent* l'étude :

☺ On utilise un même support de départ pour étudier tout ou partie d'une praxéologie associée à un thème, alternant phases d'étude et de recherche et phases d'institutionnalisation, ce qui donne un point de vue plus global et dynamique de l'étude.

☺ Si un PER est bien mené, cela permet de dynamiser et de motiver l'étude des élèves.

Le thème également consensuel de la *motivation*, on vient de le voir, n'est pas absent :

☺ On obtient une plus grande motivation des élèves et ils sentent la nécessité d'avoir la nouvelle notion dans leurs bagages.

☺ Les PER offrent un cap, un objectif dans l'étude d'une notion et motivent donc le travail effectué.

D'autres réponses insistent sur la facilitation procurée par les PER en ce qui concerne la *dévolution* du problème étudié par la classe :

- ☺ L'élève s'approprie mieux le problème.
- ☺ Un PER permet de mettre en place une suite d'AER ayant un lien entre elles. Celles ci semblent ainsi moins « parachutées » et cela facilite peut-être la dévolution du problème.
- ☺ L'utilisation du même support tout au long du PER permet une meilleure dévolution du problème aux élèves qui en découvrent petit à petit toutes les facettes (du support...)
- ☺ Cela nous donne la possibilité d'avoir un fil directeur, de rendre familier un certain type de problèmes aux élèves, et d'organiser une étude avec les élèves.
- ☺ Cela permet d'avoir un fil directeur pour un type de problèmes qui deviendra vite familier aux élèves.
- ☺ Les élèves ayant assimilé le problème lors d'une première AER, auront moins de mal à rentrer dans le vif du sujet lors de la (ou des) suivante(s).
- ☺ Le fait d'utiliser une « activité identique » pour traiter plusieurs types de tâches permet de garder des éléments communs et connus d'un problème à l'autre.
- ☺ L'importance de faire toucher du doigt le problème à l'élève. La dévolution du problème plutôt que la synthèse toute prête. Les types de tâches ont un lien étroit entre elles.

Cette dernière réponse se fait l'écho d'un thème solidaire – les PER rapprochent, tissent des liens, donnent une vision d'ensemble d'un pan de mathématiques :

- ☺ Le PER permettrait aux élèves et au professeur d'avoir une vision d'ensemble sur un thème ou une notion donnés.
- ☺ Grouper des types de tâches proches (même sujet), permettant ainsi aux élèves de faire le lien, de voir le lien existant entre ceux-ci.
- ☺ Cela permet en outre de brasser différents thèmes du programme en suivant une même démarche et donc de donner des points de repère aux élèves sur les différents types de problèmes.
- ☺ Les élèves restent concentrés sur une même notion et peuvent relier les différentes parties entre elles.
- ☺ Le PER permet d'installer un réel fil conducteur durant l'étude autour d'un véritable problème. Le problème met en jeu différents outils et peut même mobiliser différents

domaines des mathématiques. Les élèves gardent la raison d'être de l'étude et sont sécurisés par la continuité du fil conducteur.

On rencontre en cette dernière réponse *l'unique occurrence*, dans le corpus des réponses recueillies, de l'expression « raison d'être ». On voit qu'elle y est associée à une notation purement « psychopédagogique » (les élèves seraient « sécurisés par la continuité du fil conducteur »), ce qui peut faire douter qu'elle reçoive ici la signification épistémologique et didactique qu'elle a en TAD.

Un autre thème apparaît encore, qui confirme le phénomène de projection évoqué plus haut : les PER jouiraient d'une « bonne propriété » que la « doctrine » des concours de recrutement (dont les répondants sont des lauréats) met classiquement en avant (voir par exemple Krir, 2007, p. 40, 46 & 109) :

☺ Plusieurs techniques abordées.

☺ La mise en œuvre de la notion de PER permet à l'élève de mobiliser divers outils et techniques pour résoudre un même type de problèmes...

☺ Un PER permet de montrer qu'un même type de problèmes se résout avec des techniques différentes.

☺ La mise en œuvre de la notion de PER permet aux élèves d'utiliser plusieurs méthodes pour réaliser un même type de problèmes. Ils peuvent faire le lien entre celles-ci.

☺ Utilisation d'autres outils mathématiques et d'autres méthodes pour résoudre le même type de problèmes.

☺ Dans un PER, les élèves utilisent des notions diverses (parallélogramme) pour résoudre une problématique.

Ainsi, quand ils sont considérés comme un « bon objet », les PER se voient-ils conféré toutes sortes de vertus « pédagogiques ». Les réponses ci-après forment un ultime témoignage de cet éclectisme parfois surprenant :

☺ Permet à partir d'un même problème de dégager différentes notions en vue de la synthèse. À partir d'un même type de problèmes on peut montrer aux élèves que différentes questions (interrogations) peuvent être posées.

☺ Permet que l'élève soit acteur dans l'élaboration des techniques de résolution mises en place. Plus d'intérêt, meilleure mémorisation, il saura sûrement aussi bien détecter qu'utiliser.

- ☺ On résout un problème en plusieurs petites étapes ce qui peut permettre à plus d'élèves de suivre.
- ☺ Un PER permet d'aborder plusieurs notions en même temps et d'avancer plus rapidement dans le programme.
- ☺ Chaque notion est introduite par une mini AER, il y a donc une réflexion pour chaque notion.

Cette dernière « bonne » réponse rappelle la prégnance du paradigme de la visite des savoirs, et montre une fois encore que la notion d'AER n'apparaît pas incompatible avec ce paradigme.

Bien entendu, les *mêmes* enquêtés portent aussi sur les PER – telle est la consigne à laquelle ils se soumettent – un regard qui en fait *en même temps* un « mauvais objet ». C'est ainsi que, au gain en cohérence et en clarté que certaines réponses font espérer, est opposé par d'autres réponses le risque de créer de la *confusion* chez les élèves :

- ☹ Risque de créer des confusions chez les élèves.
- ☹ Un PER [...] laisse un risque de confusion de la part des élèves d'autre part.
- ☹ Il peut y avoir confusion par rapport aux différents types de tâches.
- ☹ Le travail sur des supports différents pourrait permettre de mieux différencier chaque type de tâches. (Risque d'amalgame par les élèves des praxéologies étudiées dans le PER.)
- ☹ Peut créer de la lassitude pour certains élèves ou également des confusions.
- ☹ Un PER peut créer des confusions chez des élèves d'un niveau plutôt faible.
- ☹ Trouver une activité « utilisable » pour aborder différents types de tâches n'est pas évident, et les élèves risquent de mélanger les notions étudiées.

Les thèmes de la complexité cognitive et de la surcharge mémorielle, et l'exigence corrélatrice d'un surcroît d'effort de la part du professeur, sont également présents :

- ☹ Les élèves ne verront peut-être pas tous les liens qui peuvent exister entre les différentes activités du thème.
- ☹ Les élèves doivent assimiler plusieurs notions en même temps.
- ☹ Trop de choses à assimiler en même temps peut perturber les élèves.
- ☹ La séance est sans doute plus difficile à gérer : plus d'informations à « classer ».

☹ Les élèves ne se souviennent pas forcément des « anciennes » activités. (Il faut toujours rafraîchir leur mémoire).

On notera enfin le thème de la *lassitude*, voire du *blocage* des élèves :

☹ Le fait de travailler toujours le même type d'exercices peut bloquer certains élèves « hermétiques » à ce type de raisonnement, peut en lasser d'autres.

☹ Cela implique de passer un temps assez long à résoudre de différentes manières une seule question, ce qui risque de lasser les élèves.

On a dit que le fait de résoudre « de différentes manières » un même problème est loué, du moins « à haut niveau » ; on voit ici, à l'inverse, que cela pourrait être invalidant avec le tout-venant des élèves.

3.4. Trois PER conçus et réalisés

Dans ce qui précède, le rapport aux PER étudié chez des professionnels débutants est davantage fait d'anticipations et de projections – cadrées par une première information nécessairement sommaire – que d'observations et d'analyses concrètes de PER effectivement réalisés. L'étude de ce rapport n'en révèle pas moins l'existence de fortes contraintes que la diffusion et la réception de l'idée d'un enseignement par PER ne sauraient actuellement contourner, contraintes dont une bonne part – mais non la totalité, bien sûr – se manifeste à travers la mobilisation spontanée, par les professeurs stagiaires, d'une *pédagogie d'enseignant* qui, bien accordée au paradigme dominant de la visite des savoirs, et même compatible dans une certaine mesure avec un enseignement *par AER*, paraît ne pas laisser de place à l'émergence d'une éventuelle *pédagogie de l'enquête* au service d'un enseignement *par PER*.

Le développement d'une *clinique des PER* suppose, bien entendu, que l'on se penche très concrètement sur la conception et la construction, la réalisation, l'observation, l'analyse et l'évaluation de PER. Nous commencerons de le faire, ici même, à propos de trois études de cas appartenant à la littérature scientifique consacrée aux PER, toutes les trois issues des travaux impulsés en Espagne par Marianna Bosch et Josep Gascón (Barcelone).

Dans un travail déjà cité (Rodríguez, Bosch & Gascón, 2007 ; voir aussi Rodríguez, Bosch & Gascón, 2008, ainsi que l'annexe 3, ci-après), les auteurs se réfèrent à un PER « lancé » par une question à laquelle ils donnent en anglais la formulation suivante : *Which mobile telephone company and tariff is best for each person?* Observons d'emblée qu'il s'agit là d'une question « indéterminée » dont il faut comprendre que, dans le principe, sinon dans

les faits, le travail de détermination est, globalement, à la charge de la « classe » $[X, y]$, et pas seulement de y .

Le cadre institutionnel du PER était celui d'un *atelier mathématique* qui a fonctionné au deuxième trimestre de l'année 2003-2004 puis de l'année 2004-2005 dans deux lycées de Madrid. Dans chacun des cas, X était un groupe de 10 à 14 élèves volontaires de 16-17 ans. L'atelier a comporté 18 séances de deux heures (après la classe), avec, dans les deux cas, l'une des auteures, Esther Rodríguez, comme intervenante – comme y . On notera donc qu'il ne s'agit nullement d'un enseignement par PER dont la mise en place aurait été tentée dans le cadre « normal » de classes ordinaires. Le cadre choisi, dérogatoire à cet égard, n'est cependant pas spécifique aux PER : il est usuel en matière de réalisations didactiques participant d'une « expérimentation pédagogique ».

