Yves Chevallard
UMR ADEF

**La notion de PER : problèmes et avancées**

Toulouse, le 28 avril 2009

## I. Un domaine de recherche en didactique

1. À la suite d'un certain nombre de travaux menés notamment en France et en Espagne, il existe aujourd'hui un domaine de recherche relativement neuf en didactique que je nommerai ici la *didactique de l'enquête codisciplinaire* – je vais expliquer cette terminologie.

2. La notion clé peut être schématisée de la manière suivante. Une question $Q$ étant posée, un système didactique

$$S(X\ ;\ Y\ ;\ Q)$$

se forme autour d'elle : $X$ est un collectif d'étude (une classe, une équipe d'élèves, une équipe de chercheurs, un journaliste, etc.) et $Y$ une équipe (en général réduite : $Y$ peut même être l'ensemble vide) d'aides à l'étude et de directeurs de l'étude (professeur, tuteur, directeur de recherche, directeur de la rédaction, etc.). Le but de la constitution de ce système didactique est *d'étudier Q*, c'est-à-dire de chercher à lui apporter une réponse $R$ qui satisfasse certaines contraintes *a priori*, dont celle de résister à sa mise à l'épreuve par la confrontation avec des « milieux adidactiques » appropriés. Le bilan du travail attendu de $X$ sous la conduite et la supervision de $Y$ peut être noté ainsi :

$$S(X\ ;\ Y\ ;\ Q) \rightarrowtail R.$$

Contrairement à une fiction scolaire commode mais trompeuse, une telle enquête ne mobilise que rarement un outillage praxéologique issu d'une unique discipline : la production de $R$ procède généralement d'une *hétérogenèse*. En d'autres termes, et sauf exception, l'enquête fait « travailler » ensemble des outillages praxéologiques issus de plusieurs disciplines : elle est donc codisciplinaire. S'engager dans une telle enquête revient à s'engager dans un *parcours d'étude et de recherche* (PER) motivé par cette enquête même. Pour élaborer $R$, en effet, il convient de rassembler et d'organiser un milieu de travail $M$ réunissant ensemble des ressources anciennes ou nouvelles dont $X$ fera usage. Parmi ces ressources, certaines seront des réponses « toutes faites » à $Q$, validées par telle ou telle institution, et qu'on note pour cela $R^\lozenge$ (« R poinçon »), parce qu'elles sont censées avoir reçu une « estampille » institutionnelle. L'analyse de ces réponses fournira des matériaux pour la construction de la réponse $R$, elle-même notée maintenant $R^\heartsuit$. D'autres seront des œuvres $O$ de la culture, quelle qu'en soit par ailleurs la « cote » culturelle, qui fourniront des outils d'analyse des réponses $R^\lozenge$ et de construction de la réponse espérée $R^\heartsuit$. Les œuvres $O$ seront pour partie issues de diverses disciplines établies, même si certaines relèvent de « disciplines » non reconnues, parce que naissantes ou culturellement vilipendées. Le bilan plus détaillé du travail d'enquête s'écrira alors selon ce que j'ai nommé le « schéma herbartien », que l'on peut noter dans sa forme condensée par

$$(S(X\,;Y\,;Q) \Rightarrow M) \hookrightarrow R^\heartsuit$$

et, dans sa forme développée par

$$[S(X\,;Y\,;Q) \Rightarrow \{\, R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, \ldots, O_m \,\}] \hookrightarrow R^\heartsuit.$$

3. La notion de PER permet de subsumer un ensemble plus ou moins disparate de pratiques sociales de connaissance : recherche scientifique, enquête policière ou journalistique, etc. L'étude scolaire est pourtant ce qui semble le moins se prêter à une modélisation en termes de PER ; de fait, on peut peindre les formes les plus traditionnelles d'enseignement en disant que, si elle suppose bien une enquête à propos de $Q$, celle-ci est le fait de l'enseignant et s'opère en une autre scène que la classe ; l'élève, lui, se voit proposer une réponse $R^\lozenge$ toute faite, estampillée par le professeur, qui sera la réponse $R^\heartsuit$ de la classe : il devra l'étudier, comme il l'aurait fait des réponses $R^\lozenge$ rapportées dans le milieu $M$ par la classe $X$ si le loisir lui en avait été donné. Le passage du schéma dégénéré correspondant au schéma herbartien évoqué ci-dessus apparaît alors comme une ardente obligation d'une démocratie accomplie, où chaque citoyen ou collectif de citoyens doit pouvoir enquêter sur toute question qu'il lui plaira, en usant notamment d'un équipement praxéologique de base dont la formation scolaire l'aura muni. Cette transition démocratique, qui devient pensable, est pourtant loin encore d'être un fait, ou du moins un projet qu'il ne resterait qu'à accomplir.

4. Je voudrais toutefois évoquer comment le schéma herbartien permet de repenser une organisation didactique scolaire des plus classiques. Un professeur $y$ donne à une classe $X$ un travail à faire, disons un problème de mathématiques. Ce « problème » peut être regardé comme une question $Q$ à laquelle chaque élève $x \in X$ doit apporter une réponse $R_x$, sa « solution » au problème, qu'on peut encore noter $R_x^\lozenge$, parce que cette réponse est « poinçonnée » par l'élève $x$. On peut imaginer que la classe travaille ensuite pour produire, sous la direction de $y$, « sa » réponse $R^\heartsuit$ à partir des réponses $R_x^\lozenge$, $x \in X$. L'évaluation d'une réponse $R_x^\lozenge$ doit porter sur la valeur de $R_x^\lozenge$, vis-à-vis du projet de développement de $R^\heartsuit$ et de la réception dans la classe de cette réponse.

## II. Genèse de la notion de PER

1. La *notion* de PER est née *hors de la classe de mathématiques*, en relation avec la notion « institutionnelle » de TPE, qui s'installe en classe de première à la rentrée 2000. C'est elle qui va donner lieu à une *première généralisation* d'emblée essentielle : celle de PER

*codisciplinaire*, avec éventuellement dominante disciplinaire ou bidisciplinaire, etc., associée au schéma herbartien. C'est dès ce moment-là que sont mises en évidence ces praxéologies didactiques indispensables à la conduite d'un PER que sont les diverses « dialectiques » : du sujet et du hors sujet ; du parachutiste et du truffier ; des boîtes noires et des boîtes claires ; de la conjecture et de la preuve ou des médias et des milieux ; de la lecture et de l'écriture ou de l'excription et de l'inscription ; de la diffusion et de la réception. J'ajoute ici que, très récemment, une septième dialectique a été reconnue : la dialectique *de l'individu et du collectif* ou *de l'autonomie et de la synnomie*.

2. Tout ce que je viens d'évoquer figure dans l'ultime séance – la 24e – du séminaire adressé au PLC2 de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille dès l'année 2000-2001. Par contraste, et sauf erreur de ma part, ce n'est que dans le séminaire adressé aux PLC2 de l'année 2003-2004 qu'apparaît l'expression de *parcours d'étude et de recherche* – dans la 13e séance exactement. Dans ce contexte, le sigle PER fait système avec le sigle AER, présent, quant à lui, dès l'année 2000-2001 (et même bien avant). Je reviens plus loin sur le motif qui a poussé à passer des AER aux PER. Mais avant cela, précisons plusieurs traits qui, par rapport à la notion de PER associée à la notion générale d'enquête codisciplinaire, doivent être soulignés.

• Premier point : le dispositif du PER évoqué à propos de l'enseignement des mathématiques est une importation du dispositif des TPE, dont il s'inspire et dont il constitue une adaptation.

• Deuxième point : dans cette importation, la codisciplinarité est mise entre parenthèses. Les PER en question sont « mathématiques » : ce sont des PER que, aujourd'hui, je nomme plus généralement des PER (ou enquêtes) *monodisciplinaires* ; ou, pour être plus proche de la réalité, *quasi* monodisciplinaires. Dans le cas de la classe de mathématiques, on peut parler d'*enquêtes mathématiques*.

• Troisième point : alors que, dans ce que je nommerai une enquête codisciplinaire *ouverte*, l'outillage rassemblé dans le milieu

$$M = \{ R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, \ldots, O_m \}$$

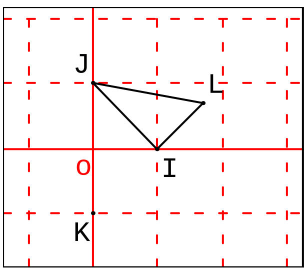
est *a priori* quelconque, ici le milieu $M$, pour être admissible, doit être prélevé pour l'essentiel dans un champ praxéologique désigné à l'avance (par le programme de la classe), dont il doit en outre recouvrir une partie non négligeable (afin de s'intégrer efficacement dans la dynamique d'ensemble de l'étude). Je parlerai alors de PER *finalisé* – la finalité assignée étant celle de la rencontre et de l'emploi d'éléments praxéologiques figurant dans le programme d'étude de la classe.

