LES GRANDEURS EN MATHÉMATIQUES AU COLLÈGE

Partie I. Une Atlantide oubliée

Yves CHEVALLARD [1], Marianna BOSCH [2]

Résumé. Cette étude en deux parties aborde la question de la place et du statut des grandeurs au collège. Dans cette première partie, on examine notamment le problème des unités et des changements d'unités.

1. Les grandeurs dans les textes officiels

1.1. Une mention insistante

Le mot de *grandeur* est discrètement présent tout au long des programmes de mathématiques du collège. Dès le texte de présentation générale qui précède le programme de 6e, il apparaît dans la formulation de l'un des quatre objectifs assignés au domaine d'études intitulé *Organisation et gestion de données, Fonctions* : « se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) ». Symétriquement, à la suite du programme de 3e, la notion de grandeur structure en partie le tableau synoptique qui, récapitulant l'ensemble des programmes du collège, y découpe sept grands secteurs d'études. Le troisième de ces secteurs s'intitule *Grandeurs et mesures* : on a reproduit ci-après la partie du tableau qui s'y rapporte.

	6e	5e	4e	3e
Grandeurs et mesures	Périmètre et aire d'un rectangle, aire d'un triangle rectangle Longueur d'un cercle Volume d'un parallélépipède rectangle à partir d'un pavage	Somme des angles d'un rectangle. Aire du parallélogramme, du triangle, du disque Mesure du temps Aire latérale et volume d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution.	Grandeurs quotients courantes. Volume d'une pyramide, volume et aire latérale d'un cône de révolution.	Grandeurs composées. Aire de la sphère, volume de la boule.

Tableau 1

En 6e, on compte au rang des « compétences exigibles » le genre de tâches suivant : « Effectuer, éventuellement avec une calculatrice, des calculs faisant intervenir diverses grandeurs : longueurs, angles, aires, volumes, durées... ». À propos du domaine des *Travaux géométriques*, le programme de 6e précise ailleurs que ceux-ci « constituent en particulier le support d'activités numériques conjointes (grandeurs et mesures) ». Reprise mot pour mot en 5e, cette indication est explicitée par le programme de 4e : « En classe de 4e, la représentation d'objets géométriques usuels du plan et de l'espace, le calcul de grandeurs attachées à des objets, demeurent des objectifs majeurs ». Le programme de 3e le confirme : « Les objectifs des travaux géométriques demeurent ceux des classes antérieures du collège : représentation d'objets usuels du plan et de l'espace ainsi que leur caractérisation, calcul de grandeurs attachées à ces objets ».

[1] IUFM d'Aix-Marseille, Marseille.
[2] Université Ramon Llull, Barcelone.

Mais, dès la 4^e, on ne se contente pas de *calculer* des grandeurs. Dans le cadre même des travaux géométriques, en effet, et à propos du thème d'études *Pyramide et cône de révolution*, on commence à considérer une situation plus complexe, la *dépendance fonctionnelle entre grandeurs*, ce que le programme exprime ainsi : « On pourra, à l'aide des formules d'aires ou de volumes, étudier les variations d'une grandeur en fonction d'une autre ».

Cette problématique apparaît au premier plan dans le programme de 3^e. À propos cette fois du thème *Proportionnalité et traitements usuels sur les grandeurs*, ce programme place parmi les « compétences exigibles » les types de tâches consistant, « dans des situations mettant en jeu des grandeurs, l'une des grandeurs étant fonction de l'autre », à « représenter graphiquement la situation d'une façon exacte si cela est possible, sinon d'une façon approximative » et à « lire et interpréter une telle représentation ». Chose remarquable, la présence de grandeurs dans les situations effectivement étudiées fait ici l'objet d'une exigence explicite : « Les situations mettant en jeu des grandeurs restent privilégiées pour mettre en place et organiser des calculs faisant intervenir la proportionnalité, en particulier les pourcentages ».

Le document d'accompagnement des programmes du cycle central (5^e & 4^e) souligne encore l'importance de ce type de situations, qui semble justifier en partie l'insistance sur le concept de proportionnalité : « La proportionnalité est un concept capital. Elle est indispensable pour l'étude et la compréhension des relations entre grandeurs physiques ». L'affirmation sera reprise dans le document d'accompagnement du programme de 3^e : « La proportionnalité, rencontrée dès l'école, est, en particulier, un concept non seulement essentiel dans la vie du citoyen, mais encore fondamental pour l'étude et la compréhension des relations entre les grandeurs physiques ».

En même temps, le stock des grandeurs disponibles s'accroît. En 4^e, à titre d'*application de la proportionnalité*, le programme prévoit l'introduction de *grandeurs quotients courantes*, telle la vitesse moyenne. En 3^e, plus libéralement encore, on ouvre le travail mathématique à l'ensemble des *grandeurs composées*, lesquelles font l'objet d'un commentaire explicite [3] : « Les grandeurs produits sont, après les grandeurs quotients déjà rencontrées en classe de 4^e, les grandeurs composées les plus simples. On pourra remarquer que les aires et les volumes sont des grandeurs produits. D'autres grandeurs produits et grandeurs dérivées pourront être utilisées : passagers × kilomètres, kWh, francs/kWh, laissant progressivement la place à euros/kWh… En liaison avec les autres disciplines (physique, chimie, éducation civique…), on attachera de l'importance à l'écriture correcte des symboles et à la signification des résultats numériques obtenus. »

Les grandeurs en général, et certaines grandeurs en particulier, ont ainsi une présence insistante dans les programmes du collège. Ce constat ne peut manquer de susciter plusieurs questions. Qu'est-ce, au juste, qu'une grandeur ? La notion de grandeur est-elle une notion mathématique ? Sinon, de quelle discipline relève-t-elle ? Pourquoi devrait-on se préoccuper, en mathématiques, de grandeurs qui, à l'évidence, sont du ressort de disciplines autres que les mathématiques ?

1.2. Un plaidoyer incertain

Les textes déjà cités n'éclairent que de manière un peu latérale la présence proclamée de multiples grandeurs dans l'univers d'objets des classes de mathématiques du collège. Dès la 6^e, souligne ainsi le document d'accompagnement du programme de cette classe, l'accent doit

[3] Sur les règles d'écriture des noms et des symboles d'unités, voir Roussel 1996, p. 104-106.

être mis sur les problèmes « extramathématiques », dont le caractère pluriel fait l'objet d'un ferme commentaire :

> « Les problèmes sont à la fois la source et le critère des connaissances mathématiques. Mais de quels problèmes s'agit–il ? Le terme de problème *concret* utilisé dans les précédents programmes a été abandonné parce qu'il renvoie trop souvent à la seule idée de *problème de la vie courante*.
> En effet, pour préciser, on peut schématiquement faire référence à trois grands types de problèmes :
> – ceux qui correspondent effectivement à des situations de la vie quotidienne et présentent une complexité raisonnable pour s'inscrire dans l'univers familier des élèves ;
> – ceux qui sont posés dans d'autres champs disciplinaires. Ils sont l'occasion de commencer à travailler sur l'idée de modélisation mathématique. Ils permettent, en particulier, de décrire, contrôler et anticiper des phénomènes dans des situations accessibles aux élèves ;
> – ceux qui portent directement sur des objets mathématiques et conduisent plus particulièrement à développer la curiosité mathématique et l'esprit de recherche. Dans ce domaine, il convient de distinguer exercice d'application et problème véritable dont la solution n'est pas obtenue directement par l'utilisation de connaissances étudiées préalablement. »

De l'intérieur de la classe de mathématiques, on se préoccupe donc de problèmes qui peuvent être extérieurs aux mathématiques, que ces problèmes relèvent d'une juridiction disciplinaire reconnue (physique, biologie, etc.) ou du domaine plus flou, supposé ouvert à tous, de « la vie quotidienne ». Dans tous les cas, alors, l'extramathématique fait irruption dans la classe de mathématiques à travers ces points d'appui minimaux de la modélisation mathématique que sont les grandeurs. Situation que le texte d'accompagnement des programmes du cycle central constate en ces termes : « Les objets mathématiques correspondent plus ou moins directement à des objets de notre environnement, naturels ou produits par l'homme. La plupart des phénomènes permettent d'observer des grandeurs ; l'étude de ces grandeurs conduit à s'intéresser aux rapports qui existent entre elles ».

Pourquoi insister ainsi sur la capacité des mathématiques à nous permettre de penser le monde autour de nous ? Une première réponse que les textes officiels semblent apporter, c'est que, en assumant ce que le physicien E.P. Wigner [4] appelait naguère « la déraisonnable efficacité des mathématiques », l'enseignement des mathématiques vise à munir chaque élève d'outils intellectuels qui lui permettront le plein exercice de sa citoyenneté :

> « L'enseignement des mathématiques peut apporter une contribution à ces différents aspects de la formation que sont l'éducation à la citoyenneté, l'éducation à l'orientation, l'éducation à l'environnement. (Quand, ici, il est question d'environnement, il s'agit aussi bien d'environnement socio-économique que d'environnement culturel ou d'environnement naturel.) »

La précision apportée quant à *l'environnement* de l'élève marque à l'évidence une volonté de large ouverture de la formation mathématique donnée au collège, en vue de permettre au futur citoyen d'entretenir un commerce éclairé, au double plan de la connaissance et de l'action, avec le monde naturel et social :

> « La pratique des mathématiques conduit les élèves à acquérir des méthodes, qui sont efficaces aussi bien pour améliorer la compréhension de phénomènes que pour étayer des prises de décision ou aider à agir ».

Nous atteignons ici, on va le voir, un point d'ouverture maximale à l'extramathématique : en se déclarant ainsi accueillante aux « applications des mathématiques », la classe de mathématiques paraît continuer la tradition de ces mathématiques que, durant des siècles, on appela *mixtes* – avant de parler, à partir de 1800 environ et jusqu'à aujourd'hui, de mathématiques *appliquées*.