À propos de la détermination de la question étudiée, notons que, dans la première réalisation (2003-2004), le collectif d'élèves X , guidé par l'intervenante y , a travaillé d'abord à partir de tarifs fictifs apportés par y ; dans une seconde étape, le travail a porté sur des pratiques réelles, avec une plus grande prise de responsabilité de la part des élèves X . De l'analyse proposée par les auteurs, quelques autres faits saillants se dégagent. Ainsi, lors de la première réalisation, l'intervenante y n'a pas su éviter d'empiéter sensiblement sur le *topos* des élèves tel que le dessine la théorie des PER. Elle a mieux contrôlé ses interventions lors de la seconde réalisation, par exemple en se bornant à suggérer, dans un cas où le collectif d'élèves X paraissait bloqué, une étude statistique de la distribution des appels entre les différents tarifs. Une telle observation n'a bien sûr rien pour surprendre : l'intervenante y ne dispose au départ que de la pédagogie d'enseignant qu'elle a connue comme élève, où y est le « maître » qui doit tout agencer et décide de tout ; elle passe difficilement à une pédagogie de l'enquête qui, aujourd'hui, est encore dans les limbes. De façon convergente, l'intervenante y est décrite comme ayant eu quelque mal à « laisser vivre » le processus d'étude et de recherche : ainsi a-t-elle été tentée de faire l'économie du moment du *travail de la technique*, en ignorant pour cela le comportement du collectif d'élèves X , qui avait découvert spontanément l'utilité de ce moment spécifique du processus d'étude et de recherche. Pourtant, le relâchement (relatif) de la pression exercée traditionnellement par l'enseignant en chaque moment de l'étude s'est concrétisé d'heureuse façon en certains cas. Ainsi le problème de l'*institutionnalisation* a-t-il trouvé une solution innovante : la réponse élaborée à la question étudiée a été publiée sur une page Web, le contenu de la page et sa présentation étant précisés de façon concertée par le collectif d'élèves X et l'intervenante y . Plus généralement, dans la seconde réalisation du PER (en 2004-2005), le collectif d'élèves X a davantage assumé la conception et la gestion du parcours, notamment du point de vue de la

planification et du partage des tâches entre équipes constituées en son sein. Comme l'écrivent les auteurs, le transfert de responsabilités visé “cannot take place in a spontaneous and natural way but requires more research and new didactic proposals”, et cela essentiellement du fait de “strong institutional constraints [that] this new didactic contract has to overcome”.

Qu'en est-il du changement éventuel dans le *rapport à la connaissance* et, en particulier, aux connaissances *mathématiques* ? Les auteurs ont procédé à un test *a posteriori* et montré par cela que les élèves avaient acquis une réelle maîtrise du type de problèmes étudié :

They had to solve a comparison of *fixed* phone tariffs with some novelties like a “bonus” (pack of calls at a reduced price) and the payment per seconds during the first minute. The students' performance was good, with an average of 8.5 out of 10 in the first SRC and 8.25 in the second one. (p. 1805)

Un autre test a été employé pour juger de l'effet du travail accompli sur le rapport aux mathématiques (en général) des élèves ; l'épisode et son résultat méritent d'être soulignés :

To analyse the effect of the SRC on the students' beliefs and attitudes, the “CAETI-Trait Thinking Questionnaire” (O'Neil & Schacter 1997) was used. In the first SRC we did not find any difference in the students' results before and after the experience. However, in the second SRC, a student asked if the test dealt with the “mathematics of the current class” or the “mathematics of the SRC”. We then asked the students to answer the test twice: once considering the mathematics done in class and then the mathematics of the SRC. The results showed that the students' beliefs and attitudes concerning the “SRC mathematics” were significantly different from the “class mathematics” in all items. (p. 1805)

On aura noté que, si tant le moment de la réalisation que celui de l'évaluation sont commentés, le moment de la conception et de la construction reste dans l'ombre. Il n'en va pas tout à fait de même, nous allons le voir, dans le deuxième travail que nous avons choisi et que nous examinerons maintenant.

Cosigné par Noemí Ruiz, Marianna Bosch et Josep Gascón (2007), ce travail rend compte de la réalisation d'un PER engendré par la question suivante : *How to make money by selling T-shirts?* Le cadre institutionnel était celui d'un *atelier mathématique* qui a eu lieu au premier trimestre de l'année 2006-2007 dans cinq établissements de l'aire métropolitaine de Barcelone. Suivi par quatre groupes d'élèves de 14-15 ans et par un groupe d'élèves de 15-16 ans, cet atelier comportait 10 ou 11 séances de 50 minutes tenues soit dans la salle de classe habituelle du groupe, soit dans la salle d'informatique de l'établissement, chaque groupe

travaillant avec son professeur de mathématiques habituel. L'article consulté ne décrit que la première partie du travail de l'atelier : les élèves doivent y répondre à une commande (supposée) d'une association de jeunes qui veut savoir comment parvenir à un bénéfice d'au moins 3000 € en faisant fabriquer et en vendant des T-shirts, le coût de production $C(x)$ étant ici supposé affine en x (nombre de T-shirts fabriqués et vendus).

Le bénéfice est donné par $B(x) = px - cx - L$, où p est le prix unitaire, c le coût unitaire de production, L le coût fixe de production. La classe se demande en premier lieu si l'on peut avoir $B(x) \geq 3000$ tout d'abord en augmentant la variable x (question Q_0), ensuite en modifiant seulement l'un des paramètres p , c et L (question Q_1). Dans chacun de ces cas, la considération de « valeurs raisonnables » de la variable ($x < 450$) ou du paramètre considéré ($p < 8$, $c > 1$, $L > 100$) conduit à une réponse *négative*. La classe se demande alors si la modification de *deux* paramètres pourrait faire l'affaire (question Q_2), ce qui va faire apparaître l'importance clé du paramètre dérivé $p - c$. Enfin, on examine la question Q_3 suivante : “*What changes can be applied to the initial conditions ($c = 2,5$, $p = 5,2$, $L = 300$) to obtain 3000 € of benefit selling a “reasonable” number of T-shirts ($x < 450$)?*” Cet examen, réalisé comme les précédents avec la calculatrice en ligne Wiris (<http://www.wiris.com/>), conduira à la condition $p - c \geq \frac{3000 + L}{x}$. Comme on l'imagine, le travail mathématique accompli est important et, surtout, se développe le long de voies fort peu fréquentées dans l'enseignement ordinaire des mathématiques.

Plusieurs traits méritent encore d'être notés (voir l'annexe 4). Tout d'abord, en allégeant notablement certaines contraintes du travail mathématique demandé, l'usage de la calculatrice Wiris permet de donner au PER une forme *exploratoire et expérimentale* et, en même temps, de mieux distinguer entre le *système* étudié (la fabrication et la vente de T-shirts) et le *modèle* qu'on en propose (qu'on étudie à l'aide de Wiris notamment). Ensuite, le PER ne peut se déployer que dans une assez longue durée permettant la poursuite d'objectifs à long terme et les formulations successives de questions plus adéquates, exigence qui se heurte à la culture didactique aujourd'hui encore dominante à l'école, centrée sur l'habitus consistant à ne confier aux élèves guère plus que des micro-tâches. À cet égard, les auteurs brossent un tableau qui rejoint nos propres conclusions :

This was a trait of our instructional proposal: starting with a question that was not immediately solvable but required the construction and progressive enlargement of the models considered. This requirement appeared to be an important obstacle to the experimentation and can be explained, partially at least, as a consequence of the way the study of mathematics is interpreted in secondary schools, that is, in terms of the dominant cultural notion of *study*. It is

in fact a conception clearly compatible with the limited, rigid and isolated character of mathematical organizations studied in such institutions (Bosch, Fonseca, Gascón 2004). It is also reflected in the way students carry out limited tasks and change the activity several times, even during the same session. (pp. 2177-2178)

Par contraste, ces mêmes auteurs notent encore ceci (le sigle MO utilisé ci-après désigne l'expression "Mathematical Organisation") :

On the contrary, our proposal is based on an activity that needs to integrate different mathematical objects in a functional way, working with a set of MOs that usually appear in an incomplete and isolated way. Thus, the type of study designed, with its long-term objectives, the non-definitive answers and the rising of new questions, go against the dominant epistemologic and didactic conception of the teaching and learning of mathematics. (p. 2178)

Enfin, le PER pousse les élèves à passer – difficilement – la frontière entre le numérique, qui est leur *topos* usuel, et le paramétrique – le « fonctionnel » –, qui est classiquement l'apanage du professeur. Plus généralement, il bute sur la distribution traditionnelle des responsabilités entre professeur et élèves et sur l'impuissance du professeur à modifier cette distribution de façon satisfaisante. Ainsi, même si l'introduction de la calculatrice Wiris a effectivement modifié – de façon bénéfique – certaines des contraintes didactiques usuelles, le travail réalisé montre surtout que "a profound change in the didactic contract prevailing in secondary schools is necessary".

Un dernier aspect mérite tout particulièrement d'être souligné : le texte examiné laisse deviner certains aspects du processus de conception et de construction du PER (voir l'annexe 5). Plus précisément, on y saisit l'importance de la question de l'*infrastructure* ayant permis cette construction. On a déjà noté le rôle de la calculatrice Wiris, élément infrastructurel qui joue ici un rôle clé. Mais on notera surtout ce que les auteurs nomment la *funcional-algebraic modelling*, la modélisation « algébrique-fonctionnelle », qui se nourrit de tout un ensemble de travaux réalisés ou animés par M. Bosch et J. Gascón, et sans laquelle, peut-on penser, la conception de ce PER n'aurait pu être menée à bien. Le « moment infrastructurel » est ici clairement apparent.

Le troisième travail sur lequel nous nous arrêterons est dû à Lúdia Serrano, Marianna Bosch et Josep Gascón (2007). Il est relatif à un PER engendré par cette question : *¿Cómo hacer una previsión de ventas?* (Comment réaliser une prévision des ventes ?) Le cadre institutionnel était, là encore, un *atelier de modélisation mathématique*, tenu entre janvier et mars 2007 dans le cadre d'un enseignement d'administration et de gestion des entreprises adressé aux étudiants de première année d'une faculté d'économie de Barcelone. Cette

promotion a été divisée en quatre groupes de 30 à 60 personnes. L'atelier a comporté, selon les groupes, 4 ou 5 séances de 2 heures chacune. Ces séances avaient été précédées d'une série de 4 cours théoriques visant à familiariser les étudiants avec les principales familles de fonctions utilisées pour la prévision de vente (droites, paraboles, cubiques, hyperboles et exponentielles). Au sein d'un groupe, le travail était réalisé en équipes de 3 ou 4 étudiants disposant chacun d'un ordinateur portable ; chaque équipe devait rédiger un rapport hebdomadaire sur son activité. Connaissant les ventes trimestrielles de 7 produits au cours des trois dernières années réalisées par une société de logiciels éducatifs, les étudiants, répondant à une commande de cette société, devaient faire une prévision de ventes pour chaque produit concernant les mois et trimestres à venir.

Une première partie de l'atelier a été consacrée à la recherche d'une fonction qui modélise le plus fidèlement possible la dynamique des ventes. Au vu des résultats obtenus lors de cette première partie – dans laquelle n'émergera pas une solution unique au problème posé –, une seconde partie a porté sur le choix de la famille de fonctions la plus appropriée, avec un critère supplémentaire (portant sur l'évolution des ventes) permettant de « départager » les familles de fonctions solutions trouvées lors de la première partie.

Plusieurs aspects méritent d'être soulignés. Tout d'abord, une partie essentielle des outils mathématiques jugés pertinents par les enseignants ont été présentés *à part, préalablement*, à l'ensemble des étudiants. Il s'agissait en l'espèce d'une infrastructure mathématique « classique », sans laquelle l'étude de la question ne pouvait guère espérer progresser : d'où la décision d'en imposer l'étude aux étudiants concernés, même si, sans doute, cette étude aurait gagné à être décidée par le « groupe » lui-même, de façon motivée, en prenant place au moment fonctionnellement opportun durant le parcours d'étude et de recherche proprement dit.