3. Un quatrième point doit être traité à part : il concerne la question $Q$ étudiée. Deux notions doivent ici être mentionnées. La première est celle de la *générativité* de la question $Q$, c'est-à-dire de sa capacité – lorsqu'on l'étudie sous certaines contraintes et dans des conditions données déterminant un certain parcours d'étude et de recherche – à engendrer des questions « dérivées ». Il paraît évident que, plus la générativité d'une question est élevée (selon un

certain parcours d'étude et de recherche), et plus elle conduira à multiplier les occasions de rencontres praxéologiques. Dans la séance 13 du séminaire de la promotion 2003-2004 des PCL2 de mathématiques, ainsi, le premier exemple de PER cité est engendré par le projet de *construire un calculateur graphique* : la question $Q$ à étudier est donc « Comment construire un calculateur graphique ? », question dont l'étude est de nature à susciter la rencontre avec l'essentiel des praxéologies géométriques à étudier au collège. Par exemple, lorsqu'on se demandera comment construire la racine carrée d'un entier, on obtiendra une réponse à l'aide du théorème de Pythagore : puisque $5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$, on obtient $\sqrt{5}$ en mesurant l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et 2. Comme on a aussi $5 = 9 - 4 = 3^2 - 2^2$, on obtient encore $\sqrt{5}$ comme le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont le premier côté de l'angle droit mesure 2 et dont l'hypoténuse mesure 3. Bien entendu, on peut se demander pour quels entiers ces techniques « marchent » – c'est-à-dire quelle est leur *portée*, autrement dit quels sont les entiers qui s'écrivent comme une somme ou comme une différence de deux carrés. La réponse a la seconde question est facile à établir: ce sont les entiers impairs (car $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$) ainsi que les multiples de 4 (car $4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$). La réponse à la première question n'est pas du niveau de 4^e^ : la classe devra *éventuellement* la rechercher dans des documents plus avancés pour découvrir et comprendre (partiellement) l'assertion selon laquelle un entier est somme de deux carrés si et seulement si « chacun de ses facteurs premiers de la forme $4k + 3$ intervient à une puissance paire » (*Wikipédia*, article « Théorème des deux carrés de Fermat »). Bien entendu, comme dans un travail scientifique ordinaire, la classe pourra s'arrêter devant la difficulté de ce résultat, sur décision de $y$. Mais elle pourra aussi, par ailleurs, se demander comment étendre les techniques trouvées au cas des *décimaux* non entiers par exemple. Une question génératrice d'un PER peut ainsi être reprise pour prolonger l'enquête – ou la *reprendre*. Pour mieux apprécier la générativité de la question évoquée ici, je reproduis une partie du passage des notes de la séance 13 déjà mentionnée.

---

② Revenons à la notion de « calculateur graphique » : on doit se rendre capable d'effectuer des ***calculs graphiques*** tel celui ébauché lors de la séance 12 du Séminaire, en construisant un segment [JL] de mesure $\sqrt{3}$ et dont le mesurage permet alors d'avoir une valeur approchée de $\sqrt{3}$.



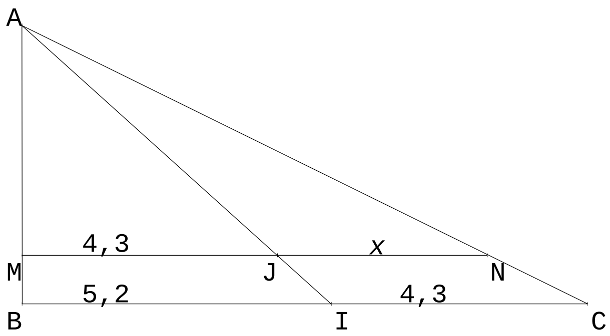

❶ Le calcul graphique est un domaine des mathématiques appliquées aujourd'hui presque entièrement disparu, mais qui, pendant un siècle environ à partir de 1860, permit aux ingénieurs d'effectuer graphiquement des calculs en tous genres (évaluation de fonctions, calcul d'intégrales, résolution de systèmes d'équations, etc.). Ce « calcul » ne sera éliminé que lentement par les progrès des moyens électroniques de calcul dans la deuxième moitié du XX^e siècle. En 1956, dans un *Manuel de calcul pratique numérique et graphique* destiné aux candidats au baccalauréat technique, l'auteur pouvait encore écrire :

Sans méconnaître l'importance actuelle et surtout les promesses d'avenir du *Calcul mécanique*, je n'ai pas cru devoir le faire figurer dans cet ouvrage. Les machines à calculer modernes sont à la fois complexes, coûteuses et encombrantes. Leur emploi est encore réservé à une minorité.

❷ La partie du calcul graphique étudiée dans le PER ne concerne que les moyens de calcul graphique les plus simples, ce qu'on appelait jadis les ***diagrammes géométriques***, dont le manuel déjà cité présente en ces termes le principe d'emploi :

La **Géométrie** permet, à l'aide de constructions simples effectuées avec la règle et le compas, de calculer rapidement et avec une précision suffisante, certaines grandeurs définies par une formule. Ces constructions conduisent, comme résultat final, à la mesure d'une longueur qui représente l'inconnue cherchée.

❸ À titre d'exemple, calculons le nombre $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$. On réalise pour cela l'***épure*** ci-après : d'après le théorème de Thalès, on a en effet d'une part $\frac{x}{4{,}3} = \frac{\text{AJ}}{\text{AI}}$ et d'autre part $\frac{\text{AJ}}{\text{AI}} = \frac{4{,}3}{5{,}2}$, ce qui entraîne : $\frac{x}{4{,}3} = \frac{4{,}3}{5{,}2}$ soit $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$. En mesurant le segment [JN], on obtient ici $x$ = JN ≈ 3,5.

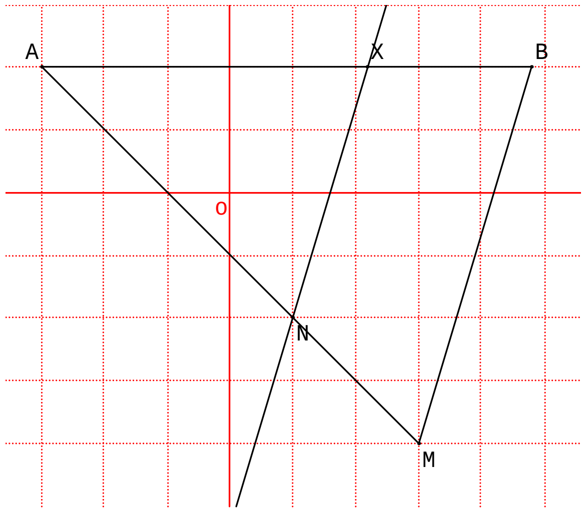



③ Le PER considéré conduira par exemple à traiter le type $T$ de questions dont voici un spécimen $t$ :

*t*. Calculer graphiquement l'expression $\frac{2}{3} \times 7{,}8$.

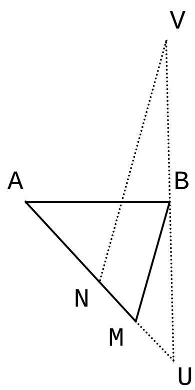
❶ Il faudra pour cela élaborer une technique τ consistant par exemple à faire ceci (pour *t*) :

τ(*t*). Tracer sur un quadrillage un segment horizontal [AB] de mesure 7,8, avec A sur le quadrillage, puis une demi-droite d'origine A sur laquelle on marque des points M et N tels que AN = $\frac{2}{3}$ AM (voir ci-après).




Tracer alors la parallèle à (MB) passe par N : cette droite coupe [AB] en X ; la mesure de AX est égale au nombre cherché.

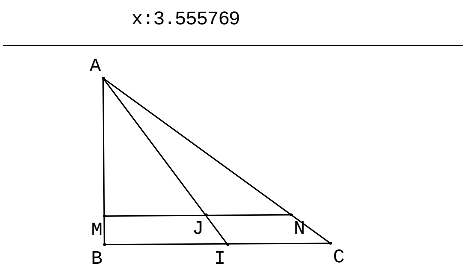
Ici, l'épure permet d'écrire : $\frac{2}{3} \times 7{,}8$ cm ≈ 5,2 cm. Comme $3 \times 5{,}2 = 15{,}6$ et $2 \times 7{,}8 = 15{,}6$, on a en fait : $\frac{2}{3} \times 7{,}8$ cm = 5,2 cm.




❷ Notons que la technique τ est, en l'espèce, incomplètement décrite : comment par exemple « tracer […] la parallèle à (MB) passe par N » ? Employant une technique de construction rencontrée lors de la séance 4 du Séminaire et qui exploite le 1er théorème des milieux, on peut procéder comme l'indique le schéma ci-après, où U et V sont respectivement symétriques de N et U par rapport à M et B : on notera que l'emploi du quadrillage permet ici de n'utiliser le compas qu'une fois (pour marquer le point V), puisque U est un nœud du quadrillage.

④ À partir du calculateur graphique, on pourra fabriquer un calculateur ***électronique*** en utilisant un logiciel de géométrie dynamique tel Géoplan.

❶ Pour cela, on construit l'épure à l'aide du logiciel ; puis on demande au logiciel de fournit la mesure du segment donnant la réponse à la question posée.



❷ Considérons le calcul de $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$. On obtient ceci. [Voir ci-dessus.] La valeur calculée par le logiciel, 3,555769, est cohérente avec la valeur mesurée sur l'épure : 3,55.