En vérité, pourtant, le temps n'est plus du métissage épistémologique flamboyant qui marquait le cours d'études ancien. Le mouvement d'ouverture constaté est donc aussitôt

[4] Eugene Paul Wigner (1902-1994), prix Nobel de physique 1963.

limité par une observation de sens inverse, en quelque sorte compensatoire, dont l'ambiguïté est patente :

> « Le professeur de mathématiques peut participer à la formation du citoyen dans l'exercice même de ses fonctions, sans avoir, pour ce faire, besoin de lancer ses élèves dans des activités qui s'écarteraient par trop de sa discipline d'enseignement ».

Que signifie « s'écarter par trop » des mathématiques ? Question évidemment essentielle dans une culture mathématique tétanisée par le souci identitaire : fait-on encore des mathématiques quand on parle de kilowattheures ?

1.3. Changer sans changer ?

C'est en ce point de la réflexion officielle, la chose mérite d'être saluée, que la question des grandeurs va être reprise à nouveaux frais dans le document d'accompagnement du programme de 3^{e}. Le troisième volet de ce document – qui en comporte quatre – est consacré à la *Place des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques au collège*. Le rédacteur y explicite d'abord *Les enjeux du travail sur les grandeurs*, avant de préciser les liens entre *Les grandeurs et les programmes du collège*.

Que nous dit-on, en fait ? Tout d'abord, en une déclaration quelque peu solennelle, ce texte donne des gages aux « puristes », tenants d'une mathématique indéfiniment purifiée, en rappelant que les mathématiques ont atteint aujourd'hui un stade de développement qui les rend *indépendantes* de la considération des grandeurs : « Aujourd'hui, la science mathématique s'est largement affranchie de la question des grandeurs (l'ensemble des nombres, par exemple, se construit, formellement, sans référence aucune aux grandeurs). Théoriquement, les mathématiques peuvent donc à la fois se transmettre et se développer sans référence à la notion de grandeur ».

Mais cette vision « apurée » des mathématiques n'est, ajoute-t-on alors, nullement conforme à la vérité de leur genèse historique : « Historiquement, c'est bien à partir d'un travail sur les grandeurs qu'ont été construits la plupart des concepts et des théories mathématiques. Il serait d'autant plus dommageable de perdre de vue cette filiation que, comme cela a été signalé, c'est elle qui permet d'assurer les liens avec les autres disciplines ».

Le souci d'authenticité épistémologique semble ainsi conduire à refuser de couper le « produit » mathématique (les mathématiques faites, dans leur forme provisoirement achevée) du *processus historique de mathématisation* qui l'a constitué pour l'essentiel à partir de *non-mathématique*.

Mais c'est surtout un souci de *réalisme didactique* qui inspire les développements attenants au passage précédent. La genèse artificielle des mathématiques que le professeur doit conduire dans la classe peut-elle se dispenser de points d'appui qui furent indispensables à leur genèse historique dans les communautés savantes ? Le texte examiné suggère une réponse prudemment négative : « S'il a été possible aux mathématiques de s'émanciper de la notion de grandeur, c'est sans doute qu'elles avaient accumulé quantité d'expériences et de résultats dont il ne semble pas que l'enseignement de base puisse faire l'économie ».

Le rédacteur fait alors basculer la charge argumentative *sur l'élève*, déplacement dont on sait l'énorme puissance de légitimation dans l'idéologie scolaire postmoderne. Si, nous dit-on en effet, il n'est pas possible de faire l'économie de la référence au processus de mathématisation, et donc de la référence aux grandeurs, c'est que, sans cela, l'élève risquerait fort d'être laissé sur le bord de la route : « Sans cette référence, la présentation des mathématiques serait toutefois beaucoup trop abstraite pour être à la portée des élèves du collège, et même bien au-delà. Il y a d'ailleurs plusieurs raisons qui rendent indispensable, spécialement dans l'enseignement obligatoire, un appui résolu, mais distancié, sur les notions de grandeurs et de mesure ».

Il serait léger, donc, de prétendre se passer, dans la classe, de l'étayage transdisciplinaire historiquement fondateur des mathématiques. Mais il y a plus. Au-delà des conditions de possibilité d'une genèse didactique des mathématiques de la scolarité obligatoire, on doit faire droit à la question des *usages sociaux* des mathématiques enseignées, qui concerne, elle, *tous* les élèves, tous « citoyens en formation » : « C'est dans des situations mettant en jeu des grandeurs que tous les élèves pourront réinvestir les connaissances acquises en mathématiques. Les mathématiques du citoyen sont celles qui interviennent comme outils pour les grandeurs, celles qui permettent de modéliser efficacement des situations faisant intervenir des grandeurs ».

On retrouve ainsi une problématique présente dans les textes relatifs aux classes antécédentes. Mais un tel mouvement d'ouverture ne va pas de soi. À cette première section, intitulée *Les enjeux du travail sur les grandeurs*, succède donc une section d'apparence beaucoup plus pratique, intitulée *Les grandeurs et les programmes du collège*, qui rend un son nettement moins allègre.

Sans doute, nous dit-on alors, sans doute doit-on continuer, au collège, d'avoir commerce avec les grandeurs. Mais la *vraie* matière du travail mathématique, ce ne sont pas les grandeurs, mais les *nombres*. Ce principe d'exclusion progressive est d'emblée énoncé : « Depuis l'école, on est passé progressivement de situations de comparaison de grandeurs (qui sont des abstractions à partir de caractéristiques d'objets de la vie courante), puis de mesurage, au travail sur les mesures, c'est-à-dire sur les nombres. En effet, en mathématiques, on ne travaille pas sur les grandeurs (c'est l'objet d'autres disciplines, comme la physique, la technologie, les sciences de la vie et de la Terre ou la géographie et l'économie par exemple), mais avec les grandeurs ou à partir d'elles ; ici se situe l'interaction entre les mathématiques et les autres disciplines ».

Travailler, non *sur* les grandeurs, mais *avec* les grandeurs, ou *à partir* d'elles, le distinguo est fragile. Vers la fin de cette section, le rédacteur va donc recourir à une formulation sans ambages, qui claque comme un désaveu des développements précédents : « En mathématiques, on travaille non dans le domaine des grandeurs mais dans celui des nombres ».

Bien entendu, on note que *quelques* grandeurs sont chez elles en mathématiques : « Une exception : longueurs, aires ou volumes sont des grandeurs appartenant au champ mathématique, tandis que la mise en évidence de l'aspect multidimensionnel des deux dernières correspond à un travail sur des grandeurs. Le travail sur longueurs et aires est indispensable pour présenter aux élèves les nombres non entiers et les opérations étudiés au collège ».

En outre, il reste vrai que, dans les années de collège, l'univers extramathématique est encore, sinon présent, du moins *représenté* au sein de la classe de mathématiques, selon des configurations diversifiées : « Un problème peut concerner des grandeurs de même nature, voire une seule grandeur, ou des grandeurs de natures différentes ; ces caractéristiques, ainsi que la nature des relations entre les grandeurs en cause, induisent une difficulté plus ou moins grande lors de la résolution et déterminent souvent le choix de telle ou telle procédure par les élèves. On a ainsi l'occasion de travailler avec des grandeurs et des unités de différents types ; il peut s'agir de grandeurs "simples" (objets de mesures directes) et unités "simples", de grandeurs et unités produits (passagers × km, kWh,…), quotients (m/s, km/h, …), ou encore de grandeurs et unités "composées" ($m^3 \times s^{-1}$, …) ».

Tout cela, semble pourtant suggérer le texte examiné, n'est au vrai qu'un théâtre d'ombres, le mobile de l'action plutôt que la matière de l'activité. Partant de grandeurs quand la chose se présente (ce qui n'est pas toujours le cas), on se hâte de passer aux nombres. Dès lors, on travaille sur des nombres, pour ne revenir qu'en fin de parcours aux grandeurs. Dans cette dialectique convenue, on ne peut douter que, pour le mathématicien, le temps fort ne soit l'étape médiane, celle du travail sur les nombres, même s'il nous est dit *in fine* que c'est à *l'intégralité* de ce parcours que les élèves devraient, non sans difficultés, s'affronter : « … la modélisation d'une situation de la vie courante, par exemple par un système d'équations (dans $\mathbb{R}$ dès la classe de 4e, ou $\mathbb{R}^2$ en classe de 3e), […] correspond au passage du cadre des grandeurs au cadre numérique. Ce type de passage, ainsi que le retour au cadre et à la situation de départ, présentent des difficultés importantes pour les élèves, difficultés que la diversité et le choix des situations proposées, la diversité aussi des procédures mises en œuvre, aident à surmonter progressivement ».

Pour qui voudrait ne rien entendre et ne rien changer, le message est clair : le maintien du *statu quo ante* apparaît finalement tout à fait compatible avec des développements qui auraient pu inquiéter.

2. Mondes d'autrefois

2.1. Mathématiques pures, mathématiques mixtes

La question des grandeurs dans la classe de mathématiques a un long passé : l'état de choses constaté dans les textes officiels est en vérité le rejeton dégénéré, à la conscience malheureuse, d'une histoire autrefois haute en couleur, dont on examinera ici, rapidement, quelques-unes des données. Il convient d'abord d'interroger l'apparente évidence du terme *mathématiques*. Car c'est une illusion de croire que ce terme possèderait une acception univoque, et que le « champ mathématique » dont parle l'un des textes commentés plus haut serait clairement délimité.

Longtemps, en vérité, « les mathématiques », ce premier établissement de la connaissance humaine, ont été généreusement accueillantes à la diversité du monde « naturel ou construit ». Dans la deuxième moitié du XVIIIe siècle, rédigeant l'article « Mathématique ou Mathématiques » de l'*Encyclopédie* (1751-1772), dont il est l'un des maîtres d'œuvre avec Diderot, d'Alembert écrit par exemple ceci :

> « Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle *Mathématiques pures*, considère les propriétés de la grandeurs d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue : dans le premier cas, les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second, Géométrie [...] La seconde classe s'appelle *Mathématiques mixtes* ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers [...]. Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c ».