Comme dans les autres PER examinés, les enseignants en charge de chacun des quatre groupes ont eu des difficultés pour « laisser vivre » le PER : les étudiants n'ont pas pu examiner librement le problème posé, faute d'assez de temps de travail en autonomie, conséquence d'un guidage trop rigide imposé par les enseignants. Chaque groupe devait présenter un rapport hebdomadaire des groupes, les rapports individuels des étudiants et le journal hebdomadaire des séances (où chacun des professeurs décrivait le déroulement de la séance). La réalisation par les équipes d'étudiants des rapports dans lesquels ils devaient synthétiser leurs résultats pour les partager avec les autres équipes a constitué pour eux une grande difficulté, du fait qu'il s'agissait d'un type de tâches en rupture quasi totale avec le contrat didactique actuel. Bien qu'une amélioration ait eu lieu tout au long du parcours grâce au partage (par présentation orale) des rapports, ce qui a permis des critiques pertinentes et

une aide appropriée de la part des enseignants, ces derniers ont eu du mal à laisser les élèves assumer davantage certaines responsabilités qui, habituellement, leur sont assignées exclusivement : génération de nouvelles questions pour approfondir l'étude, planification de l'étude, etc. Ainsi, même si cela apparaît difficile, il semble essentiel de modifier le contrat didactique pour le faire évoluer *hacia una situación de responsabilidad compartida en la que los estudiantes puedan ir adquiriendo cada vez mayor protagonismo en la gestión e incluso dirección del proceso de estudio* – vers une situation de responsabilité partagée dans laquelle les étudiants puissent acquérir une capacité toujours plus grande de se comporter en acteurs de la gestion, voire de la direction, du processus d'étude.

3.5. La clinique des PER : prolongements et perspectives

Les trois PER que l'on vient d'évoquer relèvent d'un patron commun. Tout d'abord, la question génératrice Q (ou $\tilde{Q}$) fait quasi immédiatement sens pour les élèves, ainsi qu'il en va pour les questions « Quel opérateur de téléphonie mobile et quel tarif une personne a-t-elle intérêt à choisir ? », « Comment gagner de l'argent par la vente de T-shirts ? » ou « Comment réaliser une prévision des ventes ? » (les élèves sont dans ce dernier cas des étudiants de première année engagés dans des études supérieures de gestion). Ensuite, cette question est largement indéterminée – des précisions et des données « manquent » – et la déterminer *fait partie du problème*. Enfin, il en est de même de *l'outillage* pour enquêter sur la question proposée, dont l'indication est très lâche – le titre de l'atelier où a lieu le PER précise seulement qu'une partie essentielle de cet outillage devrait être de nature mathématique. En fait, dans tous les cas, il s'agissait d'élaborer un *modèle mathématique* (ou une *famille* de tels modèles) modélisant le coût de l'usage d'un téléphone mobile, le bénéfice tiré de la vente de T-shirts ou les ventes d'un produit donné, et cela afin de prendre certaines décisions.

Cette catégorie de PER paraît clairement déterminée et se trouve sans doute appelée à jouer un rôle charnière dans l'évolution de l'enseignement des mathématiques vers un enseignement par PER. Examinée à la lumière de la notion d'enquête *codisciplinaire*, toutefois, elle laisse voir une *préférence disciplinaire* que seul le cadre institutionnel justifie *a priori*. À propos du PER relatif à la question « Comment gagner de l'argent par la vente de T-shirts ? », Yves Chevallard (2009b) note ceci (en désignant le « paradigme du questionnement du monde » par l'appellation abrégée de « paradigme questionnant ») :

La qualité du travail présenté (...) ne peut faire qu'une contrainte redoutable n'exerce à terme ses effets : celle qui impose la distinction de « vrais » enjeux didactiques institutionnalisés dans la discipline dont on se réclame (par exemple, ici, le « travail » mathématique du modèle

algébrique, inégalité comportant trois paramètres) et d'enjeux didactiques *occasionnels*, opportunistes, aussitôt répudiés (ici, d'analyse économique simple). Pour qu'il en aille autrement, il faudrait entrer franchement dans le paradigme questionnant, ce qui conduirait, par exemple, à distinguer clairement un *secteur d'études* qui pourrait s'intituler « Modèles économiques possibles et impossibles » (*Possible and Impossible Business Models*), ou encore « Comment gagnent-ils de l'argent (ou pas) ? » (à condition que cette question ait été retenue et déclarée), et dont l'étude ferait l'objet d'une *dévolution différenciée et coordonnée* entre plusieurs champs disciplinaires (dont les mathématiques). Dans un tel cadre, les praxéologies « économiques » utiles ou indispensables, si frustes soient-elles, devraient compter, dans le tableau des résultats didactiques du PER, tout autant que les praxéologies mathématiques émergentes.

La perspective dessinée ici reste, nous semble-t-il, largement à construire. C'est pourtant dans cette perspective que nous voudrions ajouter à ce qui précède la mention d'un « terrain clinique » à la création duquel nous avons modestement été associée durant l'année 2008-2009. Sous le nom d'*atelier « Enquêtes sur Internet »* a en effet commencé de fonctionner un dispositif de réalisation et d'observation de PER dirigé par Yves Chevallard dans un collège marseillais, le collège Vieux Port. L'action, entreprise à l'instigation d'un professeur du collège, Christophe Bergèse, prenait place dans un ensemble d'actions du plan « Ambition réussite » dans lequel entrait le collège (il y avait en France, en 2008-2009, 254 collèges publics et 12 collèges privés concernés par ce plan, dont 24, soit 9 %, se trouvaient à Marseille). Le collège Vieux Port est un petit collège (il compte moins de 400 élèves) doté de moyens relativement importants du fait des difficultés qu'il doit affronter : le taux de réussite au brevet des collèges y a été en 2008 de 58,8 %, alors qu'il était de 81,4 % en moyenne dans l'académie et de 63,2 % en moyenne dans les collèges « Ambition réussite » de l'académie. L'atelier « Enquêtes sur Internet », qui s'inscrivait dans un partenariat avec l'UMR ADEF (Université de Provence / INRP) dans le cadre d'un « Pôle d'excellence » scientifique, a mobilisé, outre Yves Chevallard et Christophe Bergèse, Caroline Ladage, maître de conférences associée à l'université de Provence, et nous-même, qui y avons assuré les enregistrements vidéo. Cette petite équipe a en outre bénéficié du concours technique de l'informaticien du collège (Jean-Baptiste Lignon) ainsi que de la présence d'une assistante pédagogique. Afin de situer rapidement l'activité de l'atelier, nous reproduisons ci-après un extrait d'une fiche d'auto-évaluation que son responsable a eu à remplir en fin d'année.

4. Objectifs

– permettre aux élèves de devenir les acteurs d'une « pédagogie de l'enquête » : *atteint*

– familiariser les élèves avec les principes et les savoir-faire d'un usage raisonné d'Internet :
atteint

– initier des professeurs à la conception et à la réalisation d'actions pédagogiques de ce type :
non atteint

5. Ce qui a favorisé et/ou ce qui a entravé l'action

+ Accueil bienveillant de la direction de l'établissement et moyens dévolus à l'action (salle multimédia, créneau horaire adapté), bonne volonté des élèves, concours sans faille d'une petite équipe dont les membres (« extérieurs » et « intérieurs ») ont vite appris à travailler ensemble.

– Ergonomie de la salle multimédia utilisée qui, conçue pour le travail individuel des élèves, a pu freiner le travail collectif visé.

Une présentation détaillée et une analyse approfondie de la vie de l'atelier feront l'objet d'un travail à venir. Mais nous donnerons ici brièvement quelques éléments descriptifs et analytiques.

Dix élèves de 4^e, tous volontaires, ont régulièrement suivi l'atelier qui s'est déroulé au long de 9 séances de 2 heures, le vendredi de 13 h 30 à 15 h 30, dans un créneau horaire habituellement dévolu à la préparation du B2i. Chaque élève disposait d'un ordinateur du collège connecté à Internet. Grâce au réseau local, les intervenants pouvaient envoyer aux élèves des fichiers de données ou récupérer les fichiers dont le contenu était élaboré par les élèves. Par ailleurs, deux ordinateurs pilotés par l'équipe d'intervenants étaient reliés à des vidéoprojecteurs afin de permettre un travail collectif sur des documents apportés par l'animateur de la séance ou découverts par des élèves au cours de leurs recherches. La problématique de travail de l'atelier a été présentée par l'intervenant (Y. Chevallard) lors de la première séance : l'atelier est consacré à étudier des *questions*, auxquelles on s'efforce d'élaborer *collectivement* une *réponse*. Lors de la troisième séance, reprenant cette problématique, l'intervenant insistera sur les objectifs de formation : 1) il s'agit d'apprendre à élaborer une réponse à une question que l'on se pose, ou plutôt qui se pose à vous ; 2) cela doit être fait avec un niveau d'exigence qui écarte le plus possible le risque de s'arrêter sur une réponse fausse ou très approximative, avec les conséquences fâcheuses que cela peut entraîner (comme le fait de propager autour de soi des rumeurs infondées) : il faut donc *vérifier* les réponses trouvées. L'intervenant justifie en outre cet objectif de formation : en classe, dit-il, les réponses sont souvent apportées « toutes faites » par les professeurs ; ce sont eux qui ont préparé et vérifié les réponses qu'ils proposent aux élèves et, par conséquent, ce sont eux qui sont les garants de la validité et de la valeur de ces réponses. Mais plus tard dans

la vie, et même dès maintenant, dans les activités extérieures aux disciplines enseignées au collège, il n'y aura pas de professeurs pour apporter des réponses validées et il appartiendra donc aux gens concernés (en général un collectif, comme des collègues de travail, une équipe sportive, une famille, etc.) de rechercher les réponses les plus sûres et les plus en adéquation avec leurs besoins, et cela sans « polluer » autrui. Ce travail consistant à apporter des réponses solides aux questions qui se posent à nous doit être appris dès aujourd'hui, parce que cela doit devenir en quelque sorte un réflexe ; mais la chose demande du travail et de la rigueur.

Les enquêtes conduites dans l'atelier vont se concrétiser en des PER praxéologiquement *ouverts*. Au cours des 18 heures ouvrées, l'atelier a travaillé sur les quatre questions que voici :

1. Un *milliard* (de dollars), c'est *mille* millions (de dollars) ; mais qu'est-ce qu'un *trillion* (de dollars) ?
2. Pourquoi les insectes de nuit se précipitent-ils sur les sources de lumière ?
3. Pourquoi l'oignon fait-il pleurer ?
- 4 Est-il vrai que les batailles sont devenues plus meurtrières au XIX^e siècle ?

Ces questions ont été choisies l'une après l'autre sans autre considération que le fait de faire sens assez facilement pour les élèves. Signalons pour mémoire que, sans que cela ait été recherché *a priori*, leur étude a conduit à quatre « cas de figure » différents quant à la manière de produire une réponse. Chacune de ces quatre questions a été travaillée pendant *une longue période de temps* : il s'agissait d'apprendre à ne pas s'arrêter au premier résultat trouvé. À titre d'illustration, considérons ici, sommairement, le cas de la première question ci-dessus : le Robert de poche répond sobrement qu'un trillion, c'est un milliard de milliard, soit 10^{18} . Alors que, dans des conditions traditionnelles, l'enquête aurait pu s'arrêter là, la réponse élaborée collectivement (nous la reproduisons ci-après) traduit bien, rétrospectivement, le *long parcours* nécessaire à la mise au jour des informations rassemblées ici en une synthèse que l'on ne trouvera nulle part ailleurs.