⑤ Le PER pris pour exemple ici permet de motiver beaucoup de questions qu'il est pertinent d'étudier dans une classe donnée. Ainsi fait-il apparaître comme « naturel » le fait que l'on se demande (ainsi qu'on l'a fait dans la séance 11) ce que sont les entiers naturels $n$ qui s'écrivent comme une ***somme*** de carrés d'entiers ($n = x^2 + y^2$) : grâce au théorème de Pythagore, la racine carrée de tels nombres peut en effet être obtenue par un calcul graphique très simple. On justifierait de semblable façon le fait de s'interroger sur la nature des entiers $n$ qui s'écrivent comme une ***différence*** de carrés d'entiers ($n = x^2 - y^2$).

❶ Si par exemple on chercher à « construire » le nombre $\sqrt{202}$, on pourra observer que $202 = 121 + 81 = 11^2 + 9^2$. Il suffira alors de mesurer sur une feuille de papier d'écolier la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle ont pour longueur 11 cm et 9 cm (par exemple).

❷ La construction évoquée permet d'établir que l'on a : $\sqrt{202} \approx 14{,}2$. Si l'on avait souhaité calculer $\sqrt{2{,}02}$ on aurait pu écrire (en 3$^e$) que $\sqrt{2{,}02} = \sqrt{\frac{202}{100}} = \frac{\sqrt{202}}{10} \approx 1{,}42$. On a en vérité : $\sqrt{2{,}1} = 1{,}4212670\ldots$

❸ Le PER envisagé – la conception d'un calculateur graphique – ne conduit pas obligatoirement à étudier la question des entiers sommes de deux carrés, et l'étude de cette question ne conduirait pas non plus à tout coup à se pencher sur le fait que cet ensemble d'entiers est clos pour la multiplication (voir la séance 11 du Séminaire). Un programme d'étude et de recherche n'est pas entièrement déterminé à l'avance : il résulte de divers choix, qui sont en dernier ressort de l'autorité du professeur agissant comme directeur d'étude, l'un des critères de choix essentiels étant évidemment celui d'une « bonne couverture du programme » de l'année. Si, par exemple, la motivation du choix de la question « Est-il vrai que le produit de deux entiers sommes de deux carrés est toujours lui-même une somme de deux carrés ? » était surtout le travail sur certaines identités remarquables, et si celles-ci sont largement travaillées par ailleurs (dans le même PER ou dans un autre), le professeur pourra décider de ne pas aller voir dans cette direction – non sans le préciser aux élèves, notamment si la dynamique spontanée de la classe y portait.

---

4. L'introduction de la notion de PER dans la classe de mathématiques conduit naturellement à la question de la *(re)définition par PER d'un curriculum mathématique* – par exemple du curriculum du collège français actuel. Mais précisons maintenant les raisons originelles du passage de la notion d'AER à la notion de PER, telles qu'on les trouve exprimées dans la même séance 13 du séminaire des PLC2 de mathématiques pour l'année 2003-2004.

---

⇨ ***Principes structurants : AER et PER***

• On examine maintenant quelques principes, tous fondamentaux, qui doivent guider la conception, la construction, la réalisation d'un enseignement rénové.

• Le premier principe consiste à ne pas chercher à réaliser des AER « isolées », visant chacune à « engendrer » ***un*** (et un seul) élément mathématique – tel théorème, telle définition, telle notion, etc. Il convient au contraire de s'autoriser à concevoir et à réaliser des AER ***à visée mathématique large***, bien que se donnant pour cible certains thèmes ou sujets du programme de l'année.

① Cela ne signifie pas que l'on s'interdise de proposer des AER de « petite taille » ; mais cela signifie que l'on ne s'imposera pas une « découpe millimétrique » du mathématiquement nouveau qu'une AER donnée est censée faire découvrir.

② Dans cette perspective, le programme de l'année peut être étudié à travers un nombre fini de ***quelques*** « grandes AER » qu'on peut appeler des ***parcours d'étude et de recherche*** (PER), et qui se laisseront scinder en AER au sens plus usuel du terme : un PER apparaît alors comme un véritable « parcours de découverte », à l'instar des IDD de 5$^{e}$ et 4$^{e}$. Dans un langage plus proche de celui des chercheurs professionnels, on pourra entendre aussi bien, par PER, un « ***programme*** d'étude et de recherche ».

• À titre de premier exemple de PER, ici en 4$^{e}$, on s'arrête un instant sur le parcours qu'induit la question *Q* suivante :

*Q*. Comment construire un calculateur graphique ?

---

Le lecteur connaît la suite. Avant d'aller plus loin quant à l'ambition de couvrir un *programme imposé* à l'aide de PER, il convient de s'arrêter sur une notion qui en éclairera la difficulté.

## III. Le problème de l'infrastructure didactique

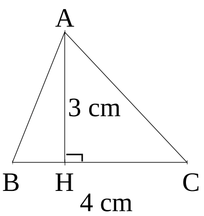
1. La pédagogie des AER et, plus encore, celle des PER, exige des professeurs un remaniement profond de leur rapport au savoir et, ici, aux mathématiques. Pour le dire d'un mot : le savoir (mathématique), ce n'est plus quelque chose que l'on sait d'avance, c'est ce que l'on découvre de concert avec les élèves au cours d'enquêtes (« mathématiques ») – et peu importe que ces découvertes et autres trouvailles aient été connues de *y* ou pas, soient à portée de main ou durablement inaccessibles. Nous verrons mieux la chose sur quelques exemples à venir. Mais cela n'est pas tout.

2. Quand un curriculum se forme autour d'une pédagogie donnée se forme aussi une infrastructure didactique – ici didactico-mathématique, ou mathématico-didactique – qui permet la mise en œuvre de cette pédagogie. Une pédagogie dans laquelle on attend seulement du professeur qu'il *expose* aux élèves la matière à étudier suppose ainsi une infrastructure

dont l’essentiel se réduit à des « leçons », c’est-à-dire des exposés sur les différents thèmes et sujets prévus par le programme : de là le succès ancien de « leçons de… ». Or même la création de ces exposés ne va pas de soi. Elle est facilitée lorsque, pour l’essentiel, elle reprend de façon à peine transposée un « texte du savoir » élaboré dans la sphère (mathématique) savante. On aurait tort pour autant de croire au mythe – à usage interne à la profession – du professeur « petit producteur indépendant » qui fabrique « *son* cours » : pour l’essentiel, les matériaux mathématiques qui composent celui-ci et leur organisation viennent d’ailleurs. C’est cela qui constitue (en partie) ce que j’appelle alors l’infrastructure didactique : contraintes et conditions pédagogiques, *plus* organisations mathématiques exploitant ces conditions et respectant ces contraintes (ainsi bien sûr que les conditions et contraintes propres à la discipline étudiée). Bien entendu, même dans le cas « simple » d’une pédagogie de professeur (d’autrefois), cette infrastructure suppose des fondations que le professeur isolé ou même un groupement de professeurs ne peuvent créer – ce que, bien sûr, on ne leur demande pas. Créer l’infrastructure didactico-mathématique adéquate à une pédagogie des AER (ou : des situations) s’est ainsi révélé hors de portée des « simples » professeurs ; et il est vraisemblable qu’un tel projet suppose la mobilisation sur une assez longue durée d’immenses forces productives en la matière. Mais même l’infrastructure mathématique adéquate à une pédagogie de professeur constitue une œuvre difficile et rare. À titre d’illustration, voici d’abord la réponse apportée à une question soulevée par un PLC2 de mathématiques de la promotion 2005-2006 à l’IUFM d’Aix-Marseille.

---

En $5^e$, concernant le calcul d’aire, quelle est la meilleure rédaction ?




1) Aire du triangle ABC :

$$\frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

L’aire du triangle ABC est de 6 $\text{cm}^2$.

2) Aire du triangle ABC :

$$\frac{3\text{ cm} \times 4\text{ cm}}{2} = \frac{12\text{ cm}^2}{2} = 6\text{ cm}^2.$$

**Matériaux pour une réponse**

1) La première manière de faire – en omettant les symboles des unités – est incontestablement la manière encore dominante aujourd’hui. Elle se justifie, mais elle ne doit sous aucun prétexte conduire à des écritures du type $\frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{ cm}^2$ dans lesquelles on égale des « grandeurs scalaires », ici $\frac{3 \times 4}{2}$ et $\frac{12}{2}$, à une « grandeur vectorielle », ici 6 $\text{cm}^2$. Les aires, c’est-à-dire les grandeurs de l’espèce « aire », forment en effet une droite vectorielle – une demi-droite si l’on ne considère que les aires positives –, dont les éléments sont ici décomposés dans la base { $\text{cm}^2$ }. On a par changement de base dans cet espace vectoriel de dimension 1 : 6 $\text{cm}^2$ = 6 ($10^{-2}$ $\text{dm}^2$) = 0,06 $\text{dm}^2$.

2) Il existe une « algèbre des grandeurs » qui conduit notamment à écrire ceci (par exemple) : 6 $cm^2$ = 6 $(10^{-1}\ dm)^2$ = 6 $(10^{-2}\ dm^2)$ = … Cela correspond à la deuxième manière de faire relevée dans la question examinée. Bien qu'elle soit encore largement étrangère à la profession, sans doute, c'est cette manière de faire qui est poussée en avant par les nouveaux programmes du collège.