Ainsi, tandis que les mathématiques *pures* étudient « les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite », les mathématiques *mixtes* s'occupent des « grandeurs concrètes ». L'existence même des mathématiques mixtes est fondée sur un fait simple mais fondamental, que d'Alembert expose dans l'article « Application » de l'*Encyclopédie* en l'illustrant par l'exemple de la « catoptrique » (l'optique des miroirs). Dans le développement d'une science, explique-t-il, l'interrogation expérimentale du réel peut, en certains domaines, être réduite *à très peu de choses* :

> « Une seule observation ou expérience donne souvent toute une science. Supposez, comme on le sait par l'expérience, que les rayons de lumière se réfléchissent en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion, vous aurez toute la Catoptrique [...]. Cette expérience une fois admise, la Catoptrique devient une science purement géométrique, puisqu'elle se réduit à comparer des angles et des lignes [...]. Il en est de même d'une infinité d'autres. »

D'où la multiplication des « mathématiques mixtes », élaborations mathématiques constituées autour de *quelques axiomes d'origine expérimentale*, qui en sont l'unique ingrédient extramathématique. De là, encore, que le domaine des mathématiques mixtes puisse être étendu presque indéfiniment, en un processus articulant croissance du noyau des mathématiques pures et création d'organisations mathématiques mixtes, ontologiquement hybrides. Un siècle et demi avant l'*Encyclopédie*, dans *The Advancement of Learning* (1605), Francis Bacon (1561-1626) écrivait à ce propos (Bacon 1991, p. 131) : « Quant aux mathématiques mixtes, je me permettrai simplement cette prédiction : de plus nombreuses espèces de ces mathématiques ne peuvent manquer d'apparaître à mesure que la nature sera davantage découverte ».

Mais le monde savant n'est pas seul concerné par cette très ancienne configuration de savoirs. L'usage de cultiver de concert mathématiques pures et mathématiques mixtes s'est en effet longtemps maintenu dans le cours d'études secondaire. Longtemps le professeur *de mathématiques* fut en charge de matières qu'on ne songerait plus spontanément, aujourd'hui, à regarder comme de sa compétence. C'est ainsi que – exemple parmi d'autres – le programme de mathématiques du 10 juillet 1925 pour les « classes de mathématiques », c'est-à-dire pour les classes terminales scientifiques des lycées, est divisé en huit domaines dont les quatre premiers (arithmétique, algèbre, trigonométrie, géométrie) relèvent pour l'essentiel des mathématiques pures (tout en contenant certains thèmes *mixtes* traditionnels, en particulier de mathématiques *financières* : intérêts composés, annuités, etc.), tandis que les quatre derniers ressortissent presque entièrement aux mathématiques mixtes : *géométrie descriptive et géométrie cotée*, *cinématique*, *statique*, *cosmographie*.

Pourtant, sur un siècle environ, ce monde ancien va s'évanouir. Compagnons de route de l'enseignement des mathématiques tout au long du XIX^e siècle, le levé de plans, l'arpentage, la topographie – à laquelle Jacques Hadamard (1865-1963) consacre encore tout un livre de sa *Géométrie dans l'espace* au début du siècle – avaient tôt disparu des programmes après 1914. La statique, qui comportait notamment le thème des *machines simples* (levier, treuil, cabestan, bascule du commerce, poulies, palan, moufle), ne disparaîtra qu'au début des années 1960. La cinématique survécut jusqu'au milieu des années 1980. L'astronomie, demeurée longtemps présente dans les classes terminales littéraires, en disparaîtra à son tour avec les programmes de 1994. Notons que l'actuel programme du CAPES de mathématiques comporte toujours une section relative à la *cinématique du point* (vitesse, accélération, trajectoire, loi horaire, moment cinétique, dynamique, énergie cinétique), et inclut la question des oscillateurs harmoniques et du mouvement des planètes ; mais il s'agit là de vestiges d'un autre temps plutôt que de signes avant-coureurs d'un renouveau.

L'ouverture de la classe de mathématiques aux différents « environnements » de l'élève allait plus encore de soi à l'école primaire. Les textes cités plus haut, au demeurant, n'ignorent pas cette tradition, par rapport à laquelle ils entendent situer l'enseignement des mathématiques au collège, ainsi que le suggère ce passage du document d'accompagnement du programme de 3^e : « Les problèmes proposés et les situations étudiées sont souvent empruntés à la vie courante. Il y est question de terrains et de clôture, de volumes de gaz ou de liquide, de vitesse, de débits, de mélanges… Il y est aussi question de prix et de coûts, de pourcentages et de l'application de pourcentages à des grandeurs. Depuis l'école, on est passé progressivement de situations de comparaison de grandeurs (qui sont des abstractions à partir de caractéristiques d'objets de la vie courante), puis de mesurage, au travail sur les mesures, c'est-à-dire sur les nombres ».

La leçon est claire : grandir, scolairement parlant, c'est oublier les grandeurs, qui bornent l'horizon du premier âge. On s'arrêtera un instant pour rappeler à quel point l'enseignement primaire des « mathématiques » pouvait autrefois s'articuler à l'extramathématique, en l'observant en son point de plus grande proximité avec

« l'environnement » de l'élève : l'ouvrage que nous feuilletons ici, intitulé *J'apprends l'arithmétique et ses applications*, est en effet adressé aux élèves des classes de fin d'études [5]. Il paraît en 1953, reprenant une édition antérieure due à l'inspecteur général Gondevaux. Le responsable de cette réédition légèrement remaniée est un éminent algébriste, professeur à la Sorbonne, Albert Châtelet. La table des matières détaillée couvre trois pages : nous avons reproduit dans l'encadré 1 le premier tiers de la première page .

Sauf exception, chacune des leçons – il y en a 100 en tout – comporte quatre pages, dont deux d'exercices et problèmes. La 11e leçon s'intitule par exemple *Transport de voyageurs. Multiplication d'un nombre décimal par un entier*. Comme souvent, le contenu « mathématique » de la leçon, écrit en gras, vient en second lieu, tandis que le motif extramathématique est cité en premier. À titre d'illustration, on reproduit ci-après (encadré 2) la première page de cette leçon. L'ouverture à l'environnement extramathématique est ici patente. On notera, bien sûr, l'enquête à réaliser en début de leçon (rubrique qui figure en chacune des leçons proposées), mais aussi la présence, *jusque dans les calculs*, de grandeurs « concrètes », dont une grandeur *quotient* (un prix au kilomètre).

La 18e leçon, intitulée *Le transport des marchandises. Prix par poids et distance*, qui comporte trois sections spécialisées (sur les transports par chemin de fer, par bateaux, par camions), propose quant à elle une situation d'emploi d'une grandeur *produit* (encadré 3).

2.2. Des grandeurs aux mesures

Les manuels destinés autrefois au collège, ou plutôt aux écoles primaires supérieures (EPS), poursuivent le travail de mathématisation engagé à l'école primaire élémentaire. Ce qu'on nomme alors *arithmétique* est tout entier organisé *autour de la notion de grandeur*. Les auteurs d'un manuel conforme au programme du 26 juillet 1909 pour les EPS ouvrent ainsi leur ouvrage (Marijon, Péquignot & Ségala, s.d., p. 1-2) par le développement reproduit dans l'encadré 4. À la veille de la réforme des mathématiques modernes, les auteurs – un « comité d'universitaires » – d'un ouvrage de haute vulgarisation, la *Nouvelle Encyclopédie autodidactique Quillet* qui paraît en 1958, reprendront les mêmes formulations (encadré 5).

Les nombres, c'est-à-dire les nombres « abstraits », sont *génétiquement dépendants* des grandeurs, dont ils apparaissent d'abord comme les *mesures*. En d'autres termes, *les grandeurs constituent le point de départ obligé de la construction des nombres*. Les auteurs les plus soucieux de la cohérence de leur exposé consacrent un développement exprès à la notion de grandeur et à « l'arithmétique des grandeurs ». Ainsi en va-t-il de Marijon, Péquignot & Ségala, dont le premier chapitre de l'*Arithmétique* comporte les sections suivantes : 1. *Nombres et grandeurs* ; 2. *Égalité de grandeurs* ; 3. *Somme de deux grandeurs* ; 4. *Inégalité de deux grandeurs* ; 5. *Somme de plusieurs grandeurs* ; 6. *Multiple d'une grandeur – Partie aliquote – Commune mesure* ; 7. *Définition de la mesure des grandeurs*. On retrouve bien sûr dans les développements correspondants les éléments cardinaux de la construction classique de l'arithmétique, la dernière section proposant ces définitions déjà rencontrées : « Mesurer une grandeur, c'est chercher combien de fois elle contient une grandeur de même espèce, appelée unité. […] Un nombre est le résultat de la mesure d'une grandeur ».

[5] « La classe de fin d'études, précisent des instructions de 1938, doit servir de transition entre l'école et la vie. On souhaite que l'enfant y perde progressivement son esprit d'écolier pour s'initier aux problèmes concrets si variés que lui poseront dans la vie sa profession future et ses obligations de citoyen. On veut lui montrer qu'il peut résoudre nombre de ces problèmes à l'aide des notions qu'il a acquises à l'école. »

Leçon		Exercices et Problèmes	Pages
1	**Grands nombres**	1 à 26	8
2	Le bureau de poste. **Problèmes d'addition**	27 à 57	12
3	Monnaies et paiements. **Problèmes de soustraction**	58 à 84	16
4	**Multiplication des nombres entiers**	85 à 121	20
5	**Ligne droite. Égalité géométrique**	122 à 131	24
6	Longueurs. **Addition et soustraction des nombres décimaux**	132 à 166	28
7	Règles de commerce	167 à 186	32
8	Mesure pratique des longueurs	187 à 218	36
9	Traitement et salaires. **Problèmes de multiplication**	219 à 249	40
10	**Les Angles**	250 à 265	44

Encadré 1

11e LEÇON

TRANSPORT DES VOYAGEURS

Multiplication d'un nombre décimal par un entier

RENSEIGNEZ-VOUS. – 266. * En utilisant un indicateur, cherchez les prix de transport des voyageurs au km, complétez le tableau ci-dessous

CHEMIN DE FER. – La Société nationale des chemins de fer (S. N. C. F.) exploite le réseau français.

Classe	Prix au km
1re classe	
2e classe	
3e classe	

Le prix au km est fixé en francs et centimes (qui sont des centièmes de francs). Le prix d'un voyage est obtenu en multipliant le prix au km par le nombre de km ; il est arrondi au franc supérieur ou inférieur.