Question. Un *milliard* (de dollars), c'est *mille* millions (de dollars) ; mais qu'est-ce qu'un *trillion* (de dollars) ?

Réponse.

- En français actuel, un trillion est *un milliard de milliards* ou *un million de billions* ou *un million de millions de millions* = 10^{18} . (Un billion est un million de millions ou mille milliards.)

- En anglais américain, un *trillion* vaut *mille milliards*, soit un *billion* en français actuel ; en anglais, un *billion* vaut un milliard en français.
- Dans le dictionnaire de Littré, un billion était synonyme de milliard (10^9) : il avait donc le même sens qu'a le mot *billion* en anglais américain. De même, le mot trillion (10^{12}) avait le même sens qu'a ce mot en anglais américain d'aujourd'hui.
- En français, il y a eu un changement entre le système de Littré et le système actuel : on a suivi la proposition (non adoptée par elle) de la conférence générale des poids et mesures de 1948. C'est ainsi que le mot trillion qui désignait autrefois 10^{12} s'est mis à désigner ensuite 10^{18} .
- Le mot « trillion » a reçu en français le sens légal de 10^{18} par un décret du premier ministre du 3 mai 1961 entré en vigueur le 1^{er} janvier 1962. Depuis cette date, parler par exemple de « 3,69 trillions » c'est parler, selon la loi, du nombre qu'on écrit aussi $3,69 \times 10^{18}$.

Le matériel empirique recueilli au cours de l'atelier comporte tant les *scénarios didactiques* des séances que les *vidéos* de ces séances et les *notes* prises pour chacune d'elles, à quoi s'ajoute, pour chaque séance encore, le *journal de la séance* rédigé par le responsable de l'atelier et adressé à l'ensemble des participants. C'est notamment à partir de ce quadruple corpus que, au cours de l'année qui vient, nous nous efforcerons d'approfondir notre travail en clinique des PER.

À ce stade de notre recherche, toutes les observations – et les analyses qui en découlent – pointent vers deux faits essentiels. Tout d'abord, qu'il s'agisse d'enquêtes en partie finalisées (comme dans les trois PER « espagnols ») ou essentiellement ouvertes (comme dans l'atelier « Enquêtes sur Internet »), une « formation par PER » *est possible et viable*, du moins sous des conditions appropriées (dont la reproductibilité dans une « classe ordinaire » reste bien sûr à étudier). Il s'agit là d'un *acquis décisif*. Ensuite, dans un cas comme dans l'autre, la transition du paradigme de la visite des savoirs et de la pédagogie d'enseignant à un paradigme « questionnant » servi par une pédagogie de l'enquête adéquate constitue aujourd'hui un *problème ouvert*, dont nous avons tenté dans ce travail d'explicitier les aspects les plus saillants.

CONCLUSION

On évoque régulièrement, dans le monde de l'enseignement, l'existence d'une « perte de sens » touchant l'école, le travail scolaire, ses objets et ses objectifs et affectant en priorité les élèves sans pour autant épargner les professionnels de l'enseignement eux-mêmes. L'examen de ce verdict conduit, non à le réfuter, mais à en souligner le... déficit de sens : parler de « perte de sens » semble être, dans la majorité des cas, une manière d'énoncer une difficulté éprouvée, sans toutefois en identifier la nature précise. L'observation des déclarations concernant plus particulièrement l'enseignement *des mathématiques* montre les auteurs consultés soucieux d'abord du *risque* de « perte de sens » ainsi que de la *fragilité* du « sens », qui expliquerait que ce sens puisse se « perdre » sous l'effet de causes très diverses. Dans la profusion des facteurs allégués à cet égard, on peut cependant distinguer plusieurs ensembles de causes susceptibles d'engendrer des « pertes de sens ». Un premier ensemble de causes supposé, C_1 , serait coextensif au phénomène « moderne » de réduction des contenus mathématiques enseignés à des jeux de langage « formels ». Un deuxième ensemble, C_2 , est associé par certains auteurs aux pratiques de « morcellement » de la matière à enseigner, pratiques engendrées elles-mêmes par la volonté d'en faciliter la réception par les élèves mais qui, *in fine*, se révéleraient ainsi fortement contre-productives. À rebours de beaucoup d'analyses spontanées, un troisième ensemble, C_3 , désigne comme causes possibles de « perte de sens » certaines pratiques d'enseignement visant à tout prix à... « donner du sens » aux apprentissages mathématiques, oubliant en cela que la productivité du travail mathématique, même aux plus humbles niveaux, est foncièrement corrélée à l'aptitude « à oublier le sens pour tirer les bénéfices des formalisations et des généralisations » (Guy Brousseau). Enfin, un quatrième ensemble, C_4 , renvoie à un facteur qui, en vérité, est au cœur de la théorie des PER : la propension à considérer les objets mathématiques enseignés comme des réalités « en soi et pour soi », et l'absence corrélative de tout souci véritable à l'endroit de leurs *usages* authentiques.

Quelles que soient l'imprécision du diagnostic et les divergences (non débattues) quant à l'étiologie du mal, certains auteurs s'attaquent frontalement au phénomène de la « perte de sens » en proposant des dispositifs visant à annuler l'effet de tel ou tel ensemble de causes supposé. Ainsi en va-t-il par exemple du « débat scientifique » ou de la « méthode Baruk » pour l'ensemble C_1 et surtout d'un vaste ensemble de travaux inspirés de la théorie

des situations didactiques (dont les travaux autour de la notion d'AER en TAD) pour ce qui est de l'ensemble C_3 . De plus, depuis deux décennies au moins, sont montés en puissance au sein de l'école ou dans son environnement proche des patrons d'organisation pédagogique et didactique qui, sans s'attaquer frontalement au phénomène de « perte de sens », ne devraient pas manquer de jouer un rôle à cet égard dans un tel combat. Ainsi en va-t-il de l'opération *La main à la pâte* à l'école primaire, des IDD au collège, des TPE au lycée d'enseignement général (et des PPCP au lycée professionnel), ou encore des TIPE dans les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques, pour ce qui concerne les sciences en général (et les autres disciplines). Ainsi en va-t-il encore, pour les mathématiques plus spécifiquement, des pratiques dites du *problème ouvert* ou du mouvement *MATh.en.JEANS* par exemple.

Sans nullement s'opposer aux intuitions fondatrices de telles innovations, mais en les élaborant dans son cadre propre, la TAD propose de la situation actuelle une analyse fondée sur le constat de la domination scolaire actuelle du *paradigme de la visite des savoirs*, qui conduit à une monumentalisation des savoirs enseignés et à leur déproblématisation épistémologique et didactique corrélative. Ainsi peut-on visiter le triangle sans jamais s'interroger sur ses *raisons d'être* en général, et sur ses raisons d'être là en particulier, sans jamais saisir l'identité profonde entre cet objet et la notion de *repère du plan*, ou, aussi bien, le lien entre triangle (dans le plan) et tétraèdre (dans l'espace). Or, ici comme ailleurs, ce lien ou cette identité apparaisse clairement dès qu'on soulève la question à laquelle ces « objets » monumentalisés permettraient de répondre : *Comment repérer un point (ou un ensemble de points) dans l'espace ?* (Il faut pour cela trois points non alignés dans le plan, et quatre non coplanaires dans l'espace.) D'une façon générale, la TAD identifie alors « perte de sens » d'un objet et « oubli », voire « refoulement » de ses raisons d'être, c'est-à-dire de son *utilité*, de ses *emplois*, ou encore, de façon équivalente, des *questions* auxquelles cet objet permet d'apporter réponse ou dont il constitue la réponse. La lutte contre cette « perte de sens » passe donc par la promotion de types de dispositifs qui mettent les *questions* « au pouvoir » et en font découler tout le reste. Les savoirs réapparaissent alors dans leur fonctionnalité, c'est-à-dire comme des réponses apportées aux questions posées ou des outils praxéologiques utilisés pour fabriquer ces réponses.

Le premier dispositif ainsi conçu – dans la filiation de la TSD – a été celui des AER : une AER donnée vise en principe à faire rencontrer, au cours même du travail à accomplir pour répondre à une certaine question, telle entité praxéologique fixée à l'avance. La TAD a élaboré à ce propos un ensemble théorique important, celui des *moments de l'étude* ou *moments didactiques*, qui fournit un cadre directeur à un enseignement « par AER ». Mais,

dans la pratique, un tel enseignement bute sur des difficultés qui vont rapidement conduire à l'émergence de la notion de PER : l'enseignement par AER demande en effet, pour chaque entité praxéologique que l'on se propose de faire rencontrer par ce moyen, une AER spécifique, presque toujours « nouvelle » en bien de ses aspects, ce qui est à la fois coûteux en invention didactique (pour la profession) et en acculturation cognitive (pour les classes). Formellement, une AER peut être regardée comme un PER particulier ; mais la notion de PER *généralise* la notion d'AER : un PER est suscité par une question souvent plus ou moins indéterminée, qui pourra engendrer, parfois presque à volonté, mais de façon organique, donc non opportuniste et non artificielle, des questions « déterminées » dont l'étude conduira à rencontrer une multiplicité d'entités praxéologiques. Pour qu'il en soit ainsi, toutefois, les PER exigent, plus encore que les AER proprement dites, une révolution didactique qui modifie sensiblement tout à la fois la mésogenèse (dans un PER, ainsi, le milieu est en principe « ouvert » et sa constitution n'est pas *a priori* limitée), la topogenèse (la composition du milieu n'est plus le fait du seul professeur, par exemple) et la chronogenèse, qui s'allonge en même temps que croît le temps d'étude et de recherche et qu'augmentent les rencontres praxéologiques faites par la classe. Selon la TAD, révolution didactique et révolution épistémologique sont promises à aller de pair : la première ne peut pleinement se développer que par un changement de paradigme de l'étude scolaire conduisant à l'avènement du paradigme *du questionnement du monde*, qui intègre sans l'abolir, tout en changeant la signification, le paradigme aujourd'hui dominant de la visite des savoirs. Dans une telle perspective, la notion de PER va s'affranchir de certaines contraintes scolaires traditionnelles : un PER suscité par l'étude d'une question, ou plutôt l'*enquête* menée sur une question (et qui se matérialise en un PER non entièrement déterminée par cette seule question) n'a pas à être finalisée par la rencontre avec des entités praxéologiques désignées à l'avance : d'enquête *praxéologiquement finalisée*, elle devient ainsi enquête *praxéologiquement ouverte*. Du même mouvement, elle tend à s'émanciper du confinement monodisciplinaire (par exemple mathématique) installé dans l'enseignement scolaire et devient ainsi enquête *codisciplinaire*, c'est-à-dire pouvant, le cas échéant, faire travailler ensemble des entités praxéologiques empruntées à plusieurs disciplines. Cette évolution, inspirée au départ par l'exemple des TPE, a impulsé alors l'élaboration d'un corpus théorique venu enrichir la théorie des moments, notamment avec la mise au jour des dialectiques de l'enquête codisciplinaire.