• Le texte intitulé *Mathématiques. Introduction générale pour le collège* précise ainsi les objectifs de l'étude des différents domaines que les programmes distinguent. À propos du domaine intitulé « Grandeurs et mesure », ces objectifs sont les suivants.

■ **grandeurs et mesure**
– se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) ;
– connaître et utiliser les périmètres, aires et volumes des figures planes et des solides étudiés ;
– calculer avec les unités relatives aux grandeurs étudiées et avec les unités de quelques grandeurs quotients et grandeurs produits.
Ces programmes sont construits de manière à permettre une acquisition et un approfondissement progressifs des notions sur toute la durée du collège. Leur mise en œuvre est enrichie par l'emploi des instruments actuels de calcul, de dessin et de traitement (calculatrices, ordinateurs).

• Le calcul avec les unités doit être mis en œuvre dès la sixième, comme le montre ce commentaire du domaine d'études *Nombres et calculs* relatif au secteur d'études « Nombres entiers et décimaux ».

Les activités proposées doivent permettre une reprise de l'étude des nombres décimaux, sans refaire tout le travail réalisé à l'école élémentaire, l'objectif principal étant d'assurer une bonne compréhension de la valeur des chiffres en fonction du rang qu'ils occupent dans l'écriture à virgule.
Pour cela, diverses mises en relation sont utilisées. Par exemple, 23,042 est mis en relation avec […] l'expression de mesures, une unité étant choisie : 23,042 m, c'est 23 mètres plus 4 centièmes de mètre (4 cm) et 2 millièmes de mètre (2 mm) ou 23 mètres plus 42 millièmes de mètre (42 mm), ce qui permet d'écrire : 23,042 m = 23 m + 4 cm + 2 mm = 23 m + 42 mm.

• Le programme de 4^e^ actuel (de même que celui qui entrera en vigueur en septembre 2007) comporte ce commentaire :

Les situations où interviennent des vitesses moyennes constituent des exemples riches où le traitement mathématique s'avère particulièrement pertinent, comme l'étude de la vitesse moyenne d'un trajet sur un parcours de 60 km, où l'aller se parcourt à 20 $km{\cdot}h^{-1}$ et le retour à 30 $km{\cdot}h^{-1}$.

Pour déterminer la vitesse moyenne, on utilise simplement la formule $v = \frac{d}{t}$. Ici, on a $d$ = 60 km + 60 km = 120 km. Pour la durée $t$, en usant cette fois de la formule $t = \frac{d}{v}$, on a alors : $t = t_A + t_R = \frac{60\ \text{km}}{20\ \text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}} + \frac{60\ \text{km}}{30\ \text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}}$ = 3 h + 2 h = 5 h, en sorte que $v = \frac{120\ \text{km}}{5\ \text{h}}$ = 24 km/h = 24 $km{\cdot}h^{-1}$. On aurait pu écrire d'un seul coup :

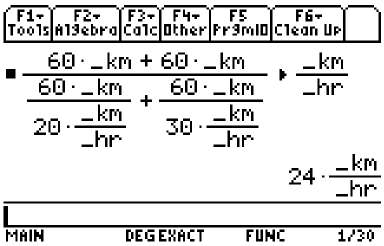
$$v = \frac{60\text{ km} + 60\text{ km}}{\dfrac{60\text{ km}}{20\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} + \dfrac{60\text{ km}}{30\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}}}.$$

En ce cas, la conduite du calcul pourrait alors être celle-ci :

$$v = \frac{60\text{ km} + 60\text{ km}}{\dfrac{60\text{ km}}{20\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} + \dfrac{60\text{ km}}{30\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}}} = \frac{1 + 1}{\dfrac{1}{20\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} + \dfrac{1}{30\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}}}$$

$$= \frac{2}{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{30}}\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = \frac{12}{0{,}3 + 0{,}2}\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = \frac{12}{0{,}5}\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 24\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

• On notera que certaines calculatrices permettent le calcul avec les unités, comme on le voit ci-dessous.




---

Pour fonder tout cela, il a fallu un travail dont la séance 16 du séminaire de l’année 2001-2002 se fait l’écho dans les termes suivants – toujours à propos d’une question soulevée par un professeur stagiaire.

---

**Qu’est-ce qu’une grandeur ?**
À propos de proportionnalité, j’ai un peu laissé tomber l’idée d’expliquer ce qu’est une grandeur. J’ai défini « deux grandeurs proportionnelles », mais j’ai passé sous silence la définition de « grandeur ». Heureusement (ou malheureusement), je n’ai pas eu de remarque là-dessus. Où puis-je m’instruire sur ce sujet ?

① Sous le titre ***Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations***, on trouvera une théorie « complète » des grandeurs dans le numéro à paraître de la revue ***Petit x***. Pour une information plus complète, on se reportera aussi à la première partie de ce travail, publiée sous le titre ***Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée*** dans le numéro 55 de cette même revue. On se bornera ici à une rapide esquisse.

② En termes « savants », la théorie mathématique des grandeurs conduit à regarder une espèce de grandeurs $\mathcal{G}$ (aire, volume, masse, etc.) comme une ***demi-droite vectorielle réelle*** (lorsque le système des nombres positifs disponibles n’est encore que $\mathbb{D}_+$ on doit bien sûr parler de demi-module ; lorsque ce système n’est encore que $\mathbb{Q}_+$, de demi-droite vectorielle rationnelle).

③ En pratique, une fois choisie une grandeur $u \in \mathcal{G}$ non nulle, toute grandeur $g \in \mathcal{G}$ s'écrira sous la forme $g = x\,u$. Dans le langage de l'algèbre linéaire, $\{ u \}$ est une ***base*** de $\mathcal{G}$, et $x$ est la ***coordonnée*** du ***vecteur*** $g \in \mathcal{G}$ dans cette base. Dans le langage des grandeurs, $u$ est la ***grandeur unité***, et $x$ est la ***mesure*** de la ***grandeur*** $g$ par rapport à cette unité.

④ Si $v$ est une seconde grandeur non nulle, et si $v = r\,u$, soit encore si $u = \frac{1}{r}v$, alors on a : $g = x\,u = x\left(\frac{1}{r}v\right) = \left(x\frac{1}{r}\right)v = \frac{x}{r}v$.

❶ Si $\mathcal{G}$ est l'espèce $\mathcal{L}$ des ***longueurs***, et si $u$ = m et $v$ = cm, on a m = 1 m = 100 cm et donc par exemple 10 m = 10 (100 cm) = (10 × 100) cm = 1000 cm.

❷ Si $\mathcal{G}$ est l'espèce $\mathcal{D}$ des ***durées***, et si $u$ = h et $v$ = min, on a h = 1 h = 60 min et donc par exemple $\frac{1}{2}$ h = $\frac{1}{2}$ (60 min) = $\frac{60}{2}$ min = 30 min. De même on aura $\frac{1}{4}$ h = $\frac{1}{4}$ (60 min) = $\frac{60}{4}$ min = 15 min, ou $\frac{1}{5}$ h = $\frac{1}{5}$ (60 min) = $\frac{60}{5}$ min = 12 min, et aussi $\frac{11}{15}$ h = $\frac{11}{15}$ (60 min) = $\left(\frac{11}{15} \times 60\right)$ min = 44 min.

⑤ Ce qui précède se généralise aux grandeurs ***composées*** : à la notion de demi-droite vectorielle réelle il faut alors substituer une structure mathématique appelée ***algèbre de grandeurs***. L'essentiel est de retenir que l'on peut ainsi justifier complètement le calcul ***avec les unités***, qu'elles soient « simples » (comme ci-dessus) ou « composées ».

❶ Considérons le problème suivant :

Calculer la capacité, en litres, d'un réservoir parallélépipédique de 0,6 m de longueur, 10 cm de largeur, et 50 mm de profondeur. (On prendra : 1 litre = 1 $dm^3$.)

On a : V = L × $\ell$ × p = 0,6 m × 10 cm × 50 mm = 0,6 (10 dm) × 10 ($10^{-1}$ dm) × 50 ($10^{-2}$ dm) = 6 dm × 1 dm × 0,5 dm = 3 $dm^3$ = 3 litres. De même, soit le problème suivant :

Déterminer la masse linéique en g/cm d'un barreau d'acier de section constante et de 4 dm de longueur pesant 2,85 kg.

On a ici : $\mu = \frac{\text{m}}{\ell} = \frac{2{,}85\text{ kg}}{4\text{ dm}} = \frac{2{,}85\ (1000\text{ g})}{4\ (10\text{ cm})} = \frac{285}{4}$ g/cm = 71,25 g/cm.

❷ Le ***type de tâches*** *T* dont relève ces deux tâches particulières peut être décrit ainsi :

Une grandeur $g$ s'exprimant en fonction d'autres grandeurs $g_1$, $g_2$, $g_3$… au moyen d'une ***formule*** supposée connue, $g = \Phi(g_1, g_2, g_3\ldots)$, calculer $g$, exprimée dans une unité imposée, pour des valeurs données de $g_1$, $g_2$, $g_3$…, ces grandeurs étant exprimées dans des unités déterminées.

Le problème suivant constitue un autre spécimen de ce type de tâches :

Déterminer la vitesse en mètres par seconde d'une balle de tennis lancée à 95 miles par heure. (On a : 1 mile = 1 mi = 1,609 km.)