Les enfants de 4 à 10 ans paient **demi-tarif**, les militaires et les membres des familles nombreuses bénéficient d'une réduction de **75 F**, ou 30 F, ou **40 F**, ou **50 F**, ou **60 F**, ou **70 F**, **par centaine de F**.

Problème. – Le prix de base kilométrique de la S. N. C. F. était en novembre 1952 de **6,25 F par km** en 2e classe. Un père de famille nombreuse qui avait une réduction de **30 pour 100**, a pris un billet de 2e classe de Paris à Cherbourg dont la distance est **371 km**. Combien a-t-il payé ?

On peut calculer en centimes : 6,25 F = 625 centimes

625 c au km × 371 km = 231 875 c ou **2318,75 F**

```
   6,25
    371
   6 25
  437 5
 1875
2318,75
```

On multiplie 625 par 371, comme s'il n'y avait pas de virgule au multiplicande.

Dans le produit on sépare par une virgule 2 chiffres décimaux, autant qu'il y en avait au multiplicande.

Il y a 23,1875 centaines de francs ; la réduction est de : 30 F × 23,1875 = 695,625 F

Le prix à payer est 2318,75 – 695,625 = 1623,125

arrondi au franc (inférieur) : **1623 F**

267 En regardant l'opération, dire combien aurait coûté **en c**, puis **en F**, un voyage de **70 km**, de **300 km**.

268 Quel est le poids de **180 hl** de blé, pesant **74,500 kg par hl**. Calculer d'abord en **hg**. Justifier la règle.

Encadré 2

Problème. – On transporte par canal **300 t** de charbon du Nord à Paris. La distance est de **250 km** ; le tarif est de **7 F par t et par km**. Quel est le prix du transport ?

On peut multiplier 7 F par le nombre de tonnes, puis multiplier le produit par le nombre de km.

7 F × 300 = 2 100 F ; 2 100 F × 250 = **525 000 F.**

On peut calculer d'abord le nombre de **t × km**, puis multiplier 7 F par ce nombre :

300 × 250 = **75 000 t × km** ; 7 F × 75 000 = **525 000 F.**

Encadré 3

CHAPITRE PREMIER

Notions préliminaires – Définitions fondamentales

1. Nombres et grandeurs. Les notions de *nombre* et de *grandeur* sont les notions fondamentales de l'arithmétique. Comme toutes les idées premières, elles sont difficiles à définir.

Idée de nombre entier. – [...]

Idée de grandeur. – Sans vouloir définir les grandeurs d'une façon précise, nous pouvons dire que l'on désigne sous ce nom tout ce qu'on peut *évaluer* d'une manière plus ou moins exacte. Ainsi, la population d'une ville, la longueur d'un champ, le nombre de volumes d'une bibliothèque, le poids d'un corps, la contenance d'une barrique, sont des grandeurs.

D'une façon plus spéciale, on appelle *grandeurs mathématiques* celles pour lesquelles on peut définir l'*égalité* et la *somme*.

Parmi les *grandeurs mathématiques* les plus usuelles, on peut citer : *les collections d'objets distincts*, *les longueurs*, *les surfaces*, *les volumes*, *les arcs*, *les forces*, *les intensités de courant électrique*, *les quantités de chaleur*, *le temps*, etc.

Encadré 4

1. *IDÉE D'UNITÉ ET DE NOMBRE ENTIER*

Définitions. – On appelle unité chacun des objets d'une collection.

Le nombre entier exprime la quantité d'unités que comporte une collection.

Compter c'est chercher combien il y a d'unités dans une collection d'objets.

2. *IDÉE DE GRANDEUR*

On appelle grandeur tout ce qui peut être augmenté ou diminué, comme la largeur d'une route, la durée d'un trajet, la vitesse d'un véhicule, le nombre des feuillets d'un livre, etc.

On appelle plus spécialement *grandeurs mathématiques* celles pour lesquelles on peut définir l'égalité et la somme. Exemples : les surfaces, les volumes, les angles, les arcs, les forces, les quantités de chaleur, etc.

3. *MESURE D'UNE GRANDEUR ET NOMBRE ENTIER*

D'une façon générale :

Mesurer une grandeur c'est chercher combien de fois elle renferme une autre grandeur de même espèce prise pour unité.

Un nombre entier exprime donc la mesure d'une grandeur.

4. *NOMBRES CONCRETS ET NOMBRES ABSTRAITS*

Le nombre suivi de l'indication de l'unité qui l'a fourni s'appelle *nombre concret*.

Encadré 5

La formation de cette base technologico-théorique du domaine arithmétique est, bien entendu, fort ancienne. Le programme d'arithmétique du 18 octobre 1833 pour les collèges royaux de Paris et de Versailles, ainsi, s'ouvre par cette rubrique (d'après Belhoste 1995, p. 131) : « Notions sur les grandeurs. Leur mesure. Unités. Nombres abstraits. Nombres concrets ». Longtemps stable, centrée sur les notions de grandeur et de mesure afin de mener à bien la tâche de penser mathématiquement le monde qui nous entoure, l'organisation classique de l'arithmétique ne résistera pourtant pas à la commotion de la réforme des années 1960-1970. Les mathématiques mixtes, et plus encore peut-être *l'esprit de métissage conceptuel* seront les premières victimes de la montée d'un narcissisme mathématique expressément anti-utilitariste, prônant la pureté, et donc l'autarcie, des mathématiques enseignées.

3. Obstacles d'hier et d'aujourd'hui

3.1. Exclusion & exclusivité

Dans les années 1970, la purification moderniste du curriculum mathématique participe d'une redéfinition générale des frontières disciplinaires. Or cet *aggiornamento* pose en des termes souvent peu subtils la question de la légitimité, pour une discipline donnée, de mettre en jeu *motu proprio* des concepts dont, par ailleurs, telle autre discipline s'est persuadée qu'ils constituaient son apanage. Peut-on dès lors, professeur de mathématiques, travailler avec ses élèves en utilisant les notions de *densité* ou de *force* par exemple ? N'est-ce pas là une prétention illégitime, et même « dangereuse » ? Le mathématicien n'empiète-t-il pas, ce faisant, sur le territoire du physicien ? Ne prend-il pas le risque et la responsabilité d'associer, dans ses tribulations transdisciplinaires, violence symbolique et divagation conceptuelle ?

L'affermissement du quadrillage disciplinaire va de pair avec la diffusion d'une épistémologie du soupçon, fruit amer de la *vulgate* bachelardienne alors dominante, qui fait peser sur l'instruction scolaire une lourde police du concept, encourage l'autisme disciplinaire et trouve son principal soutien dans la double exigence fantasmatique d'une construction disciplinaire « rigoureuse » des contenus étudiés et, en image spéculaire, d'une compréhension « approfondie », par les élèves, des contenus ainsi « rigoureusement construits » – par contraste avec la « sous-compréhension » que l'on subodore chez des publics scolaires dont, désormais, la culture n'est plus en harmonie préétablie avec celle de l'institution scolaire et de ses agents.

Nous ne sommes pas sortis de cette période de contrôle aux frontières et de suspicions croisées. On cherchera en vain le mot de grandeur dans les nouveaux programmes de mathématiques de la classe seconde (en vigueur depuis la rentrée 2000). Mais on le croisera dans le programme de physique, et cela en un passage d'autant plus sensible qu'il participe d'une ferme revendication identitaire :

> « Par rapport au collège, l'approche de [la physique et de la chimie] au cours des années de lycée doit marquer une certaine rupture : c'est en effet au lycée qu'il faut amener les élèves à comprendre que le comportement de la nature s'exprime à l'aide de lois générales qui prennent l'expression de *relations mathématiques entre grandeurs physiques bien construites*. »

L'affirmation semble nier le travail qui, à suivre les instructions officielles, devrait s'accomplir au collège *dans la classe de mathématiques*. Mais voilà : ce travail mathématicien opère-t-il sur des grandeurs « bien construites », du moins s'agissant des grandeurs dites physiques ? La question, on le sent, est d'un censeur. Le questionnement est certes légitime. Il est même essentiel en un temps où, par le truchement de la statistique notamment, le curriculum mathématique s'ouvre à des « grandeurs » qui ne tombent pas simplement sous la juridiction d'une discipline « bien construite » et clairement reconnue par l'institution scolaire (on songe ici au continent des sciences anthropologiques, et surtout à ce qui, de la « vie quotidienne », leur échappe). Mais le ton tranche avec l'attitude de naïve générosité dans l'abord de ces grandeurs que les auteurs d'hier et d'avant-hier nommaient sans façon *mathématiques*, avec cette conséquence imparable que leur traitement *mathématique* et en particulier leur traitement *dans la classe de mathématiques* étaient par avance légitimes !

Pour retrouver fugitivement l'ouverture au monde d'un curriculum mathématique longtemps alimenté par l'ombilic des grandeurs, énonçons ici quelques-unes de ces grandeurs « mathématiques ». Voici d'abord les grandeurs quotients : le *débit*, quotient d'un *volume* par une *durée* (débit-volume), ou d'une *masse* par une *durée* (débit-masse) ; la *concentration* d'une solution, quotient de la *masse* de la substance dissoute par le *volume* de la solution ; la *puissance moyenne* d'un moteur, quotient par une *durée* de l'*énergie* fournie par le moteur pendant cette durée ; la *vitesse moyenne* d'un mobile, quotient de la *longueur* parcourue par le mobile par la *durée* du parcours ; la *production moyenne* d'une culture, quotient d'une *masse* par une *aire* ; le *pouvoir isolant* d'un gaz, quotient d'une *tension électrique* par une *longueur* (tension nécessaire pour provoquer une étincelle électrique entre deux électrodes plongées dans ce gaz et situées à une distance donnée l'une de l'autre) ; la *densité* d'un réseau routier ou ferroviaire, quotient d'une *longueur* par une *aire*. Voici, ensuite, les grandeurs produits : la *quantité d'électricité*, produit d'une *intensité* par une *durée* ; le *travail d'une force*, produit d'une *force* par une *longueur* ; le *nombre de journées-stagiaires*, produit du nombre de journées de stage par le nombre de stagiaires ayant suivi ce stage ; le *nombre de tonnes-kilomètres*, produit du nombre de tonnes transportées par le nombre de kilomètres parcourus. Au-delà, voici la profusion des grandeurs composées plus complexes, tel le *rendement moyen au mètre carré par an* d'une grande surface, etc.