Le dispositif des PER a reçu à ce jour une diffusion limitée mais déjà suffisante pour qu'une *clinique des PER*, indispensable à une *didactique* et à une *ingénierie* de l'enquête codisciplinaire et des PER, prenne son essor. Le travail présenté ici, centré sur la genèse et la

réception de la notion de PER, se veut une contribution, sous la forme d'une *étude préparatoire*, à la clinique des PER. À cet égard, un certain nombre de résultats présentés ici méritent, nous semble-t-il, de figurer dans un savoir clinique des PER, au moins à titre de conjectures éclairant et orientant le travail à venir. Nous avons ainsi que, en tant que dispositif réputé novateur, les PER peuvent provoquer dans la profession les attentes positives les plus diverses en même temps que les suspicions les plus inattendues – dont celle de provoquer une « perte de sens » *sui generis*. Nous savons aussi que des contraintes bien réelles s'opposent à une réception et à une intégration praxéologiques aisées, par la profession, d'un enseignement (ou d'une formation) *par PER*. Une enquête empirique a mis ainsi en lumière les malentendus que suscite l'emprise incontestée, sur des professeurs débutants, du paradigme scolaire de la visite des savoirs et de la *pédagogie d'enseignant* en laquelle ce paradigme se trouve aujourd'hui comme naturalisé. Une autre enquête portant sur la réalisation effective de PER, dans des contextes institutionnels adéquatement modifiés, montre cependant, en sens contraire si l'on peut dire, que, par delà les altérations que la pédagogie d'enseignant ne manque pas d'imprimer, de façon plus ou moins subreptice, à la réalisation de tel ou tel scénario de PER – qu'il se présente comme finalisé ou comme délibérément ouvert –, une formation par PER apparaît *possible*, et viable sous des conditions qu'il convient sans doute de mieux préciser.

Ce type d'études devrait faire l'objet de notre part, au cours de l'année à venir, d'un développement important empruntant différentes voies. Tout d'abord, afin de « travailler » les résultats déjà obtenus à cet égard, une enquête sur la réception de l'idée et de la réalité d'un enseignement par PER sera menée à bien auprès des professionnels impliqués à un titre ou un autre dans le mouvement des PER (une pré-enquête a d'ores et déjà été réalisée) : cette enquête complètera notamment des données recueillies au cours de la récente école d'été de didactique des mathématiques (Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009) dans le cadre d'un groupe de travail animé par Marianna Bosch. Ensuite, nous poursuivrons le travail d'analyse des enquêtes codisciplinaires ayant eu (ou qui auront) pour cadre l'atelier « Enquêtes sur Internet » implanté dans un collège marseillais. Enfin nous nous engagerons, avec d'autres et sous la direction d'Yves Chevallard, dans un travail au long cours de conception et de construction de PER, en portant notamment notre attention sur la question fondamentale des *infrastructures* indispensables à la création et à la viabilisation, dans des contextes institutionnels divers, de pratiques de formation par PER. Bien entendu, l'effort engagé à l'occasion de ce travail pour réunir l'ensemble le plus vaste possible de textes publiés par les acteurs du « mouvement des PER » sera poursuivi : il devrait aboutir à rendre disponible une bibliographie annotée du sujet.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Action Sciences. (2001, 3 octobre 2007). Compte-rendu d'une entrevue du collectif Action Sciences au Ministère de la Recherche le mercredi 3 octobre 2007 à 14 h.
<http://www.sfc.fr/ActionSciences/CR3oct07-1.pdf>
- Amade-Escot, C. (2001). De l'usage des théories de l'enseignant. Questions de l'étude des contrats didactiques en éducation physique. In A. Mercier, G. Lemoyne & A. Rouchier (Eds), *Le génie didactique* (pp. 23-42). Bruxelles : De Boeck.
- Arsac, G., Germain, G. & Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème* (1991). Lyon : IREM.
- Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : CRDP.
- Batisse, J.-F. (2008, septembre). *Mathématiques*.
<http://afev-alsace.net/docs/mathematiques.pdf>
- Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Using *research and study courses* for teaching mathematical modelling at university level. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Éds), *Proceedings of CERME 5* (pp. 2050-2059). Nicosie : Université de Chypre.
http://ermeweb.free.fr/CERME%205/WG13/13_Barquero.pdf
- Blitman, S. (2008, juin). Les maths en débat. *Le Monde de l'éducation*, 370, 66-67.
http://www-irem.ujf-grenoble.fr/irem/Debat_scientifique/Debat_maths_MdE.pdf
- Boule, F. (2002, février). *Les difficultés rencontrées par les enfants en mathématiques*.
<http://www.lepontet.ien.84.ac-aix-marseille.fr/webphp/archive/cpc/Groupe1E/DIFFICULTESmath.pdf>
- Breut M., Chollet R. & Loiseau L. (s.d.). *Notre regard*.
<http://sesa-ensemble.fr/accueil.php>
- Brousseau, G. (1997). Éviter les échecs prématurés : quelles conditions ? quelles actions ? quelles limites ? In *Mathématiques de base, pour tous ? Tous les enfants peuvent-ils connaître la réussite en mathématiques en début de scolarité ?* Lyon : Aléas-Editeur.
- Brousseau, G. (2003). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*.
http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf
- Bru, M. (2006). *Les méthodes en pédagogie*. Paris : PUF.
- Charpak, G. (1995, 25-26 novembre). Entretiens avec les éditions Nathan à la Sorbonne (2007).
http://www.lamap.fr/?Page_Id=1005

- Chevallard, Y. (2001, 25 mars). *Les TPE comme problème didactique*. Communication au Séminaire national de didactique des mathématiques, Paris.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=14
- Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. Maury S. & M. Caillot (Éds), *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104). Paris : Éditions Fabert.
- Chevallard, Y. (2004a). *Séminaires de didactique des mathématiques pour les PCL2*. IUFM d'Aix-Marseille.
- Chevallard, Y. (2004b). *Les trois principes structurants des PER* [Document de travail]. IUFM d'Aix-Marseille.
- Chevallard, Y. (2005). Étudier et apprendre en mathématiques : vers un renouveau. *Les sciences aujourd'hui. La recherche, les métiers, les formations* (pp. 55-56). Lognes : Onisep.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=68
- Chevallard, Y. (2007a, juillet), Les mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique. *Bulletin de l'APMEP*, 471, 439-461.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=110
- Chevallard, Y. (2007b). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. Javier García (Éds), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica* (pp. 705-746). Universidad de Jaén.
- Chevallard, Y. (2008). *Journal du séminaire TAD/IDD 2007-2008*.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=131
- Chevallard, Y. (2009a). *Cours de didactique fondamentale 2008-2009*.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=136
- Chevallard, Y. (2009b). *Journal du séminaire TAD/IDD 2008-2009*.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=140
- Chevallard, Y. (2009c). *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD*. [À paraître]
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=164
- Chevallard, Y. & Cirade, G. (2009). Pour une formation professionnelle d'université. Éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et formation pour les professions de l'éducation*, 60, 51-62.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=149
- Deledicq, A. (2003). Que sont et à quoi servent les mathématiques ? *PLOT*, 104, nouvelle série 1, 2-7.
http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/02_La_parole_a.pdf

- Demeuse, M., Strauven, C. (avec Roegiers, X.). (2006). *Développer un curriculum d'enseignement ou de formation*. Bruxelles : De Boeck.
- Duchet, P. & Audin, P. (1996). De la recherche à la formation : MATH.en.JEANS, chercher, comprendre, aimer les mathématiques.
http://mathenjeans.free.fr/amej/mej_quoi/rechform.html
- Dunand, P. (1998, mars). Compte rendu d'une conférence donnée par Roland Charnay à Cognin le 3 décembre 1997 sous le titre *Les mathématiques aux cycles I et II*.
http://educ73.ac-grenoble.fr/nectar/nectar_enseignant/docs_pedas/bcu86_maths_cycles1_2/index.php
- Durand, C. & Legrand, M. (avec Douady, J.). (2009, février). Stage PPSE : Pratiques pédagogiques en Sciences (math, physique, mécanique, STU). Problématiques. *CIES Grenoble*.
http://www-cies.ujf-grenoble.fr/?rep=statique&page=stage&id=78&categorie=&ouvert_non_moniteur=1&PHPSES_SID=6ce041477e196240a1d2605e59641090
- Exemples de problèmes ouverts pour le cycle 3. Site de l'académie de Nice.
<http://www.ac-nice.fr/ienvence/pedagogie/math/problouvert.pdf>
- Eysseric, P. (2001). *Les « classes mathématiques » et la liaison cycle 3-Sixième*.
http://peysseri.club.fr/Poste%20de%20travail/Ressources/Actes_des_colloques_annuels_d/Tours%202001/LesClassesMaths.htm
- Flückiger, A. (avec Loïc Maisonneuve). (1999, novembre). *Sens et algorithmes*.
<http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/APMEP/regionale/gerardmer/rtf/VA07.rtf>
- Girodet, M.-A. & Duquesne-Belfais, F. (2008, 8 octobre). *Les apprentissages numériques et leurs obstacles* [Diaporama].
http://www.ia85.ac-nantes.fr/servlet/com.univ.collaboratif.utils.LectureFichiergw?CODE_FICHER=1225898312966&ID_FICHE=151264
- Inspection pédagogique régionale de l'académie de Lyon. (s.d.). *Problématique et définition du sujet en TPE*.
http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/reformes/lycees/tpe/aide_tpe/problematique.html
- Joutard, P. (1989). *Rapport sur l'évolution du collège*.
<http://education.devenir.free.fr/Documents/joutard.pdf>
- Krémer, P. (2008, 12 septembre). Stella Baruk, le goût des maths, une affaire de langue. *Le Monde*.
http://tice.iufm-martinique.fr/capesmaths/documents/Divers/Stella_Baruk.doc