La mise en œuvre de la technique $\tau$ conduit ici à écrire simplement : $v = 95 \text{ mi/h} = \frac{95 \text{ mi}}{1 \text{ h}} = \frac{95\ (1609 \text{ m})}{3600 \text{ s}} \approx 42{,}5 \text{ m/s}$.

❸ Contrairement à un usage malheureux mais aujourd'hui dominant, on n'écrira pas, comme le fait tel manuel de 5e :

aire de base $A_2 = (6 \times 6) : 2 = 18 \text{ cm}^2$
aire de base $A_3 = 72–18 = 54 \text{ cm}^2$
$V_2 = 18 \times 12 = 216 \text{ cm}^3$
$V_3 = 864–216 = 648 \text{ cm}^3$

Cette confusion des scalaires et des vecteurs doit céder la place à une écriture correcte, dont les auteurs du manuel cité donnent d'ailleurs les règles – règles qu'eux-mêmes n'ont sans doute pas eu le courage de suivre tant sont pesantes les manières d'écrire aujourd'hui répandues :

Il est tout à fait autorisé d'écrire :
1,825 km = 1 825 m
$2 \text{ m} \times 3{,}5 \text{ m} = 7 \text{ m}^2$

---

(Notons que la séance 17 du séminaire de l'année 2001-2002 comporte une annexe *exposant* la théorie de l'algèbre des grandeurs évoquée plus haut.)

3. L'un des dangers qui guettent la construction d'une didactique de l'enquête et des PER en classe de mathématiques tient précisément au fait que, faute d'une infrastructure adéquate, l'effort pour « faire des mathématiques » en termes de PER risque d'être subrepticement dévoyé par l'infrastructure existante, la seule connue, la seule vraiment disponible, vers une pédagogie située quelque part entre la pédagogie de l'exposition du savoir et celle de la rencontre arrangée. Ce danger est d'autant plus fort que, dans la période actuelle, après une phase de monumentalisation des savoirs mathématiques, nous en sommes arrivés à une phase où l'infrastructure encore disponible *ne montre plus guère qu'un paysage ruiniforme*. J'illustrerai cela à l'aide d'un exemple réellement observé qui a conduit l'observateur à effectuer une petite enquête mathématique. (Se livrer à des enquêtes – mathématiques et, surtout, codisciplinaires, nous le verrons – est aujourd'hui un travail essentiel du chercheur en didactique de l'enquête.)

• Dans une classe de seconde, le manuel utilisé est celui de la collection Hyperbole. À la page 35 de ce manuel, on trouve un énoncé en deux parties dont voici la deuxième.

> **2. Cas général**
> **a)** Démontrer que tout nombre de la forme $\frac{a}{2^p \times 5^q}$ (avec $a \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$) est un décimal (c'est-à-dire qu'il admet une écriture fractionnaire dont le dénominateur est une puissance 10).
> **b)** On note $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible qui est un décimal (avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$).
> Démontrer que $b$ est de la forme $2^p \times 5^q$ (avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$).
> **c)** Énoncer le théorème ainsi démontré aux questions **a)** et **b)**.

• La première partie, comme on l'imagine, fait étudier des cas particuliers de nombres de la « forme » $\frac{a}{2^p \times 5^q}$ (où $a \in \mathbb{N}$). Le professeur de la classe choisit donc cet énoncé comme celui d'un DM – à faire, par conséquent, hors de sa présence. On voit aussitôt que passer de nombres « déterminés » à la forme générale indiquée constitue un saut sans douceur pour des élèves qui sortent de 3^e^ et n'ont sans doute été que très peu frottés à l'idée de « nombres d'une forme donnée » : il y a là à première vue le risque d'une brutalité didactique caractérisée.

• Cela dit, le connaisseur aura observé que la première question ne suppose que des outils mathématiques rudimentaires, à un détail près toutefois. Montrer que, par exemple, le nombre $\frac{47}{2^3 \times 5^2}$ est décimal peut se faire en mettant les facteurs 2 et 5 (du dénominateur) « au même exposant », à savoir l'exposant le plus grand, qui est ici celui de 2 ; on aura ainsi :

$$\frac{47}{2^3 \times 5^2} = \frac{47 \times 5}{2^3 \times 5^3} = \frac{235}{10^3} = 0{,}235.$$

On voit que la mise en œuvre de cette technique sur l'expression littérale $\frac{a}{2^p \times 5^q}$ bute sur une difficulté : on ignore lequel des exposants $p$ et $q$ est le plus grand. Il faut donc soit procéder à une *distinction de cas*, ce qui relève d'un schéma de pensée mathématique pratiquement inconnu à ce niveau des études mathématiques au secondaire, soit inventer une nouvelle technique, indifférente à ce détail mathématique, telle celle mise en œuvre ci-après sans commentaires :

$$\frac{a}{2^p \times 5^q} = \frac{a \times (2^q \times 5^p)}{(2^p \times 5^q) \times (2^q \times 5^p)} = \frac{a \times 2^q \times 5^p}{(2^p \times 2^q) \times (5^p \times 5^q)} = \frac{a \times 2^q \times 5^p}{2^{p+q} \times 5^{p+q}} = \frac{a \times 2^q \times 5^p}{(2 \times 5)^{p+q}}$$

$$= \frac{a \times 2^q \times 5^p}{10^{p+q}}.$$

On aura ici par exemple :

$$\frac{27}{2^3 \times 5^2} = \frac{27 \times 2^2 \times 5^3}{2^3 \times 5^2 \times 2^2 \times 5^3} = \frac{27 \times 500}{2^5 \times 5^5} = \frac{27 \times 500}{10^5} = \frac{27 \times 5}{10^3} = \frac{135}{10^3} = 0{,}135.$$

• Tout cela fournirait sans doute une matière mathématique à travailler dans une séance de *travaux dirigés*, ou, plus exactement, *dans le cadre d'un PER*, comme y invite le fait que le programme de la classe de seconde mentionne la question étudiée sous la rubrique des *thèmes d'étude* relatifs au domaine « Calcul et fonctions », où elle est *proposée* au choix du professeur dans les termes suivants : « Caractérisation des éléments de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$, soit en terme de développement décimal fini ou périodique, soit comme quotient irréductible d'entiers (le dénominateur étant ou non de la forme $2^p \times 5^q$). » La proposer tout de go en travail *hors classe*, c'est non seulement perdre une occasion d'effectuer avec les élèves un travail mathématique significatif, mais c'est aussi livrer ces derniers à un *abandon didactique* contre-productif pour une majorité d'entre eux. Tout se passe comme si le souci du bon réglage des situations didactiques laissait place à une anomie didactique dont nous pouvons craindre qu'elle ne soit désormais quasi permanente.

• C'est pourtant la deuxième question de la deuxième partie de l'énoncé qui est la plus étonnante. Alors que la première question demandait de prouver qu'un nombre de la forme $\frac{a}{2^p \times 5^q}$ (où $a \in \mathbb{N}$) est un décimal, cette deuxième question demande de prouver *la réciproque* : si la fraction $\frac{a}{b}$ (où $a, b \in \mathbb{N}^*$) est *irréductible* et si sa valeur est *décimale*, alors $b$ est de la forme $2^p \times 5^q$ (où $p, q \in \mathbb{N}$). Démontrer cela, c'est prouver que, s'il existe $N, n \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{N}{10^n}$, alors $b$ est de la forme $2^p \times 5^q$.

• Voici une première voie d'attaque. L'égalité précédente équivaut à l'égalité

$$b \times N = a \times 10^n.$$

Tout diviseur premier de $b$ divise le premier membre de cette égalité, $b \times N$, et donc divise aussi le second, $a \times 10^n$. Mais puisque la fraction $\frac{a}{b}$ est supposée irréductible, ce diviseur premier de $b$ ne divise pas $a$. Un théorème appelé parfois, en France, *lemme de Gauss* [1] et en anglais *Gauss's lemma* [2] permet alors de conclure qu'il divise $10^n$. Comme $10^n$ n'admet pour diviseur premier que 2 et 5, on en conclut que les seuls nombres premiers qui peuvent diviser $b$ sont 2 et 5, CQFD.

• Bien entendu, la démonstration précédente est *hors de portée de l'outillage mathématique* disponible en début (ou en fin) de seconde : sous le nom de *théorème de Gauss*, le lemme de

---

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_d%27Euclide.

[2] http://mathworld.wolfram.com/GausssLemma.html.

Gauss est aujourd'hui au programme de la Terminale S, et d'aucune autre classe du secondaire. Pour approfondir cette analyse, on doit se souvenir qu'un certain nombre de questions de mathématiques longtemps oubliées au secondaire ont fait résurgence dans le programme entré en vigueur à la rentrée 2000 dans les classes de seconde. La question des cas d'égalité (rebaptisés cas d'isométrie) et des cas de similitude est ainsi réapparue dans le cadre strict du programme ; par contraste, la question de la caractérisation des décimaux parmi les rationnels n'est réapparue, elle, que sous la rubrique des « thèmes d'étude », appentis didactique jugé « secondaire » par la doxa professorale et dont le contenu a, pour cela, rapidement été transmué en questions à ranger dans un autre débarras didactique, le DM.