Si elle n'entend pas céder aux injonctions d'une épistémologie tragique, si elle se garde de croire que tout se joue, ou peut se jouer, en chaque usage, si léger soit-il, du moindre concept, l'épistémologie que nous aimerions appeler *laïque* parce qu'elle ne se réclame d'aucune « confession disciplinaire » mais entend n'en offenser aucune, cette épistémologie ne donne pas pour cela dans l'illusion de savoirs *incréés*, toujours-déjà là, dans un univers cognitif où tout irait de soi, où rien ne serait problématique. À cet égard, les auteurs classiques n'omettent pas de préciser que, travaillant *avec* des grandeurs, l'arithmétique « laïque » se prévaut sans état d'âme de résultats établis en *d'autres* disciplines, mathématiques ou non. Dans leur *Arithmétique* pour les classes de 4^{e} et 3^{e}, Anna et Élie Cartan écrivent ainsi (Cartan & Cartan 1934, p. 206) :

> « L'Arithmétique n'établit pas la proportionnalité des grandeurs ; c'est l'objet de la science qui étudie chaque grandeur ; ainsi la Géométrie démontre que les longueurs des circonférences sont proportionnelles à leurs rayons. La proportionnalité peut aussi être le résultat d'une convention ; ainsi, on convient que les revenus d'une somme placée sont proportionnels aux durées de placement. »

Semblablement, des auteurs déjà cités (Marijon, Péquignot & Ségala, *op. cit.*, p. 333) énumèrent diverses relations de proportionnalité mises en jeu en arithmétique mais dont la justification n'incombe pas pour autant à l'arithmétique (encadré 6). Dans un ouvrage ultérieur, destiné encore aux EPS mais de facture plus élémentaire, deux des auteurs précédents expliciteront même le principe de pratiques si banales qu'elles en apparaîtraient aisément « naturelles » (Marijon & Péquignot 1928, p. 233) :

> « On admet, dans les transactions commerciales courantes que :
>
> *1° à des poids égaux d'une même marchandise correspondent des prix égaux ;*
> *2° si les prix payés pour les poids P et P' sont respectivement A et A', le prix payé pour le poids P+P' sera A+A'.* »

Pourtant les choses vont changer. L'ivresse souverainiste moderne qui s'empare de plusieurs disciplines – dont les mathématiques – et les pousse à ne rien accepter en leur sein sur lequel elles n'aient une complète autorité, la prétention à l'exclusivité de telle ou telle discipline à l'endroit d'au moins certains de « ses » objets, la tentation illusoire de la pureté à laquelle a pu succomber *la* mathématique – en oubliant que sa vraie nature est, indéfiniment, métisse –, tout cela est une donnée lourde, que l'on ne saurait éluder, du problème des grandeurs. On va voir pourtant qu'il ne s'agit pas là de l'unique obstacle à leur présence effective dans la classe de mathématiques.

394. *Exemples de grandeurs proportionnelles.* – Les sciences mathématiques et physiques offrent de nombreux exemples de grandeurs proportionnelles :

Par exemple :

La longueur d'une circonférence est proportionnelle à son rayon.
La vitesse acquise par un corps qui tombe librement dans le vide est proportionnelle au temps.
La résistance électrique d'un fil de cuivre est proportionnelle à sa longueur.
La quantité de chaleur dégagée par un courant dans un conducteur est proportionnelle à la résistance du conducteur.

On est convenu d'admettre que :

Le prix d'une marchandise qui se vend au poids est proportionnel au poids.
Le prix d'une pièce d'étoffe qui se vend au mètre, ou au mètre carré, est proportionnel à la longueur, ou à la surface de cette pièce d'étoffe.
Le salaire d'un ouvrier qui travaille à l'heure est proportionnel au nombre d'heures pendant lesquelles il a travaillé.
Le travail fait par plusieurs ouvriers est proportionnel à leur nombre.

Encadré 6

3.2. La question des unités

Même dans le cadre de l'arithmétique classique, les grandeurs auxquelles on se réfère dans la classe de mathématiques y sont le plus souvent présentes *in absentia*. En d'autres termes, si les objets supports de ces grandeurs (une réglette de telle longueur, un vase de telle capacité, etc.) peuvent bien être *évoqués*, ils ne sont pas, sauf exception, *amenés* dans la classe pour y être *exploités*. Les exercices reproduits dans l'encadré 7, extraits du chapitre *Surfaces, volumes, fractions décimales* d'un manuel déjà cité (Millet 1928, p. 132), sont typiques de ce style évocatoire.

326. Un vase pèse, plein d'eau, **825**$^{\mathrm{g}}$. On y plonge un morceau de cuivre pesant **374**$^{\mathrm{g}}$ (naturellement, une certaine quantité d'eau s'écoule). On pèse de nouveau le vase avec son contenu et l'on trouve **1 156**$^{\mathrm{g}}$**,5**. Déduire de cette expérience la densité du cuivre.

327. On vide le vase dont il s'agit dans le problème précédent ; il pèse seul **500**$^{\mathrm{g}}$; on le remplit d'alcool ; il pèse alors **760**$^{\mathrm{g}}$. En déduire la densité de l'alcool. (On admet que, dans les conditions de l'expérience, la densité de l'eau est **1**.)

Encadré 7

La classe de mathématiques est, de ce point de vue, peuplée d'ombres extramathématiques. Comme on a pu le souligner (Brousseau & Brousseau 1992), et comme on vient encore de le rappeler à travers l'exemple des exercices précédents, les pratiques de *mesurage de grandeurs*, notamment, y sont presque toujours *fictives*, et non *effectives*. Il semble en vérité que la question de la « présence effective » n'ait guère évolué depuis le temps où, dans une conférence prononcée en 1904, intitulée *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*, Émile Borel (1871-1956) disait son souhait que soit créé en chaque établissement secondaire un « laboratoire de mathématiques », où une simple balance d'épicier, « de l'eau et quelques récipients permettraient, par exemple, de faire faire aux élèves, sur des données concrètes, les problèmes classiques sur les bassins que l'on remplit à l'aide d'un robinet et que l'on vide en même temps à l'aide d'un autre robinet, etc. »

Bien qu'il s'agisse là, sans doute aucun, d'un obstacle crucial dans une visée de désenclavement scientifique et culturel des classes de mathématiques, nous n'irons pas plus loin à ce propos. Nous nous tournerons maintenant vers une autre source de difficulté, fort ancienne elle aussi. Si les « objets » supports des grandeurs sont absents de la classe, les grandeurs pourraient y être présentes aisément sous la forme de « nombres concrets » : 12 km est une longueur, 3 m/h est une vitesse, etc. Or l'enseignement des mathématiques a depuis longtemps fonctionné à cet égard comme un « triangle des Bermudes » : *les unités – et donc les grandeurs – y disparaissent*.

Observé dans une classe de 6^{e} qui étudie alors les écritures fractionnaires de nombres décimaux, l'épisode suivant illustre l'un des effets ordinaires de ce phénomène. Pour la séance observée, les élèves devaient déterminer combien il y a de minutes dans une demi-heure, dans un quart d'heure, dans un cinquième d'heure, etc. Une élève passe au tableau pour corriger l'exercice. Le travail se réalise à travers un dialogue entre l'élève et le professeur. Les traces écrites qui apparaissent sur le tableau sont les suivantes :

$$\frac{1}{2} = 30 \text{ mn} \quad \frac{1}{4} = 15 \text{ mn} \quad \frac{1}{5} = 12 \text{ mn}$$

Le professeur commente la solution de l'élève, mais ne corrige pas les égalités écrites au tableau. Il est pourtant clair que ces égalités ne sont pas correctes : le *nombre* 1/5 (= 0,2) ne saurait être égal à la *durée* 12 min, pas davantage que 12 cm n'est égal à 12 kg.

On sait qu'il s'agit là, pourtant, d'une pratique aujourd'hui dominante, qui altère le commerce que l'on peut entretenir avec les grandeurs même les plus usuelles, et sur laquelle les rares informations scientifiques et techniques dont disposent les professeurs semblent jusqu'à présent n'avoir eu que peu de prise. Tel manuel de mathématiques de 5^{e} (Jullien & Penninckx, s.d., p. 3) commence fort à propos par indiquer les normes de l'AFNOR (Association française de normalisation) en la matière (encadré 8).

Il est tout à fait autorisé d'écrire :
1,825 km = 1 825 m
2 m × 3,5 m = 7 m^2

Encadré 8

Mais les auteurs n'ont toutefois pas l'audace de mettre ces principes en œuvre, ainsi que le montre l'encadré 9, où on les voit reprendre un usage très répandu (*ibid.*, p. 327).

aire de base A_2 = (6 × 6) : 2 = 18 cm^2
aire de base A_3 = 72–18 = 54 cm^2
V_2 = 18 × 12 = 216 cm^3
V_3 = 864–216 = 648 cm^3

Encadré 9

Nombre de manuels – et de professeurs à leur suite – tentent pourtant d'échapper à ce non-sens brutal par une manœuvre qui, en réalité, va amplifier le phénomène : *en éliminant le plus possible les unités*. En une première étape, on ose encore écrire les longueurs avec des unités : ainsi demandera-t-on par exemple de construire un triangle ABC tel que « BC = 8 cm, AB = 4,8 cm, AC = 6,4 cm ». En une deuxième étape, on parlera d'un rectangle ABCD « de longueur 5 cm », mais on *écrira* déjà beaucoup moins facilement « AB = CD = 5 cm ». En même temps, la manœuvre est vénérable, on sépare soigneusement le *calcul*, effectué sur des *nombres*, et le résultat final, où, classiquement, on réintroduit discrètement les unités, ainsi que le montre l'encadré 10, extrait d'un manuel de 6^e (Benoît *et al.* 1986, p. 161) :

> 1. Un rectangle de longueur 5 cm et de largeur 3 cm a pour aire : 15 cm^2. Elle s'obtient en calculant le produit 5×3.
> 2. Un rectangle de longueur 2,8 m et de largeur 1,3 m a pour aire, en m^2 : 2,8×1,3 = 3,64 soit 3,64 m^2.