- Krir, M. (2007). *Concours du second degré. Rapport de jury. Session 2007. CAPES externe. Mathématiques*. Paris : Ministère de l'Éducation nationale et ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.
<http://capes-math.org/2007/rapport2007.pdf>
- Kuntz, G. (2002, janvier). Équations différentielles : la perte du sens n'est pas sans risques. *Repères-IREM*, 46, 107-115.
<http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/46kuntz.pdf>
- L'épreuve commune de TIPE aux concours (1997). Marseille : Lycée Thiers.
<http://www.lyc-thiers.ac-aix-marseille.fr/webphp/prepas/tipe.htm>
- Les parcours diversifiés en mathématiques. (1997). Académie de la Réunion.
<http://icosaweb.ac-reunion.fr/RsrcPeda/Cinq/Docs/prgms/page02/ParcDiv.pdf>
- Ligue de l'enseignement (2005). *Refonder l'école pour qu'elle soit celle de tous*.
http://www.laligue-alpesdusud.org/html/dossiers/dossier_ecole/ecoledetous_lorient_ag2005.html
- Martin-Deschamps, M. (1999, juillet). Mot de la Présidente. *Gazette des mathématiciens*, 80, 2-3.
http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/1999/80/smf_gazette_80_2-3.pdf
- MATh en JEANS. (2008, 10 août). Wikipédia, L'encyclopédie libre.
http://fr.wikipedia.org/wiki/MATh_en_JEANS
- Matheron, Y., Desnavres, C., Gaud, D., Mercier, A., Noirfalise, R. & Roditi, É. (2007, 15 novembre). Apprentissages Mathématiques et Parcours d'Études et de Recherches pour l'Enseignement Secondaire. *EducMath* [Site de l'INRP].
<http://educmath.inrp.fr/Educmath/partenariat/partenariat-inrp-07-08/amperes/>
- Matheron, Y. (2009). Conception et Diffusion d'Activités Mathématiques et de Parcours d'Étude et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire. Proposition pour l'atelier « Ressources pour l'enseignement des mathématiques dans tous les états, de la conception à la diffusion » des Journées Mathématiques de l'INRP les 10 et 11 juin 2009.
http://educmath.inrp.fr/Educmath/partenariat/math_inrp/jmj09/ateliers/proposition_cdampere_gr_3v2.pdf
- Meirieu, P. (1995). *Violences à l'École : le déni de la pédagogie*.
http://www.meirieu.com/POLEMIQUES/violence_1995.pdf
- Mehl, S. (s.d.). Démarche scientifique, problème ouvert et (mauvaise) humeur... *Chronomath*
http://serge.mehl.free.fr/anx/pb_ouvert.html
- Ministère de l'Éducation nationale [MEN]. (1999). SEGPA. Mathématiques. Paris : CNDP.
http://www.cndp.fr/textes_officiels/college/programmes/segpa/Maths.pdf

- Ministère de l'Éducation nationale [MEN]. (2000a, 20 janvier). Rentrée 2000 dans les écoles, collèges et lycées d'enseignement général et technologique. *BOEN, Année 2000*(3), 117-142.
<http://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2000/3/rentree.pdf>
- Ministère de l'Éducation nationale [MEN]. (2000b, 29 juin). Le projet pluridisciplinaire à caractère professionnel. Classes de terminale BEP et de baccalauréat professionnel. *BOEN, Année 2000*(25).
<http://www.education.gouv.fr/bo/2000/25/encart.htm#projet>
- Ministère de l'Éducation nationale [MEN]. (2002, 18 avril). Préparation de la rentrée 2002 dans les collèges et mise en œuvre des itinéraires de découverte. *BOEN, Année 2002*(16).
- Naudy, G. (2008, 19 août). *Devenir enseignant-formateur. À travers l'exemple de l'histoire-géographie et ECJS (enseignement civique, juridique et social)*.
http://www.legrainasbl.org/article.php?id_article=107
- Noël, G. (2002, août). Pourquoi, pour qui enseigner les mathématiques ? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes, au XX^e siècle, en Belgique. *ZDM*, 34(4), 110-119.
<http://www-leibniz.imag.fr/EM2000/Actes/Conferences/NOEL.pdf>
- Noël, G., Cazzaro, J.-P., Pourbaix, F. & Tilleuil, P. (2001). *Structurer l'enseignement des mathématiques par les problèmes*. Bruxelles : De Boeck.
- Open problem. (2009, 2 juillet). *Wikipedia, The Free Encyclopedia*.
http://en.wikipedia.org/wiki/Open_problem
- PageRank. (2009, 25 août). *Wikipedia, The Free Encyclopedia*.
- Peltier, M.-L. (2007, 9 mai). *Enseigner en ZEP à l'école élémentaire : entre tensions et bonnes intentions le cas des mathématiques*.
http://carep.ac-rouen.fr/IMG/pdf/MLPeltier_enseigner_20en_20ZEP_9mai07.pdf
- Pétry, A. (2006, 5 avril). *Enseigner des mathématiques : compromis entre sens et formalisme. Résumé* [Conférence donnée à l'Université de la Rochelle].
<http://ww3.ac-poitiers.fr/math/prof/info/index.htm>
- Pourtois, J.-P. (1991). *La démocratisation de l'enseignement aura-t-elle lieu ?*
http://www.wallonie-en-ligne.net/Wallonie-Futur-2_1991/WF2-07_Pourtois-J-P.htm
- Publimath. *Fiche APL03001* [relative à Deledicq, 2003]
<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/APL03001.htm>
- Rey, A. et al. (Éd.). (1993). *Dictionnaire historique de la langue française*. Paris : Dictionnaires Le Robert.
- Rodríguez, E., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). An Anthropological Approach to Metacognition: the "Study and Research Courses". In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Éds), *Proceedings of CERME 5* (pp. 1798-1807). Nicosie : Université de Chypre.

- http://ermeweb.free.fr/CERME%205/WG11/11_Rodriguez.pdf
- Rodríguez, E., Bosch, M. & Gascón, J. (2008). A networking method to compare theories: metacognition in problem solving reformulated within the anthropological theory of the didactic. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 287-301.
- <http://www.springerlink.com/content/ck320m61704357t2/>
- Ruiz, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). The functional algebraic modelling at Secondary level. Dans Pitta-Pantazi D. & Philippou G. (Éds.), *Proceedings of CERME 5* (pp. 2170-2179). Nicosie : Université de Chypre.
- http://ermeweb.free.fr/CERME%205/WG13/13_Ruiz.pdf
- Saint-Raymond, C. (2002, octobre). *La calculatrice au collège*.
- http://maths.creteil.iufm.fr/Second_degre/module_info/calculatrice_college.htm
- Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). “Cómo hacer una previsión de ventas”: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. Communication présentée au II^e Congrès international sur la Théorie Anthropologique du Didactique (Uzès, France, 31 octobre-3 novembre 2007).
- http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/25%20-%20Serrano_Bosch_Gascon_congres_TAD_2.pdf
- Stella Baruk. (2009, 20 janvier). Wikipédia, L'encyclopédie libre.
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Stella_Baruk
- Travail d'initiative personnelle encadré. (2009, 5 juillet). Wikipédia, L'encyclopédie libre.
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Travail_d%27initiative_personnelle_encadr%C3%A9
- Travaux personnels encadrés. (2009, 17 juin). Wikipédia, L'encyclopédie libre.
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Travaux_personnels_encadr%C3%A9s
- Vergne, G. (2008). *Réforme du lycée : un remède pire que le mal ?*
- <http://skhole.fr/r%C3%A9forme-du-lyc%C3%A9e-un-rem%C3%A8de-pire-que-le-mal>

ANNEXES

1. Glossaire

Chronogenèse. Genèse du temps didactique c'est-à-dire du temps de la construction praxéologique.

Clinique. En TAD, ce terme est englobant : toute recherche, et en particulier toute *expérience* (au sens des sciences expérimentales) suppose et implique un abord et une connaissance cliniques de l'objet de la recherche (par exemple les AER ou les PER). L'expérience est ainsi une modalité de la clinique. Les recherches en didactique, qu'elles soient fondamentales ou appliquées, s'inscrivent nécessairement dans une *clinique du didactique* (à propos de l'objet étudié).

Conditions et contraintes. Ce qui est décrit ordinairement en termes de « variables » ou de « facteurs » l'est en TAD, de façon générique, en termes de *conditions*. Étant donné une position *p* dans une institution *I*, on dit qu'une condition est une *contrainte* pour les personnes occupant la position *p* si, en tant qu'elles occupent cette position, elles n'ont pas le pouvoir de modifier cette condition.

Dialectique des médias et des milieux. L'une des sept dialectiques de l'enquête codisciplinaire. L'opération élémentaire de cette dialectique consiste à soumettre un énoncé issu d'un *média* (c'est-à-dire d'un système émettant des messages à l'intention de certains publics) au verdict d'un *milieu* « adidactique » par rapport à cet énoncé et à celui qui l'interroge à son propos, c'est-à-dire d'un système dont on peut supposer que la réponse à la question de la vérité de cet énoncé est dépourvue d'intention à l'endroit de celui qui le questionne.

Didactique. La didactique est définie en TAD comme la science des conditions et des contraintes de la diffusion des entités praxéologiques auprès des personnes et des institutions. On parle de la didactique de tel ou tel complexe praxéologique : didactique de la grammaire du français, didactique de l'orthotypographie, didactique de l'algèbre élémentaire, didactique de la danse classique, didactique des PER, etc. L'objet central de la didactique est *le didactique*, dimension du réel présente en toute situation institutionnelle où une personne ou une institution fait ou envisage de faire quelque chose pour qu'une personne ou une institution rencontre telle ou telle entité praxéologique : on parle à cet égard d'*intention didactique* et de *geste didactique* (intentionnel).

Institution. Tout système social lentement évolutif imposant aux personnes qui en sont les sujets un équipement praxéologique déterminé (dépendant de leur position dans l'institution) dans certains domaines d'activité. Une classe est une institution, de même qu'une école ; une bande de copains peut l'être tout autant.

Mésogenèse. Genèse du milieu didactique, c'est-à-dire du système des ressources utilisées dans le processus de construction praxéologique.

Objet. En TAD, tout est objet (comme tout est ensemble en théorie des ensembles). La didactique est un objet, une institution I est un objet, une personne x est un objet, de même qu'une classe $[X, y]$, etc.

Personne. Tout individu est une personne, c'est-à-dire la résultante évolutive d'une foule d'assujettissements passés et présents à des institutions dont cet individu est ou a été le sujet, et qui ont engendré son équipement praxéologique personnel actuel.

Position. Situation au sein d'une institution I donnée qu'une personne ne peut en principe occuper si son équipement praxéologique personnel n'est pas conforme à l'équipement praxéologique que I requiert de ses sujets dans cette situation. Dans une classe, on distingue ordinairement la position d'élève et celle de professeur, dans une famille, celle de père, celle de mère, celle d'aîné de la fratrie, etc.

Problème (de la profession). Un problème est une difficulté que l'on fait reconnaître en tant que telle par une institution existante ou nouvellement créée autour de ce problème. La difficulté en question est alors reconnue comme un problème posé à l'institution, dont celle-ci se sent responsable de la résolution : c'est un problème *pour* l'institution. Un problème de la profession (voir ce mot) est un problème *pour* la profession, dont celle-ci reconnaît en outre qu'il n'affecte pas tant certains de ses membres que le *métier* même qu'ils exercent.

Profession. Une profession est une institution qui organise un *métier* et ceux qui l'exercent en recherchant les moyens optimaux de l'adéquation praxéologique de ce métier à sa mission sociale. La profession de professeur est l'organisation qui prend en charge le métier de professeur. Ce qu'on appelle ici « la profession », tout court, est l'institution rassemblant les professeurs de mathématiques des collèges et lycées, les responsables officiels de l'enseignement scolaire des mathématiques (inspecteurs généraux, inspecteurs pédagogiques régionaux, etc.), des militants et responsables associatifs ou pédagogiques (ceux œuvrant à l'APMEP ou dans les IREM par exemple), ainsi que les chercheurs en didactique des mathématiques travaillant sur les *problèmes de la profession*.