• Cela rappelé, il faut aussi se souvenir du temps *d'avant* – d'avant la réforme des mathématiques modernes – lorsque la question étudiée (de même, au reste, que celle des cas d'égalité et de similitude) était vivante dans l'enseignement des mathématiques à un niveau correspondant à celui du lycée d'aujourd'hui. Dans une *Arithmétique du brevet élémentaire* publiée en 1928 chez Hatier, signée d'Abel Marijon et A. Pequignot, on trouve, à la page 398, dans une partie de « compléments » destinés à la préparation du *brevet supérieur*, le théorème suivant : « Pour qu'une fraction soit convertible en décimale, il faut et il suffit que la fraction irréductible qui lui est égale ait pour dénominateur un nombre n'admettant d'autres facteurs premiers que 2 et 5. » La démonstration de ce qui est pour nous la réciproque s'appuie sur un théorème antérieurement démontré, que l'on trouve à la page 395 : « Lorsqu'une fraction, $\frac{a}{b}$, a ses termes premiers entre eux, toute fraction qui lui est égale a pour termes des équimultiples de $a$ et $b$. » Cela étant supposé acquis, la démonstration de notre réciproque peut prendre l'allure suivante.

> Soit $\frac{a}{b}$ la fraction irréductible qui lui est égale. Si cette fraction est convertible en décimale, c'est qu'il existe des nombres $N$ et $n$ tels que
>
> $$\frac{a}{b} = \frac{N}{10^n}.$$
>
> Puisque $\frac{a}{b}$ est irréductible, $10^n$ est multiple de $b$. Et comme $10^n = (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$ ne contient que les facteurs premiers 2 et 5, $10^n$ ne peut être multiple de $b$ que si $b$ ne renferme d'autres facteurs premiers que 2 et 5. (p. 397)

• Comment le manuel examiné démontre-t-il le théorème clé utilisé dans la démonstration précédente ? Une première étape, qui n'utilise que des outils très simples, établit que, si $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, alors on a $pb = aq$. Elle se poursuit alors ainsi.

> $a$ divisant $aq$ divise $pb$ qui lui est égal. Et comme il est premier avec $b$, par hypothèse, il divise $p$. Soit $p = am$. On voit que $amb = aq$, et, en divisant par $a$ : $bm = q$. Les nombres $p$ et $q$ sont donc les produits de $a$ et $b$ par un même nombre $m$. En d'autres termes, ce sont des *équimultiples* de $a$ et $b$. C'est ce que nous voulions démontrer. (p. 396)

• On aura aperçu, dans cette argumentation, l'intervention presque implicite du « lemme de Gauss » : puisque $a$ divise $pb$ et est premier avec $b$, alors $a$ divise $p$. On doit donc s'attendre à trouver, en amont de cette démonstration, le théorème utile ; il figure en effet à la page 380 sous le nom de *théorème fondamental*, sous cet énoncé : « Si un nombre $c$ divise un produit $ab$ et s'il est premier avec l'un des facteurs, $a$, il divise l'autre. » Ce n'est là rien d'autre que le « théorème de Gauss » du programme de la Terminale S.

• Toute cette construction est typique de la culture mathématique classique : le nom de Gauss n'y est pas invoqué en vain ! Notons à cet égard un point rarement souligné dans la littérature scolaire. Si, traditionnellement, le théorème sur les fractions égales à une fraction irréductible donnée est déduit du lemme de Gauss, en fait les deux énoncés sont *équivalents*. Si l'on suppose connu le théorème sur les fractions, alors, si « $c$ divise un produit $ab$ », il existe un entier $k$ tel que $ab = kc$, soit tel que $\frac{a}{c} = \frac{k}{b}$. Si, en outre, $c$ est premier avec $a$, alors $k$ et $b$ sont des équimultiples de $a$ et $c$. En particulier, $b$ est un multiple de $c$, CQFD. On rencontre ici un cas de plus où deux énoncés mathématiquement équivalents ont joué, dans l'organisation mathématique classique du domaine considéré (celui de la théorie des nombres élémentaires), des rôles différenciés – l'un figurant comme énoncé *théorique* (Gauss), l'autre comme énoncé *technologique* (participant de la technologie des fractions) fréquemment folklorisé, semble-t-il.

• Quel drame se joue-t-il aujourd'hui en seconde ? On y voit par pans entiers s'affaisser, s'effondrer l'infrastructure mathématique qui portait les manuels d'autrefois. Un seul exemple, relatif à la question examinée jusqu'ici, en donnera une idée significative. Le manuel de 2$^{\text{de}}$ publié en 2000 dans la collection « Indice » par l'éditeur Bordas n'est pas dû aux premiers venus : les auteurs en sont André Deledicq, René Gauthier, Patricia Hennequin, Ginette Mison et Didier Missenard. Il comporte un *Fascicule des thèmes* séparé du manuel proprement dit et réunissant « les 26 thèmes d'étude au programme, traités sous forme de fiches élèves ». La fiche consacrée au « thème 12 » est intitulée « Développement décimal périodique ». Elle s'ouvre par un assez long préambule, dont je reproduis la partie qui concerne notre affaire.

> Il y a des rationnels qui sont décimaux.
> Par exemple : $\frac{7}{25}$ s'écrit aussi $\frac{28}{100}$, avec une puissance de dix au dénominateur. Il a alors une écriture décimale à virgule : 0,28.
> Il est facile de comprendre que tout rationnel s'écrivant comme une fraction n'ayant que des 2 et des 5, dans la décomposition en facteurs premiers de son dénominateur, est décimal. Car on peut alors multiplier numérateur et dénominateur pour atteindre une puissance de dix au dénominateur.
> Inversement, dans une puissance de dix, il n'y a pas d'autres facteurs que 2 et 5 ; une fraction irréductible contenant au dénominateur des facteurs autres que 2 ou 5 ne peut donc pas représenter un décimal.
> On ne peut donc pas écrire une écriture décimale pour un rationnel non décimal…

Il n’y a plus, ici, d’argumentation mathématiquement construite. Dans un tel environnement culturel, tout ou à peu près peut être *prétendu*. Les élèves sont ainsi jetés dans un entre-deux inframathématique où plus rien n’est sûr. Incurie didactique et incurie mathématique vont de pair.

4. Une pédagogie des PER suppose une infrastructure mathématico-didactique renouvelée en profondeur : on ne construit rien sur des ruines. Tel est le problème majeur aujourd’hui.

**IV. Mathématiques & enquêtes codisciplinaires**

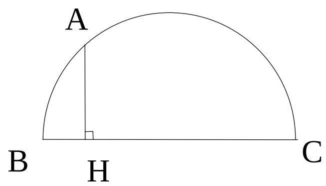
1. La problématique « classique » de l’enquête en classe de mathématiques est semblable à celle des AER : on se donne un ensemble de contenus praxéologiques (mathématique) $p$ et l’on propose une question $Q$ telle que l’élaboration d’une réponse $R^{\heartsuit}$ à $Q$ amènera, si le parcours adopté pour ce faire appartient à un certain ensemble de parcours, à rencontrer $p$, ce qu’on peut écrire ainsi :

$$p \subset \{ R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots, O_m \} \cup \{ R^{\heartsuit} \}$$

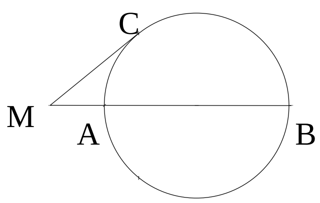
Dans la question sur le calculateur graphique, ainsi, on rencontrera le théorème de Thalès et le théorème de Pythagore, notamment à titre d’œuvres $O$ outillant la construction de $R^{\heartsuit}$. Si l’enquête conduit à examiner certaines réponses $R^{\Diamond}$, elle pourra conduire aussi à mettre au jour des propriétés mathématiques étrangères au programme dans lequel on souhaite se situer, comme l’illustre le passage suivant de la séance 12 du séminaire 2004-2005 destiné aux PLC2 « marseillais ».

---

① Supposons d’abord qu’on veuille calculer graphiquement le nombre $\sqrt{n}$, où $n$ est un entier naturel. On peut le faire en construisant une épure conforme au schéma ci-après, où BH = 1 et HC = $n$.




La connaissance géométrique clé est ici le fait qu’on a l’égalité $AH^2 = BH \times HC$, soit le fait que « dans un triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu’elle détermine sur l’hypoténuse ». Cette propriété implique qu’on a ici $AH^2 = BH \times HC = 1 \times n = n$ et donc $AH = \sqrt{n}$.




② On peut encore utiliser la technique suivante : on construit des points alignés M, A, B tels MA = 1, MB = $n$, puis on trace une des deux tangentes issue de M au cercle de diamètre [BC], soit (MC), où C est le point de contact ; enfin on mesure MC, ce qui donne le nombre cherché. La connaissance géométrique cruciale s’exprime ici à l’aide de la notion de ***puissance d’un point par rapport à un cercle*** : la puissance de M pour le cercle de diamètre [AB] est égale d'une part au produit MA $\times$ MB, d'autre part au carré $MC^2$ ; si l'on a donc MB = $n$ et MA = 1, il vient $MC^2 = n$ et donc MC = $\sqrt{n}$.