Encadré 10

On notera comment est évitée, ici, l'écriture fautive $2{,}8 \times 1{,}3 = 3{,}64\ \mathrm{m}^2$: en cette deuxième étape s'introduit en effet le procédé rhétorique qui consiste à parler, non plus d'une « aire de 3,64 m^2 », mais d'une « aire qui vaut, en m^2, 3,64 ».

En une troisième étape, l'altération réparatrice est plus radicale : pour ne pas avoir à mentionner l'unité, celle-ci est fixée une fois pour toutes au départ, et n'apparaît plus ensuite, sauf éventuellement dans les résultats terminaux. Ainsi en va-t-il dans l'encadré 11, qui reproduit un passage d'une épreuve du brevet des collèges (Amiens, juin 1993).

> La figure ci-dessous représente en perspective cavalière un pavé droit ABCDEFGH.
> L'unité de longueur est le centimètre.
> On a : AD = AE = 6, AB = 8.

Encadré 11

Dans un tel contexte, si l'on demande de calculer le volume du pavé, le candidat au brevet pourra écrire, à l'instar des auteurs de manuels : « Volume du pavé en cm^3 : 6×6×8 = 288 ». Le style d'écriture auquel on aboutit au terme de cette évolution a le mérite d'éviter les égalités du type $6 \times 6 \times 8 = 288\ \mathrm{cm}^3$. Mais il conduit alors, dans la classe de mathématiques ainsi « rénovée », à des pratiques en décalage non débattu et non négocié avec la tradition, fautive mais dominante, qui se maintient intacte dans la classe de physique, comme l'atteste l'encadré 12, extrait d'un manuel de physique de 2^{de} (Gentric 1993, p. 24) :

> L'amplitude est représentée sur l'écran par 1,5 div et la sensibilité correspondante est de 5 V/div. L'amplitude est donc
> $U_{max} = 1{,}5 \times 5 = 7{,}5$ V.
> La période est représentée sur l'écran par 2 div et la sensibilité horizontale est de 5 ms/div. La valeur de la période est donc
> 5×2 = 10 ms = 10^{-2} s.
> La fréquence est l'inverse de la période, donc f = 1/10^2 = 100 Hz.

Encadré 12

3.3. Changer d'unité : détresse technique et déficit technologique

Quelles que soient les variantes tactiques de la stratégie d'esquive des unités, un problème demeure qui, dans le quotidien de la classe, fait la vie plus difficile encore aux grandeurs : celui du *changement d'unités*. Au fil des classes du collège, la gamme des « compétences exigibles » à ce sujet s'accroît. En 6^e, il convient de savoir effectuer des changements d'unités « pour les longueurs et les aires ». En 5^e, l'exigence s'étend aux volumes et aux temps (durées), cas dans lequel il convient de savoir « utiliser des unités combinant le système décimal et le système sexagésimal ». En 4^e il faut apprendre à « changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure) » ; mais, au-delà, et sans que leur maîtrise soit exigible, « d'autres situations de changements d'unités méritent d'être envisagées : problèmes de change monétaire, consommation de carburant d'un véhicule en litres pour 100 kilomètres ou en kilomètres parcourus par litre », bref tout ce que le résumé synoptique des programmes – reproduit plus haut – désigne comme « grandeurs quotients courantes ». En 3^e, enfin, on l'a vu, les élèves auront à manipuler des « grandeurs composés » d'une grande diversité.

De quels outils mathématiques les élèves disposent-ils pour effectuer les changements d'unités demandés ? L'extrait d'un manuel de 3^e récent reproduit dans l'encadré 13 (Chapiron *et al.* 1999, p. 52) ne laisse pas de doute à cet égard.

Convertir les unités de grandeurs composées

Méthode *Convertir successivement les unités des deux grandeurs*

Exemple : Convertir 1,25 g/cm^3 en kg/m^3
Réponse :

- On convertit l'unité de masse : 1,25 g = 0,001 25 g
  donc 1,25 g/cm^3 = 0,001 25 kg/cm^3.
- On convertit l'unité de volume : 1 m^3 = 1 000 000 cm^3.
  0,001 25 × 1 000 000 = 1 250
  donc 0,001 25 kg/cm^3 = 1 250 kg/m^3.
- On conclut : 1,25 g/cm^3 = 1 250 kg/m^3.

Encadré 13

La technique employée apparaît immédiatement lourde, avec une accumulation de calculs partiels non intégrés qui en diminue fortement la fiabilité. Convertir des g/cm^3 en kg/m^3 est ici un travail en soi. Convertir – on le fera plus loin – une atmosphère en PSI (*pound per square inch*, livre-force par pouce carré) serait un véritable exploit ! Le travail avec des grandeurs exprimées en « nombres concrets », qui suppose généralement des calculs sur les unités, en devient d'autant plus coûteux, et donc, en pratique, *improbable*.

Il y aura bientôt trente ans, l'éminent mathématicien que fut Hans Freudenthal notait ceci, que nous reprendrons à notre compte dans ce qui suit (Freudenthal 1973, p. 207) :

> *« The pure mathematician, of course, detests concrete numbers and leaves them ungrudgingly to the mercy of the physicist. Are not divisions like 150 km : 3h = 50 km/h shocking ? Let him retire to his ivory tower if it is against his nature to teach children something that belongs to everyday life. The argument of rigour against computations with concrete numbers is completely mistaken. Concrete numbers are absolutely rigorous, and the resistance of some mathematicians against them is sheer dogmatism. »*

De fait, la difficulté du rapport scolaire aux grandeurs – marqué notamment par une véritable détresse technique en matière de changement d'unités – est surdéterminée par un fait patent : les professeurs français de mathématiques (et de physique) ne disposent pas aujourd'hui d'une *technologie* adéquate relative aux « nombres concrets » qui, notamment, justifie une technique simple, fiable, intelligible de changement d'unités. Observant qu'il y a là un *no man's land* dont se détournent le physicien comme le mathématicien, Freudenthal en faisait naguère retomber la responsabilité sur le mathématicien, auquel il adressait en cette occasion des reproches déjà suggérés (*op. cit.*, p. 198) :

> *« This is the fault of the mathematician. To put it bluntly: ought students to wait for a scientifically sophisticated theory of electricity in order to learn what a kilowatt-hour is, and in general, to learn what is the thing one pays for in the various forms of purchasable work ? »*

C'est en effet une théorie *mathématique* des unités (et des grandeurs) qui fait actuellement défaut dans la culture de l'enseignement des mathématiques (et des sciences physiques aussi bien). Pour donner tout de suite une idée de ce que pourrait être une telle théorie [6], reprenons ici la question, abordée par une classe de 6[e], des fractions d'heure. Le fait mathématique essentiel est le suivant : les durées constituent un demi-*espace vectoriel de dimension* 1 *sur* $\mathbb{R}$. Une *base* de cet espace vectoriel est constituée d'une *durée non nulle quelconque*, « l'unité de temps », qui peut être l'heure, la minute, la seconde, etc. La notation 3 min, par exemple, désigne non un élément de $\mathbb{R}$ – un *scalaire* –, mais un élément de cet espace vectoriel des durées – un *vecteur*. D'où cette première conclusion : écrire 3 min = 0,05 par exemple, soit l'égalité d'un vecteur (3 min) et d'un scalaire (0,05), n'a *a priori* pas de sens.

On pourrait bien sûr envisager d'identifier à $\mathbb{R}$ ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. Mais cela ne peut se faire sans dommage que si l'on a choisi une base, *et si l'on s'y tient*. Or ce n'est précisément pas ce qui se passe dans l'épisode observé, où le problème posé aux élèves est exactement un problème *de changement de base* : étant donné deux durées d et d' non nulles, telles que $d = k\,d'$ (où $k \in \mathbb{R}_+^*$), passer de l'unité d à l'unité d' c'est, dans le langage de l'algèbre linéaire, passer de la base $\{d\}$ à la base $\{d'\}$. Ainsi la durée qui a pour coordonnée 1/5 dans la base {h} a-t-elle pour coordonnée 12 dans la base {min} : $\frac{1}{5}\text{h} = 12\text{ min}$. Le problème technique proposé aux élèves peut donc, emphatiquement, se formuler ainsi : *comment passer d'une base à une autre ?*

On a rappelé la technique de « conversion » aujourd'hui dominante. La mathématisation que l'on vient de brosser fournit, par contraste, une technique simple et sûre, fondée sur les égalités h = 1 h = 60 min, qu'illustrent les exemples suivants : $\frac{1}{5}\text{h} = \frac{1}{5}(60\text{ min}) = \left(\frac{1}{5} \times 60\right)\text{min} = 12\text{ min}$; $\frac{11}{15}\text{h} = \frac{11}{15}(60\text{ min}) = \left(\frac{11}{15} \times 60\right)\text{min} = 44\text{ min}$.

Cette technique s'étend sans difficulté à *tous* les problèmes élémentaires de changement d'unités. Elle permet seule, dès lors qu'un certain niveau de complexité est atteint, de produire de façon fiable et rapide des résultats exacts. Soit par exemple à exprimer en centimètres la longueur $\ell = 7.10^{-6}$ km. On a d'abord $1\text{ km} = 1000\text{ m} = 1000\,(100\text{ cm}) = (1000 \times 100)\text{ cm} = 10^5\text{ cm}$, puis $\ell = 7.10^{-6}\text{ km} = 7.10^{-6}\,(10^5\text{ cm}) = 7.10^{-1}\text{ cm} = 0{,}7\text{ cm}$. On peut évidemment procéder sans utiliser la notation exponentielle, fort pratique ici : $\ell = \frac{7}{1000\,000}\text{ km} = \frac{7}{1000\,000}(100\,000\text{ cm}) = 0{,}7\text{ cm}$.