Praxéologie. Le concept de praxéologie est une généralisation anaxiologique des notions courantes de savoir et de savoir-faire. Dans le cas le plus simple, celui d'une praxéologie *ponctuelle*, une praxéologie s'écrit $[T / \tau / \theta / \Theta]$ où T est un *type de tâches* (par exemple additionner deux entiers, se mousser, composer un opéra, enseigner par PER), τ est une *technique* pour accomplir au moins certaines tâches t du type T , θ est une *technologie* relative à la technique τ , c'est-à-dire un « discours » susceptible de justifier, de rendre intelligible, voire de contribuer à produire la technique τ , et Θ est une théorie de la technologie θ qui, à son tour, permet de justifier, de rendre intelligible, voire de contribuer à produire la technologie θ . Généralement, une technologie θ est telle à l'endroit de plusieurs techniques τ_i relatives à autant de type de tâches T_i ($1 \leq i \leq n$) : on note alors $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$ la

praxéologie correspondante. Alors qu'une praxéologie du premier type est dite *ponctuelle* (elle est construite autour de ce « point » qu'est le type de tâches T), une praxéologie du deuxième type est dite *locale*. Une praxéologie peut être scindée en un bloc pratico-technique ou *praxis*, $[T / \tau]$, et un bloc technologico-théorique ou *logos*, $[\theta / \Theta]$. La diffusion praxéologique opère fréquemment des modifications dans la structure des praxéologies, lorsqu'une praxéologie « habitant » dans une institution I donnée est transposée dans une autre institution I' : on parle alors de *transposition institutionnelle* – et de *transposition didactique* lorsque celle-ci procède d'une intention didactique. Le système total, plus ou moins intégré, des praxéologies qu'une personne ou une institution peut, à un moment donné de son histoire, mobiliser sous des conditions idoines est appelé son *équipement praxéologique*.

Raisons d'être. Par raisons d'être d'une œuvre – c'est-à-dire de tout objet créé et diffusé par l'activité humaine –, on entend l'intention qui a présidé à sa création ou à sa diffusion en telle institution, l'usage (ou les usages) que l'on compte en faire, l'utilité qu'on lui reconnaît. Les raisons d'être – et d'être là – d'une œuvre constituent la réponse à la question sans apprêt « À quoi ça sert ? » ou « En quoi cela peut-il être utile ? » En quoi est-il utile de distinguer angle saillant et angle rentrant, par exemple ? Bien entendu, les raisons d'être d'une œuvre dépendent en règle générale, mais dans une certaine mesure seulement, de l'institution qui lui sert d'habitat (voire de la position à l'intérieur d'une telle institution). C'est dans le refoulement de la question des raisons d'être que la TAD voit l'origine de la « perte de sens » identifiée par la profession.

Rapport. Une personne x a une certaine relation à un objet O qui découle de cette partie de son équipement praxéologique personnel dont l'objet O est un élément constituant – le rapport d'une personne à l'objet « fonction logarithme » peut ainsi inclure ou non le fait que cette fonction permet de résoudre l'équation $1,25^t = 2$. On parle de *rapport personnel*, que l'on note $R(x, O)$. Bien entendu, $R(x, O)$ peut être vide : on dit alors que x ne connaît pas O . On parle de même de *rapport institutionnel* à propos du système noté $R_I(p, O)$ qui désigne le rapport qu'une personne x occupant la position p à l'objet O est censé avoir : on parle alors du rapport institutionnel à O pour les personnes occupant la position p dans I . D'une façon générale, le rapport personnel $R(x, O)$ est une résultante de tous les rapports institutionnels $R_I(p, O)$ tels que la personne x ait été (ou soit) assujettie à l'institution I en position p . Comme dans le cas du rapport personnel, le rapport $R_I(p, O)$ peut être vide : on dit alors que les sujets de I en position p n'ont pas, en tant que tels, à connaître O .

Topogenèse. Genèse des équipements praxéologiques (et des rapports institutionnels associés) selon les positions d'élève et de professeur au cours de la construction praxéologique. Le *topos* (le lieu, en grec ancien) de l'élève (respectivement du professeur) est cette partie de la position d'élève (resp. de professeur) qui a trait aux entités praxéologiques construites ou en cours de construction dans la classe.

2. Sigles et acronymes

AER. Activité d'étude et de recherche.

AMPERES (équipe). Apprentissages Mathématiques et Parcours d'Études et de Recherches pour l'Enseignement Secondaire.

APMEP. Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public.

ATD. *Anthropological theory of the didactic* (théorie anthropologique du didactique).

BOEN. *Bulletin officiel de l'Éducation nationale.*

CIES. Centre d'initiation à l'enseignement supérieur.

CPGE. Classe préparatoires aux grandes écoles.

IDD. Itinéraires de découverte.

IREM. Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques.

LMD (réforme). Réforme instaurant le découpage du cursus universitaire complet en trois étapes : licence (L) en trois ans, master (M) en deux ans, doctorat (D) en trois ans.

MEN. Ministère de l'Éducation nationale.

OML. Organisation mathématique locale (c'est-à-dire de la forme $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{1 \leq i \leq n}$: une même technologie θ « couvre » un nombre fini de blocs $[T_i / \tau_i]$).

PER. Parcours d'étude et de recherche.

PPCP. Projet pluridisciplinaire à caractère professionnel.

PPO. Pédagogie par objectifs.

SEGPA. Section d'enseignement général et professionnel adapté.

SMF. Société mathématique de France.

SRA. *Study and research activity* (activité d'étude et de recherche, AER).

SRC. *Study and research course* (parcours d'étude et de recherche, PER).

TAD. Théorie anthropologique du didactique.

TIPE. Travaux d'initiative personnelle encadrés.

TPE. Travaux personnels encadrés.

TSD. Théorie des situations didactiques.

TLFi. *Trésor de la langue française informatisé* : <http://atilf.atilf.fr/tlf.htm>.

UMR ADEF. Unité mixte de recherche « Apprentissage, Didactique, Évaluation et Formation ».

3. Corpus de textes – Extrait 1

Rodríguez, Bosch & Gascón, 2007, pp. 1803-1806

ACCOUNT OF THE EXPERIMENTATION

We carried out two experimental SRC during the second term of 2004 and 2005 with 11th grade students (16-17) of two secondary schools in Madrid. In both cases, all students were invited to participate in what was presented as a “mathematical workshop” organised in after class sessions of 2 hours. A group of 10 to 14 volunteer students participated in each SRC. The total course lasted 18 sessions in both experimentations and the students did a lot of work outside the sessions. One of the researchers was the teacher of both workshops; she took notes of all the sessions, which were also video-recorded. When the students worked in small groups, each group was recorded in audio. In this way, the notes could later on be completed with the observation and transcript of both video and audio.

As for the development of the study of the question, two stages may be considered in the first experience with SRC: one based on the comparisons of fictitious tariffs, guided by the teacher and a second one related to real facts, in which students assumed a bigger responsibility in finding the answer to the questions. An important constraint experienced was what we might call the “temporary economy” of the teacher, who, urged by the need to “advance in the study process”, helped the students along with the answers or proper “hints” instead of waiting and providing the correct means for the students to come up with the answers. This constraint affected the development of the first SRC but was more “controlled” during the second one. There were also inverse situations in which the teacher knew how to put forward “crucial questions” which mean a “turning-point” of what has been covered so far, usually when getting to a deadlocked situation. For instance, when facing the frustrated attempts of the students to find a way to consider the differences in price between tariffs charging per seconds or 30-second lapses, the teacher put forward the possibility of carrying out a study of the proportion of each type of calls statistically considered more likely. In this case, although it could have been left up to the students, the help of the teacher may be considered the most appropriate.

As for the explicit attempt to make the students responsible for a series of dimensions or aspects of the study (planning, regulation and evaluation) which are not normally of their concern in the traditional didactic processes, we only realized later on that this kind of responsibilities were directly assumed by the teacher. In this first SRC the planning aspects which we wanted the students to be co-responsible for were very limited and they only referred to the prevision of usefulness of the techniques or to anticipating results. The students were not made responsible for the temporal and

theme-related organization of the course nor for finding the answer to questions such as: where to start, what to deal with first, how much time to spend in each case, etc. This would be one of the main objectives of the second application of SRC.

With regard to the running of the *didactic moments* through which the ATD structures the study process (Chevallard 1999), we will only mention that finding the answer to the generating question made each moment appear in a relatively natural way. [1. The study process is structured in six different dimensions or “moments”: the first encounter with the problematic question, the exploration of the related type of tasks, the work of developing the technique, the technological-theoretical moment, the evaluation and institutionalisation moments] It catches our attention that, on some occasions, it is precisely the intervention of the teacher which limited this process, given her urge to make the study “progress”. This may be clearly observed, for instance, when, as the students were carrying out the comparisons of all the companies’ tariffs to elaborate the final report, once the teacher considered they already knew how to use the comparison technique, she suggested that they could leave it and start another task. The students, surprised, replied: “How can we do the comparison without considering all the cases?!” Obviously carrying out a comparative study means to compare everything with everything. We thus observed how the *moment of the work of the technique* had emerged naturally and was about to be aborted by the teacher! In what concerns the *moment of institutionalisation*, which is currently carried out under the sole responsibility of the teacher, it here took a surprising form when the students proposed to design a website as a way to give a definite answer to the initial question. Determining what materials should be posted on the website and how to present them constituted an important device for the institutionalisation performing and it was carried out in a complete cooperative way between the teacher and the students.

Concerning the second experimentation of SRC during the course 2004/05, we will only mention here that its main objective was to reproduce the experience with a different school and a different group of children, deepening in the modifications of the didactic contract to avoid the constraints borne by the teacher in the first SRC. The students were thus led to assume a bigger amount of responsibility during the whole process of study, especially in the planning of tasks, the organisation of the work in teams and the reformulations of the initial question. The purpose was for the teacher to avoid taking initiatives concerning these aspects of the study process, making them explicit and “negotiating” their organisation with the students.

To evaluate the evolution of the students’ knowledge at the end of the process, the students were asked to answer an individual written test. They had to solve a comparison of *fixed* phone tariffs with some novelties like a “bonus” (pack of calls at a reduced price) and the payment per seconds during the first minute. The students’ performance was good, with an average of 8.5 out of 10 in the first SRC and 8.25 in the second one. To analyse the effect of the SRC on the students’ beliefs and

attitudes, the “CAETI-Trait Thinking Questionnaire” (O’Neil & Schacter 1997) was used. In the first SRC we did not find any difference in the students’ results before and after the experience. However, in the second SRC, a student asked if the test dealt with the “mathematics of the current class” or the “mathematics of the SRC”. We then asked the students to answer the test twice: once considering the mathematics done in class and then the mathematics of the SRC. The results showed that the students’ beliefs and attitudes concerning the “SRC mathematics” were significantly different from the “class mathematics” in all items.

4. CONCLUSIONS

Our first conclusion refers to the capacity of the SRC to create connections between different pieces of knowledge, that is, to develop what is traditionally considered as “metacognitive knowledge” or, in terms of the ATD, to increase the studied mathematical organisations beyond the level of the topic, the theme or the domain they belong to. We can say that both SRC have permitted:

- To give functionality to some contents of the block “functions and graphs”, such as the construction of the algebraic expression of a function, the use of graphs to solve inequalities, to validate the solutions or to display information.
- To connect different blocks of contents, such as “statistics” and “functions and graphs” to validate the considered functions.
- Even to connect different knowledge areas, such as mathematics and “new technologies” with the use of Excel, the search of information about the tariffs on the web and the design of a web site to display the final results.