---

2. En tant qu'il dirige l'enquête, le professeur $y$ peut toujours décider d'écarter tel ou tel développement possible qui, en une certaine étape du parcours d'étude et de recherche, apparaît pertinent : dans l'exemple du calculateur graphique, il pourra ainsi écarter explicitement le recours à la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle au motif (légitime) que « cela nous entraînerait trop loin ». Tel est l'un des intérêts *économiques* des PER : ils ne sont pas écrits à l'avance et s'écrivent en se déployant. Mais c'est là aussi un de leurs points de faiblesse *écologique*. Dans la logique d'étude qui vise $p$ à travers l'étude de $Q$, ce qui tend à être valorisé est $p$, tandis que la question *$Q$ et tout ce qui découle de son étude au-delà de $p$*, à savoir

$$\{ R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, \ldots, O_m, R^\heartsuit \} \setminus p$$

auront peut-être, en fait sinon en droit, le statut d'éléments provisoires, constitutifs d'un échafaudage ayant permis (ou devant permettre) d'arriver à $p$. On imagine que, en ce cas, il devient un jour tentant *d'aller directement à $p$* sans passer par l'étude de $Q$. Ainsi revient-on bientôt à la présentation frontale du « savoir à enseigner », $p$, détaché de toute espèce de motivation !

3. Pour cette raison, l'enquête finalisée participe d'une infrastructure didactique *essentiellement fragile*, même s'il est indispensable de continuer à accumuler les connaissances à son propos. D'une façon générale, la viabilité d'une pédagogie des PER se heurte à deux difficultés solidaires. Tout d'abord, on voudrait contrôler *a priori* les parcours d'étude et de recherche, comme il en va dans la pédagogie magistrale d'exposition du savoir ; ensuite, on est tenté d'aller trop vite au but désigné à l'avance, $p$, en négligeant l'intérêt de voir émerger comme nécessaires, ou du moins comme clairement utiles, l'ensemble des éléments praxéologiques composant le « butin » de l'étude, soit l'ensemble

$$\{ R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, \ldots, O_m, R^\heartsuit \}.$$

Pour cela sans doute, il est bon de proposer à l'étude une question $Q$ motivée par un projet $\Pi$ (imaginaire ou réel) et dont l'étude suppose une élaboration *de longue durée* (qui sera le lieu de nombreux apprentissages pertinents). J'évoquerai à cet égard un seul exemple, celui d'un travail de Noemí Ruiz, Marianna Bosch et Josep Gascón présenté dans le cadre du "Working group 13" de CERME 5 (2007) sous le titre *The functional algebraic modelling at Secondary level* (http://ermeweb.free.fr/CERME%205/WG13/13_Ruiz.pdf). Le titre même désigne le système praxéologique $p$ dont il s'agirait d'équiper un certain public d'élèves : les praxéologies de la « modélisation algébrique fonctionnelle ». Il s'agit là, il est vrai, d'un équipement praxéologique qui n'est pas exactement classique dans l'enseignement secondaire (français aussi bien qu'espagnol), ce qui justifie s'il en était besoin que la recherche en didactique en étudie les problèmes de diffusion. Cela noté, j'extrairai de ce travail quelques éléments seulement, renvoyant chacun à une lecture plus complète.

• On part, dans le PER décrit par les auteurs, d'un projet $\Pi$ attribué à une association de jeunes : produire et vendre des T-shirts afin de gagner quelque argent. La question $Q$ apparaît dans le cadre d'une *commande* de cette association adressée à « l'atelier de modélisation mathématique » dans lequel se déroule le PER, atelier qui devra rendre à son client imaginaire un *rapport* sur la question $Q$ suivante : quelles stratégies de production et de vente des T-shirts peuvent conduire l'association à réaliser un bénéfice de 3000 € (au moins) ? Le parcours en lequel se concrétise l'enquête confiée à l'atelier de modélisation passe par une succession de questions engendrées par la commande. Ainsi, après avoir constaté, au vu de données relatives à plusieurs mois de vente, qu'il n'est pas raisonnable d'espérer atteindre le bénéfice escompté en augmentant simplement le nombre $x$ de T-shirts vendus, la première de ces questions est la suivante : est-il possible d'atteindre le bénéfice désiré en changeant *l'une seulement* des « conditions de la situation », à savoir le prix unitaire (noté $p$), le coût unitaire (noté $c$) et le coût fixe (noté $L$) ?

• Tout cela conduit progressivement – au long d'une dizaine de séances d'atelier de 50 minutes chacune – vers l'étude de la fonction dépendant de trois paramètres

$$B(x) = px - cx - L.$$

Avoir $B(x) \geq 3000$ équivaut à avoir

$$(p - c)x \geq 3000 + L$$

ou : $x \geq \dfrac{3000 + L}{p - c}$. Si l'on imagine que $x$ ne saurait, dans le meilleur des cas, dépasser 450, on doit fixer $L$, $c$ et $p$ de façon que

$$\frac{3000 + L}{p - c} < 450$$

ce qui suppose notamment $p - c$ assez « gros ». L'étude effective subséquente mobilise la calculatrice symbolique *Wiris* (qu'on trouvera à l'adresse www.wiris.com).

4. La qualité du travail dont mon bref compte rendu ne donne qu'une image très appauvrie ne peut faire qu'une contrainte redoutable n'exerce à terme ses effets : celle qui impose la distinction de « vrais » enjeux didactiques institutionnalisés dans la discipline dont on se réclame (par exemple, ici, les techniques de « travail » *mathématique* du modèle algébrique, qui est une inégalité comportant trois paramètres) et d'enjeux didactiques *occasionnels*, opportunistes (ici, d'analyse économique simple). Comment parer à cette dérive qui nous ramènerait une fois de plus d'une rencontre « arrangée » à une rencontre *frontale*, immotivée parce que démotivée ? Dans la hiérarchie des niveaux de codétermination didactique (ci-après), la réponse se situe peut-être au niveau de l'école : on peut imaginer en effet d'entrer

plus franchement dans un paradigme scolaire du *questionnement* (du monde), contre le paradigme scolaire de l'*inventaire* (des savoirs). Cela pourrait conduire ici, par exemple, à distinguer, dans les programmes scolaires, un *secteur d'études* intitulée « Modèles économiques *[Business Models]* possibles et impossibles ») ou encore désignée par la question « Comment gagnent-ils de l'argent (ou pas) ? » dont l'étude ferait l'objet d'une *dévolution différenciée et coordonnée* entre plusieurs champs disciplinaires (dont les mathématiques). Dans un tel cadre, les praxéologies « économiques » utiles ou indispensables, si frustes soient-elles, devraient compter, dans le tableau des résultats didactiques du PER, tout autant que les praxéologies mathématiques émergentes. C'est ici l'occasion de noter un autre aspect des questions soumises à l'étude : ce que je nommerai, faute de mieux, la *généralité* de la question $Q$. Toute question $Q$ admet en effet des *cas particuliers* ou *particularisations* (en anglais : *instances* ou *instantiations*). D'un cas particulier à l'autre, ce qui peut changer c'est, non seulement la réponse $R$, mais aussi le parcours d'étude et de recherche emprunté (et, en particulier, le milieu didactique $M$ mobilisé) pour arriver jusqu'à $R$. La question « Comment gagnent-ils de l'argent (ou pas) ? » a par exemple pour cas particulier – autre que celui des T-shirts – la question « Comment gagnent-ils de l'argent avec leur moteur de recherche ? », question pour l'étude de laquelle le professeur apportera peut-être – qui sait ? – la réponse $R^\Diamond$ que voici (je l'emprunte à John Battelle, *The Search. How Google and Its Rivals Rewrote the Rules of Business and Transformed Our Culture*, Portfolio, 2005).

…
↓↑
Société
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Discipline

> About 40 to 50 percent of all search queries now return paid ads alongside the results, according to Majestic Research, and that number will only increase over time as companies optimize their sites to convert searchers to paid clicks. Once those sponsored links appear, 13 to 14 percent result in conversion to a paid click, according to Majestic (these figures are an average for Google and Yahoo only).
>
> That's not much, one might argue, until one does the math. The average price per paid click was hovering at about 50 cents in early 2005. Between Google and Yahoo, there are more than 2 billion searches each month. Back of the envelope: 2 billion times 14 percent – that's about 280 million paid clicks. Multiply that by an average of 50 cents and you have about $140 million in revenue each month to split between the two. And that's just on their home pages. Both Yahoo and Google have extensive networks serving other sites, providing a similar if not slightly higher level of traffic and revenue. Bottom line: all those clicks add up to billion-dollar revenue lines for both companies. (pp. 35-36)

Notons enfin que le fait qu'une réponse $R$ vaille pour un ensemble de « cas particuliers » peut n'apparaître qu'après-coup, une fois les études et recherches utiles accomplies ; et que l'étude d'un cas particulier peut, inversement, engendrer des sous-cas non prévus au démarrage de l'étude. Bien entendu, la généralité d'une question $Q$ n'est pas intrinsèque à $Q$ : elle dépend de l'outillage praxéologique disponible (ou qui sera rendu disponible) pour l'étudier.