La technique présentée possède en outre l'éminente vertu de ne pas contraindre à faire des « conversions d'unités » *une opération à part*, réalisée à l'écart du « calcul principal » censé appeler ces conversions. Pour le faire voir nettement, on comparera ci-après, à propos

[6] Une théorie générale des grandeurs sera présentée dans la deuxième partie de cette étude (à paraître).

de sept petits problèmes de changement d'unités, la technique « avec les unités », que l'on nommera *concrète* parce qu'elle porte sur des « nombres concrets », et la technique ordinaire, « loin des unités », que l'on nommera *abstraite* puisqu'elle porte sur des « nombres abstraits ».

Dans ce qui suit, la technique abstraite est mise en œuvre par un professeur de sciences physiques enseignant en lycée qui, au cours d'une enquête réalisée il y a quelques années, avait bien voulu répondre à la consigne suivante : « On trouvera ci-après une liste de 7 exercices de changement d'unités ; on suppose, même si la chose n'est pas réaliste aujourd'hui, que ces exercices ont été proposés aux élèves d'une classe de seconde. Donnez, pour chacun d'eux, un corrigé détaillé, accompagné des commentaires qui vous sembleraient utiles ».

Le premier problème était le suivant : « Un réservoir parallélépipédique a 0,6 m de longueur, 10 cm de largeur, et 50 mm de profondeur. Quelle est, en litres, sa capacité ? (On prendra : 1 litre = 1 dm^3.) » Le corrigé du professeur est reproduit dans l'encadré 14.

Convertir toutes les longueurs en dm.
L = 0,6 m = 6 dm ℓ = 10 cm = 1 dm p = 50 mm = 0,5 dm
Le volume est alors obtenu en dm^3 $V = L \times \ell \times p$
$V = 6 \times 1 \times 0{,}5 = 3\ dm^3 = \underline{3\ \ell}$

Encadré 14

Dans la technique concrète, on utilise bien la formule $V = L \times \ell \times p$, mais L, ℓ, p sont alors, non des *nombres* (« abstraits »), mais des *grandeurs* (des « nombres concrets »). Comme L = 0,6 m, ℓ = 10 cm, p = 50 mm, il vient simplement $V = 0{,}6\ m \times 10\ cm \times 50\ mm$.

À partir de là, les voies du calcul sont multiples. Si l'on décidait – pourquoi pas ? – de prendre pour unité de volume le produit $\varpi = m \times cm \times mm$, on aurait : $V = 0{,}6\ m \times 10\ cm \times 50\ mm = (0{,}6 \times 10 \times 50)\ m \times cm \times mm = 300\ \varpi$. Si, comme ici, on cherche à exprimer le volume en dm^3, on peut par exemple procéder ainsi : $V = 0{,}6\ m \times 10\ cm \times 50\ mm = 0{,}6\ (10\ dm) \times 10\ (10^{-1}\ dm) \times 50\ (10^{-2}\ dm) = 6\ dm \times 1\ dm \times 0{,}5\ dm = 3\ dm^3$ = 3 litres.

On trouvera dans les tableaux ci-après les problèmes 2 à 7 et leur traitement, à gauche par la technique concrète, à droite par la technique abstraite aujourd'hui dominante. Dans ce dernier cas, les corrigés et commentaires présentés sont du professeur déjà mentionné.

<table>
<tr><td colspan="3">Problème 2. Un barreau d'acier de section constante et de 4 dm de longueur pèse 2,85 kg. Déterminer sa masse linéique en g/cm.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Technique concrète</td><td colspan="2">Technique abstraite</td></tr>
<tr><td>Corrigé</td><td>Commentaire</td></tr>
<tr><td>$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{2{,}85\ kg}{4\ dm} = \frac{2{,}85\ (1000\ g)}{4\ (10\ cm)} = \frac{285}{4}\ g/cm = 71{,}25\ g/cm$</td><td>Convertir la masse en g
$M = 2{,}85\ kg = 2{,}85 \times 10^3\ g$
Et la longueur en cm
$\ell = 4\ dm = 40\ cm$
La masse linéique $= \frac{m}{\ell} = \frac{2{,}85 \times 10^3}{40} = 71{,}2\ g/cm$</td><td>*La masse linéique n'a aucune signification pour nos élèves. Donner la formule.*</td></tr>
</table>

Tableau 2

Problème 3. Au tennis les balles atteignent la vitesse de 95 miles par heure. Que représente cette vitesse en mètres par seconde ? (On a : 1 mile = 1 mi = 1,609 km.)		
Technique concrète	Technique abstraite	
	Corrigé	Commentaire
$v = 95\ \text{mi/h} = \frac{95\ \text{mi}}{1\ \text{h}} = \frac{95\ (1609\ \text{m})}{3600\ \text{s}}$ $\approx 42{,}5$ m/s	v = 95 miles/heure $v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{95\ \text{miles}}{1\ \text{heure}}$ Convertir les miles en mètres $d = 95\ \text{mi} = 95\times1{,}609\ \text{km}$ $= 95\times1{,}609\times10^3\ \text{m} = 1{,}53\times10^5$ Convertir $\Delta t = 1\ \text{h} = 3600\ \text{s}$ D'où v = 42,4 m/s	

Tableau 3

Problème 4. La masse volumique du zinc est de 7,29 kg/dm^3. Quelle est, en grammes, la masse de 9 cm^3 de ce métal ?		
Technique concrète	Technique abstraite	
	Corrigé	Commentaire
$m = \mu v = (7{,}29\ \text{kg/dm}^3)(9\ \text{cm}^3) =$ $7{,}29\ \text{kg}\cdot\text{dm}^{-3} \times 9\ \text{cm}^3 =$ $7{,}29\ (10^3\ \text{g})\cdot(10\ \text{cm})^{-3} \times 9\ \text{cm}^3 =$ $7{,}29 \times 9\ \text{g} \approx 65{,}6\ \text{g}$	$\mu = \frac{m}{v} = 7{,}29\ \text{kg/dm}^3$ Convertir μ en g/cm^3 $\mu = 7{,}29\ \text{kg/dm}^3 = \frac{7{,}29\ \text{kg}}{1\ \text{dm}^3} =$ $\frac{7{,}29\times10^3\ \text{g}}{10^3\ \text{cm}^3} = 7{,}29\ \text{g/cm}^3$ D'où $m = \mu v = 7{,}29\times9 \approx 65{,}6$ g	*Deux difficultés : changement d'unité* <u>*et*</u> *calcul sur la formule*

Tableau 4

Problème 5. Les acides gras s'étalent spontanément sur l'eau où ils forment un film monomoléculaire. On verse dans une cuvette pleine d'eau une quantité de 0,1 mm^3 d'acide stéarique (acide gras), qui s'étale pour former une tache de 400 cm^2. Quelle est, en angströms, l'épaisseur moyenne du film d'acide ? (On rappelle que l'on a : 1 Å = 10^{-7} mm.)		
Technique concrète	Technique abstraite	
	Corrigé	Commentaire
$e = \frac{0{,}1\ \text{mm}^3}{400\ \text{cm}^2} = \frac{0{,}1\ \text{mm}^3}{400\ (10\ \text{mm})^2} =$ $\frac{0{,}1}{4\cdot10^4}\ \text{mm} = 25\cdot10^{-7}\ \text{mm} = 25\ \text{Å}$	Le volume d'acide gras est v = 0,1 mm^3. La surface est s = 400 cm^2. On demande l'épaisseur. $v = s \times e$ donc $e = \frac{v}{s}$. Exprimons v en mm^3, s en mm^3, on aura e en mm^3 : v = 0,1 mm^3 s = 400 cm^2 = 400×10^2 mm^2. D'où $e = \frac{v}{s} = \frac{0{,}1}{400\times10^2} = 2{,}5\times10^{-6}$ mm. Avec 1 Å = 10^{-7} mm on a $e = \frac{2{,}5\times10^{-6}}{10^{-7}}\ \text{Å} = 25\ \text{Å}$	*Très difficile*

Tableau 5

Problème 6. Une pression de 1 atmosphère vaut 101,3 kPa. Dans la littérature scientifique de langue anglaise, on trouve souvent les pressions exprimées en PSI, c'est-à-dire en *pound per square inch*, ou livre-force par pouce carré. On a : 1 Pa = 1 N/m^2 ; 1 livre-force = 1 lbf = 4,448 N ; 1 pouce = 1 in = 2,54 cm. Que vaut 1 atmosphère en PSI ?		
Technique concrète	Technique abstraite	
	Corrigé	Commentaire
1 atm = $101{,}3\cdot10^3$ Pa = $101{,}3\cdot10^3$ N/m^2 $= 101{,}3\cdot10^3 \dfrac{\frac{1}{4{,}448}\ \text{lbf}}{\left(\frac{100}{2{,}54}\ \text{in}\right)^2} =$ $\dfrac{101{,}3\cdot10^3\times2{,}54^2}{4{,}448\cdot10^4}$ lbf/in$^2 \approx 14{,}69$ PSI		

Tableau 6

Problème 7. La masse volumique de l'eau, à 4 °C, est 1 g/cm^3. Donner cette masse volumique en livres anglaises par pied cube. (On a : 1 livre anglaise = 1 lb = 0,454 kg ; 1 pied = 1 ft = 0,305 m.)		
Technique concrète	Technique abstraite	
	Corrigé	Commentaire
$\mu = 1\ \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \dfrac{10^{-3}\ \text{kg}}{(10^{-2}\ \text{m})^3} = 10^3\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} =$ $10^3\ \dfrac{1\ \text{lb}}{0{,}454\ \text{m}^3} = 10^3\ \dfrac{0{,}305^3\ \text{lb}}{0{,}454\ \text{ft}^3} =$ $\dfrac{30{,}5^3\ \text{lb}}{454\ \text{ft}^3} \approx 62{,}5$ lb/ft^3		