In what concerns “metacognitive regulation”, our proposal to connect it with the sharing of responsibilities between the teacher and the students during the study process leads to the following conclusions:

- The current didactic contract can explain the students’ initial resistance to assume responsibilities concerning the planning, regulation and evaluation of the study process, and how it gradually decreases throughout the process (as soon as a new didactic contract was established)
- What seems more difficult to overcome is the teacher’s resistance to share the responsibilities of regulation, assessment and, more than any others, planning. The constraints coming from the current didactic contract were clearly palpable in the cases experimented, the teacher-researcher having strong difficulties not to plan, organise or validate the students’ work.

In general, we postulate that the inclusion of metacognitive regulation in school mathematical activity needs a serious transformation of the current didactic contract to overcome the strict separation between what is commonly considered as “the mathematic” and “the didactic”. More concretely, it has

to allow students to be coresponsible for all aspects of the study process, including those traditionally assigned only to the teacher as, for instance, planning, regulation and evaluation of the study process, or the location of an isolated problematic question in a chosen local mathematical organisation. Obviously this “transfer of responsibilities” cannot take place in a spontaneous and natural way but requires more research and new didactic proposals to achieve that the study of questions becomes the “driving force” of the learning of mathematics. Our present researches on the integration and “viability” of Study and Research Courses as a normalised activity at secondary and university level show the strong institutional constraints this new didactic contract has to overcome (García, Gascón, Ruiz, Bosch 2006; Barquero, Bosch & Gascón 2007).

4. Corpus de textes – Extrait 2

Ruiz, Bosch & Gascón, 2007, pp. 2177-2179

5. RESULTS AND OPEN QUESTIONS

(A) *The need to study long-term mathematical questions*

A basic characteristic of an algebrized mathematical activity and, in particular, of functional-algebraic modelling, is the requirement of long-term goals that can only be reached through systematic work extended in time. This was a trait of our instructional proposal: starting with a question that was not immediately solvable but required the construction and progressive enlargement of the models considered. This requirement appeared to be an important obstacle to the experimentation and can be explained, partially at least, as a consequence of the way the study of mathematics is interpreted in secondary schools, that is, in terms of the dominant cultural notion of *study*. It is in fact a conception clearly compatible with the limited, rigid and isolated character of mathematical organizations studied in such institutions (Bosch, Fonseca, Gascón 2004). It is also reflected in the way students carry out limited tasks and change the activity several times, even during the same session. On the contrary, our proposal is based on an activity that needs to integrate different mathematical objects in a functional way, working with a set of MOs that usually appear in an incomplete and isolated way. Thus, the type of study designed, with its long-term objectives, the non-definitive answers and the rising of new questions, go against the dominant epistemologic and didactic conception of the teaching and learning of mathematics.

(B) *The connection between numerical and functional language*

To carry out the passage from an arithmetic solution to the construction of a functional-algebraic model, it is necessary to turn “numerical questions” into questions the answer of which is not a concrete number but a *relation* between variables. At the beginning of the workshop, the students had real difficulties with this, always trying to find “the number solution”, as they are used to doing. It was the teacher who had to clearly highlight the new didactic contract that was being established, using the “reality” of the situation to justify it. In any case, it seems that it is necessary to work more on the “question of the questions”, ie the kind of problem that is really approached, the kind of solution that is “receivable”, etc.

(C) *Management of the study process and students autonomy*

The development of a functional-algebraic modelling activity requires a bigger degree of autonomy from the students than is usually needed. This kind of activity (even at the first levels) wants the student to take his/her own initiatives related to the kind of questions to solve, the tools to use and,

even, the direction that the study process can take at a given moment. How to organize an appropriate new sharing of responsibilities (didactic contract) between the teacher and the students remains an open problem at this level. How can we determine the optimum degree of responsibility students have to be assigned with at every educational level? How can the teacher manage this new kind of study process? Etc.

(D) *The role of Wiris to facilitate functional-algebraic modelling*

The symbolic calculator Wiris was used during the workshop to use mathematical techniques in a more fluent way and with less difficulty than their “paper and pencil” versions. Wiris was thus supposed to help students carry out a richer exploratory activity. It was used to carry out a lot of trials and the exploration of different cases (different values of the parameters). However, we did not succeed in making students question the techniques used (their scope, economy or efficiency). This is an essential point because any modelling activity requires the systematic interpretation of intermediate results and the questioning of the adequacy between model and system. What did appear, with the help of Wiris, was a certain degree of *articulation* between the algebraic work with formulas and the graphs obtained by considering any letter of the formula as independent variables.

Because it goes towards the didactic organisation of current secondary schools, our proposal has highlighted various constraints that hinder the study of a long-term question and the use of functional-algebraic models to deal with it. A symbolic calculator like Wiris helps to overcome some of these constraints. Anyway, our experimentation has shown that, to go beyond the “second level of functionalalgebraic modelling”, a profound change in the didactic contract prevailing in secondary schools is necessary. This change also seems essential to give sense to the differential calculus that is taught at the end of secondary school and at university level.

5. Corpus de textes – Extrait 3

Ruiz, Bosch & Gascón, 2007, pp. 2171-2174

2. DEVELOPING THE ALGEBRAIC TOOL: THE FUNCTIONAL ALGEBRAIC MODELLING

Despite the strong pre-algebraic character of school mathematics, it must be pointed out that the mathematical activity becomes fully algebrized from a certain educational level onwards. The development of the mathematical activity requires the complete functioning of the algebraic instrument, although it may remain implicit. For this reason we must assume the existence of a process of algebrization of school mathematics starting at primary school, continuing through compulsory secondary school and culminating at university.

In this work we introduce the notion of *functional-algebraic modelling* as a development of the algebraic instrument, i.e. as a development of the instrument that allows enlarging the mathematical organisations which appear throughout secondary school, especially in the passage from compulsory school to college and, more particularly, in the relations between algebra and differential calculus. Thus functional-algebraic modelling allows:

- (a) Unifying certain types of problems thanks to models that can be formulated in terms of families of functions.
- (b) Using new mathematical techniques to answer questions that go beyond the calculation of a particular solution to a problem.
- (c) Proposing new types of problems involving the reciprocal incidence between the changes of variables that define the underlying modelled system as a family of curves. Questions related to the ratio of variation will appear, preparing for the introduction of the differential calculus. [4. The characterization of functions has to be found in its “type of variability”. This is the reason why differential equation models are so important. A natural way of understanding functions as models is to consider them as *primitives* in the general sense of the word, that is, a solution to a differential equation. (García 2005)]

Let's not forget that the algebraic instrument stems from Pappos' classical analysis which, according to Descartes, consists in the method to find the dependence between all the variables that intervene in a problem, leaving aside whether they take on a known or an unknown value. The development of this instrument led to establish a close relation between “geometric” and “algebraic” problems with the creation of analytical geometry. The fundamental principle of analytical geometry consists in the discovery that undetermined equations (in principle, algebraic ones) with two unknowns: $f(x,y) = 0$ correspond to geometrical places determined by points, the coordinates of which satisfy the given

equation. This interpretation does not only introduce *analytical geometry* but also the fundamental idea of algebraic variables, essential for the development of calculus as it occurred throughout the 17th century (Urbaneja 1992). We can consider this type of modelling, where the algebraic variables x and y measure any kind of magnitudes, as the seed of the functional-algebraic modelling. The progressive interplay between parameters and variables will help this type of modelling develop into the rationale of the differential calculus.

To clearly explain the general notion of functional-algebraic modelling, we will consider three levels corresponding to three progressive steps of mathematisation.

2.1. First level of functional-algebraic modelling

One of the characteristics of the pre-algebraic character of school mathematics comes from the separation between “algebraic” and “functional” language, which is especially made clear in the role played by formulas and the fact that they are rarely interpreted as “functional” models to study properties of the modelled objects. In fact, the strict separation between school algebraic language (confined in formulas) and functional language is a consequence of the process of didactic transposition that organises the mathematical knowledge to be taught into different blocks of contents and makes it difficult to integrate mathematical objects coming from different “themes” or “domains” (Chevallard 1985, Bosch & Gascón 2006).

We will call the *first functional-algebraic modelling level of a mathematical organisation (MO)* the one that materializes in models expressed by means of isolated functions of one variable and the corresponding equations (or inequalities). For instance, if a product is sold at a unitary price of 6 €, it’s unitary cost is 2,5 € and there is a constant production cost of 150 €, at this first level the benefits of the situation can be modelled by the function:

$$B(x) = 6x - (2,5x + 150).$$

The kind of mathematical tasks included in these models are the ones that require an analysis of the relations between the components of an isolated function and of the global behaviour of the function: What value of x gives $B > 1000$? How to interpret the constant term -150 ? Etc.

2.2. Second level of functional-algebraic modelling

We have already mentioned that, at secondary school, the letters which are part of an algebraic expression only play the role of unknowns (in equations) or the role of variables (in functional language), while parameters are hardly existent. In any case, the systematic interplay between their different roles is completely ignored. Moreover, the activity of nominating and re-nominating variables, that is, the introduction of new letters while working with algebraic expressions, essential in the algebraic work, only appears in some activities completely stereotyped as a “change of variable” (for example, in solving bi-squared equations). This situation continues throughout the last year of

secondary education. It makes the step from working with algebraic expressions to studying families of functions and to using these families as models of relations between magnitudes extremely difficult. We call *the second level of functional-algebraic modelling of a MO* the one that materializes in models precisely by means of a family of functions of one variable and the corresponding parametrical equation. At this second level of modelling, there exists a clear distinction between “parameters” and “variables” in such a way that their roles cannot yet be considered exchangeable. Families of one-variable functions are being studied but not functions of two (or several) variables. Some examples can be suggested by the following expressions: [5. They all are models of the form $fp(x, y) = 0$ where fp is a family of 2-variable functions with p as a parameter and where one variable can be isolate]

$$B_c(x) = 6x - (cx + 150); \quad B_L(x) = 6x - (2,5x + L)$$

This kind of models includes the tasks and techniques necessary to study real functions of one variable and to solve equations and inequalities with a parameter.

2.3. Third level of functional-algebraic modelling

We will call *third level of functional-algebraic modelling of a MO* the one that materializes in models expressed by means of families of functions of 2 or more variables and the corresponding algebraic formulas. It is this third level of modelling in which the roles of “parameters” and “variables” are exchangeable.

How the joint variation of 2 or more variables has an effect on the variation of a function is being studied. Examples of this third level are the following:

$$B(c, L, x) = 6x - (cx + L); \quad p(x, c, L) = \frac{2000 + L}{x} + c.$$

As functions of 2 or more variables have explicitly been put aside from secondary education, the mathematical activity to be carried out to construct, use, study and interpret this kind of models is completely absent from current secondary school.

To sum up, in Spanish secondary education there are very few techniques to carry out the mathematical activity we have called functional-algebraic modelling. Till 10th grade, the only thing that exists is the algebraic manipulation of elementary formulas and some techniques to solve equations and inequalities (if they are easy), stereotyped techniques that are limited to represent graphs and even more limited to interpret formulas and to connect them to graphs. Eventually, it turns out that functional-algebraic modelling is practically inexistent at this level and that, in current conditions, only activities belonging to the first functional-algebraic modelling level could be carried out.