Tableau 7

La résolution de ces petits problèmes par la technique abstraite apparaît rapidement comme un véritable supplice, source d'une souffrance sans valeur formatrice – sans doute parce que, dans ce contexte, il n'y a à peu près rien à quoi former les élèves. Le professeur sollicité le dit sans ambages ; ses corrigés – dont les deux derniers manquent – sont en effet précédés de cet exorde irrité : « *Jamais* je n'aurais posé ces exercices, d'autant plus que les élèves ne connaissent qu'*un* système, le SI. Je ne donnerai pas de correction pour les n° 6 et 7 ! » Ayant donné le corrigé des problèmes 1 à 5, ce professeur formule un commentaire d'ensemble peu amène : « Je doute de l'intérêt pédagogique et formateur de ces exercices de 1 à 5. Quant aux deux derniers, n'en parlons pas ! »…

La volonté de tenir à l'écart les grandeurs, de ne les recevoir jamais que dans ce sas où, pour éviter qu'elles ne contaminent quelque autre calcul, elles seront « converties » en nombres abstraits, conduit mécaniquement à des pratiques dont l'impuissance éclate. Revenons ainsi sur le problème 5, que le professeur interrogé a jugé *très difficile* (ce que confirme l'aspect hésitant, pas à pas, du corrigé proposé). Ce problème consiste, étant donné un *parallélépipède rectangle* dont on connaît le *volume v* et l'*aire* de la *base s*, a en calculer la *hauteur e*. La réponse, on le sait, est en principe triviale : on a $e = v/s$. Mais voilà : dans l'arithmétique concrète, v, s et e sont, très naturellement, des *grandeurs*. Or, dans les classes françaises de mathématiques ou de physique, *on ne sait pas calculer avec des grandeurs*. Une trivialité devient ainsi, pour les élèves des lycées, chose *très difficile* – tandis que les calculs nécessaires pour passer d'un système d'unités à un autre (problèmes 6 & 7) semblent à jamais hors de portée !

On aura remarqué, toutefois, que dans le corrigé du problème 4 le professeur passe subrepticement à l'arithmétique concrète pour convertir la masse volumique μ, puisqu'il écrit :

$$\mu = 7{,}29\ \mathrm{kg/dm^3} = \frac{7{,}29\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{dm^3}} = \frac{7{,}29\times10^3\ \mathrm{g}}{10^3\ \mathrm{cm^3}} = 7{,}29\ \mathrm{g/cm^3}.$$

Le rigorisme de l'abstraction à la française n'est donc pas inentamable – dès lors que, sous la pression des contraintes de la pratique, le surmoi institutionnel fléchit un peu. Par contraste, cependant, en d'autre pays les choses vont tout autrement. À titre d'exemple, considérons d'abord (encadré 15) une arithmétique pour autodidactes parue dans la collection *Teach Yourself Books* (Pascoe 1971, p. 47-49).

Ex. 2. Express the speed of 90 km/h (90 km h^{-1}) in metres per second.

We have $\frac{90\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}} = \frac{90\times1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = \mathbf{25\ m/s\ (m\ s^{-1})}$.

…

Ex. 3. How many tiles 6 cm × 9 cm are needed to cover a wall of length 3.6 metres to a height of 1.8 metres, if the tiles are laid longways ?

$$\frac{\text{Length of wall}}{\text{Length of tile}} = \frac{3.6\ \mathrm{m}}{9\ \mathrm{cm}} = \frac{360\ \mathrm{cm}}{9\ \mathrm{cm}} = \frac{360}{9} = 40$$

$$\frac{\text{Height of wall}}{\text{Hight of tile}} = \frac{1.8\ \mathrm{m}}{6\ \mathrm{cm}} = \frac{180\ \mathrm{cm}}{6\ \mathrm{cm}} = \frac{180}{6} = 30$$

∴ Number of tiles needed 40 × 30 = **1200**

…

Ex. 4. Taking one metre as 39.6 inches approximately, show that 1 hectare is very nearly 2½ acres.

We have 1 hectare = 10 000 m^2 = 10 000×$(39{,}6)^2$ in^2

1 acre = 4840 yd^2 = 4840 × $(36)^2$ in^2

$$\therefore \frac{1\ \text{hectare}}{1\ \text{acre}} = \frac{10\,000}{4840} \times \left(\frac{39.6}{36}\right)^2$$

Encadré 15

On saisit là l'un des puissants motifs de cette moindre réticence à l'intégration des unités dans les calculs : lorsqu'on doit travailler avec des systèmes d'unités non décimaux, la technique abstraite présente une fiabilité bien trop réduite. Dans un manuel espagnol [7] pour la classe correspondant à notre 3e (De la Llave 1994, p. 21), c'est précisément par un tel cas que l'auteur choisit d'introduire la technique concrète de changement d'unités (encadré 16). Un ouvrage de physique (García & Aguado 1986, p. 26) pour des classes d'un niveau équivalent à celui du baccalauréat professionnel français montre que cette intégration des unités dans les calculs va bien au-delà des calculs de changement d'unités (encadré 17)

L'intégration des unités dans les calculs n'est donc pas une pratique réservée aux seuls calculs de changement d'unités. Un dernier exemple le rappellera. On laisse tomber une pierre d'une hauteur de 60 mètres ; on veut calculer la vitesse à laquelle la pierre touchera le sol. Le résultat est fourni par l'égalité classique $v^2 = 2g{\cdot}s$, où s est la distance parcourue et où on prend $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. On a alors (García & Aguado 1986, p. 29) :

$$v = \sqrt{2g{\cdot}s} = \sqrt{2{\cdot}9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}{\cdot}60\ \mathrm{m}} = 34{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

[7] Le lecteur non familier de la langue espagnole se centrera sur les calculs présentés, qui sont ici l'essentiel.

Problema

En el manual técnico de un coche de importación se indica que el consumo del motor es 3½ galones cada 100 millas. Expresar dicho consumo en litros cada 100 km.

Procedimiento de resolución

Teniendo en cuenta las equivalencias 1 gal = 3,78 l, 1 mi = 1,61 km, resulta que, al sustituir las unidades por sus equivalentes, se obtiene

$$\text{Consumo} = \frac{3{,}5\ \text{gal}}{100\ \text{mi}} = \frac{3{,}5 \times (3{,}78\ \text{l})}{100 \times (1{,}61\ \text{km})} = \frac{3{,}5 \times 3{,}78}{1{,}61} \times \text{l}/100\ \text{km} =$$

8,22 l/100 km.

Encadré 16

Un automóvil empieza a subir une cuesta recta a 72 km/h y llega a la parte más alta a 36 km/h habiendo disminuido uniformemente la velocidad.

a) Hallar la longitud de la cuesta si tardó 4 minutos en subirla.
b) ...

Expresamos, en primer lugar, las velocidades en m/s:

$$v_0 = \frac{72\ \text{km}}{\text{h}} = \frac{72\ 000\ \text{m}}{3\ 600\ \text{s}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ v = \frac{36\ \text{km}}{\text{h}} = \frac{36\ 000\ \text{m}}{3\ 600\ \text{s}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) Calculamos la aceleración:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \cdot 60\ \text{s}} = \frac{-\,10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{240\ \text{s}} = -\,0{,}04\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Determinada la aceleración, calculamos la distancia recorrida en 4 minutos, o sea, la longitud de la cuesta:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}\, a \cdot t^2 = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 240\ \text{s} - \frac{1}{2}\, 0{,}04\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 240^2\ \text{s}^2$$

$$= (4800 - 1152)\ \text{m} = 3\ 648\ \text{m}.$$

Encadré 17

Il n'est guère besoin d'insister sur la grande fiabilité de cette technique de calcul, qui rend en particulier inutile la vérification de la cohérence dimensionnelle, puisque le contrôle se fait ici *en continu, tout au long du calcul*. La grande question, alors, est celle des voies et moyens d'une volonté de *réintégration* des unités dans les calculs, et, par là, des grandeurs dans la classe de mathématiques.

Références bibliographiques

BACON F. (1605), *Du progrès et de la promotion des savoirs* (1991). Paris : Gallimard.

BELHOSTE B. (textes officiels réunis et présentés par) (1995), *Les sciences dans l'enseignement secondaire français*, tome 1 (1789-1914). Paris : INRP & Economica.

BENOÎT A., GUTMACHER F., GUY D., HUGON A. (1986), *Mathématiques 6^e*. Paris : Didier.

BOREL É. (1904), *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire* (1904). Paris : Conférences du Musée pédagogique, Imprimerie nationale.

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. (1992), Le poids d'un récipient. Étude des problèmes de mesurage au CM, *Grand N*, 50, 65-87.

CARTAN A., CARTAN É. (1934), *Arithmétique (Classes de 4^e^ et de 3^e^)*. Paris : Armand Colin.

CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PÉROTIN C. (1999), *Mathématiques 3^e^*. Paris : Hatier.

COMITÉ D'UNIVERSITAIRES (1958), *Nouvelle Encyclopédie autodidactique Quillet*, tome 1. Paris : Aristide Quillet.

DE LA LLAVE A. (1994), *Matemáticas 3*. Madrid : Bruño.

FREUDENTHAL H., *Mathematics as an Educational Task* (1973). Dordrecht : D. Reidel.

GARCÍA POZO T., AGUADO HOMBRÍA (1986), *Física*. Barcelone : Edebé.

GENTRIC R. (ss la dir. de) (1993), *Physique Chimie Seconde*. Paris : Hatier.

GONDEVAUX G., CHÂTELET A. (1953), *J'apprends l'arithmétique et ses applications. Classe de fin d'études* (C.E.P.). Paris : Bourrelier.

JULLIEN V., PENNINCKX J. (s.d.), *Mathématiques 5^e^*. Paris : Magnard.

MARIJON A., PÉQUIGNOT A., SÉGALA J.-L. (s.d.), *Arithmétique*. Paris : Hatier.

MARIJON A., PÉQUIGNOT A. (1928), *Arithmétique des écoles primaires supérieures*. Paris : Hatier.

MILLET A. (1923), *Arithmétique*. Paris : Hachette.

PASCOE L.C. (1971), *Arithmetic*. Londres : Hodder and Stoughton.

ROUSSEL Y. (1996), Jeunesse et permanence du Système International (SI). In Marquet L., Le Bouc A., Roussel Y., *Le Système Métrique, hier et aujourd'hui*. Amiens : Association pour le Développement de la Culture Scientifique.