5. Aller vers une *pédagogie des PER* suppose ainsi, me semble-t-il, que l'on aille vers un *paradigme scolaire du questionnement du monde* – dont on voit bien que certaines parties seulement échapperont à une réelle *codisciplinarité*. Nous pouvons commencer à *concevoir* une infrastructure didactique – avec ses composants disciplinaires utiles – adéquate à une telle organisation didactique scolaire, mais il est sans doute hors de portée encore de *construire* cette infrastructure comme totalité. Ce qui est possible, en revanche, du moins en matière de recherche, c'est tenter de faire vivre d'un même mouvement le paradigme du questionnement du monde et la pédagogie de l'enquête – autant que faire se peut et chaque fois que cela se peut. Si certains de ces essais restent confinés au monde des chercheurs et des praticiens de l'enseignement – hors des classes proprement dites, donc – on y apprendra comment notre rapport à la connaissance et à l'ignorance ainsi qu'à la diversité disciplinaire et à la codisciplinarité doit être remanié comme condition de l'essor de la pédagogie de l'enquête. Si l'on travaille avec des élèves, en s'extrayant avec eux momentanément du paradigme de l'inventaire des savoirs, on tentera d'apprendre combien et comment ce paradigme résiste (à travers les contrats didactiques qu'il inspire, dont élèves et professeurs ou même chercheurs restent fortement prisonniers) et comment on peut aider à l'émergence d'un paradigme nouveau, marqué par les sept dialectiques mentionnées au début de mon propos.

6. Une question peut légitimement tarauder les professeurs « spécialistes » : quel sera le sort fait à « ma » discipline dans une telle organisation scolaire de l'étude ? Ce que j'espère, en ce qui me concerne, c'est que cette question ne « taraude » plus qui que ce soit, mais fasse simplement l'objet d'observations et d'analyses précises, l'inquiétude étant remplacée, chez les professeurs « spécialistes », par une confiance dans « leur » discipline attentive au fait que le sort de tel ou tel complexe praxéologique ne dépendent que de ses « mérites » propres et non du traitement culturel qui lui sera fait par exemple. J'illustrerai cela, ici, par quelques exemples d'enquêtes observées sous l'angle de l'intervention de connaissances mathématiques éventuelles. On peut supputer que des connaissances mathématiques interviendront chaque fois que, dans la question posée, sont évoqués – de façon éventuelle implicite, ou minimaliste – des faits numériques ou spatiaux. Considérons par exemple cet extrait de la notice « Effet de serre » de l'*Écologuide de A à Z pour les juniors* de la Fondation Nicolas Hulot (Le Cherche midi, 2004).

> Notre planète ressemble à une serre de jardinier ou à une voiture laissée au soleil. La lumière traverse les vitres et réchauffe l'intérieur. Pour la Terre, les rayons solaires passent à travers l'atmosphère, réchauffent le sol, l'eau, les plantes, mais la chaleur n'est pas capable de sortir vers l'extérieur. Elle s'accumule : il fait chaud.
> Sans cet effet naturel bénéfique, la température moyenne à la surface de la Terre ne serait pas de + 15 ºC mais de –18 ºC ! L'effet de serre est dû à certains **gaz** naturels (**$CO_2$**, méthane, vapeur d'eau) ou d'origine humaine ($CO_2$ industriel, gaz des bombes aérosols ou des réfrigérants...). Si la chaleur piégée a permis l'apparition de **climats** accueillants pour la vie et pour l'homme, l'effet de serre anthropique, c'est-à-dire lié aux activités de l'Homme, accélère depuis deux siècles le **réchauffement** climatique : le cycle des saisons, les précipitations et les vents se modifient. Avec quelques degrés de plus, le niveau des océans s'élève et submerge le littoral et

> les îles les plus basses, des régions entières se désertifient sans que les habitants aient le temps de trouver des parades pour survivre. Si nous sommes tous responsables de l'augmentation de l'effet de serre, nous pouvons à l'inverse tous participer à sa réduction. Trier ses déchets, utiliser les **transports** en commun, produire et consommer bio, économiser l'**eau**, l'**électricité**, favoriser les **énergies** renouvelables, faire des achats réfléchis ont des effets positifs sur l'air, le sol, l'eau, les ressources, la **biodiversité** en vue de tendre vers un **développement durable**.

On voit s'affirmer ici une opposition que l'on trouve dans la plupart des présentations de l'effet de serre : il y a le « bon » effet de serre dû à des gaz « naturels », qui a donné à la Terre sa température moyenne et ses climats, et un « mauvais » effet de serre lié au rejet de gaz (dont le même $CO_2$) « d'origine humaine » (dont le « $CO_2$ industriel »). Mais attachons-nous à un « détail » : le « bon » effet de serre fait que la température moyenne à la surface de la Terre est d'environ +15 ºC, alors qu'elle serait d'environ –18 ºC s'il n'existait pas. Ce qui peut retenir l'attention, c'est la dissymétrie entre les deux températures données : +15 ºC et –18 ºC. *D'où ces valeurs numériques proviennent-elles ?* Pour la première, il s'agit, peut-on penser, du résultat d'un calcul exploitant des relevés de températures faits tout autour du globe terrestre. C'est ce que paraît confirmer ce passage d'un ouvrage pour le grand public cultivé écrit par deux chercheurs spécialistes, Hervé Le Treut et Jean-Marc Jancovici, *L'effet de serre. Allons-nous changer le climat ?* (Flammarion, 2004).

> Établir un diagnostic de l'évolution du climat requiert de choisir des indices intégrant ce qui peut se passer un peu partout sur la planète. Le plus utilisé est la température moyenne au sol, température qui, depuis le début de l'ère industrielle, a augmenté de 0,6 à 0,9 degré – une augmentation qui paraît supérieure aux variations naturelles du climat estimées sur le dernier millénaire.
>
> Quel crédit accorder à cette estimation ? La mesure des températures moyennes au sol est certes difficile, mais s'est affinée au fil des années. La mise en place d'un réseau de mesures météorologiques systématiques sur les continents date d'à peine plus d'un siècle. Les équipes scientifiques qui ont entrepris d'analyser ces données ont dû rapidement travailler à l'élimination de plusieurs sources d'erreurs, dues notamment à l'interaction de facteurs non strictement climatiques. Les stations situées au centre d'agglomérations en plein développement sont affectées par l'effet « îlot de chaleur » d'une concentration urbaine, qui provient à la fois du chauffage, de la circulation automobile et de l'inertie thermique des bâtiments. Certaines ont néanmoins pu être placées à proximité des aéroports. Pendant la même période, les mesures systématiques de la température de l'eau de mer par les bateaux se sont généralisées. Là aussi, l'analyse de ces données a réclamé un travail difficile et soigneux : les équipes scientifiques qui ont effectué ces études ont recensé les méthodes en usage dans chaque marine, civile ou militaire, pour en corriger les biais : la température varie selon qu'on utilise un seau en bois plutôt qu'un seau en fer pour recueillir l'eau ; de même, la température mesurée sur le bateau à la prise d'eau des machines est différente de celle mesurée par un thermomètre directement plongé dans l'eau. Ces scientifiques ont également recoupé les données marines et terrestres en utilisant les stations météorologiques sur les îles, afin de réduire leur marge d'erreur. Autre obstacle à une mesure précise : les points de mesure ne sont pas distribués de manière égale à la

> surface du globe, et des méthodes statistiques sophistiquées ont été nécessaires pour pondérer les moyennes en fonction de la représentativité de chaque mesure.
> Nous avons désormais une base beaucoup plus solide pour valider ces calculs : depuis deux décennies, des satellites effectuent des mesures de la température de surface, mesures régulièrement distribuées sur la planète, et permettent d'établir des moyennes en bonne continuité avec les estimations antérieures. (pp. 79-80)

On notera que cette température moyenne est le fruit d'une procédure complexe, dont la composante mathématique est, ici, seulement évoquée : il conviendrait sur ce point d'approfondir l'enquête. Cela dit, d'où provient alors la température –18 ºC ? L'article "Greenhouse effect" de Wikipedia comporte un lien vers un autre article de la même encyclopédie, "Idealized greenhouse model", lequel comporte en outre un lien vers un texte qui est le chapitre 2, intitulé "The global energy balance" (le bilan énergétique de la Terre) d'un traité universitaire américain classique : l'ouvrage *Global Physical Climatology* de Dennis Hartmann publié en 1994 (dont le chapitre 1 s'intitule "Introduction to the climate system"). C'est à partir de ces deux documents que je construis le petit compte rendu d'enquête ci-après.

• La Terre reçoit l'essentiel de son énergie du Soleil. Celui-ci, indique Hartmann, émet de l'énergie au taux de $Q = 3.87 \times 10^{26}$ W. Le symbole W désigne le watt, unité de mesure que l'article « Watt » de Wikipédia présente comme « la puissance d'un système énergétique dans lequel est transférée uniformément une énergie de 1 joule pendant 1 seconde ». On a donc : $W = J{\cdot}s^{-1}$. (Le joule est l'unité d'énergie : c'est « le travail d'une force d'un newton dont le point d'application se déplace de un mètre dans la direction de la force », indique l'article « Joule » de Wikipédia.) Le Soleil émet donc $3.87 \times 10^{26}$ J/s.

• La Terre est à une certaine distance $r$ du Soleil. Le flux d'énergie $Q$ émis par le Soleil est distribuée sur la sphère de centre le Soleil et de rayon $r$, dont l'aire est $4\pi r^2$. Chaque unité d'aire reçoit du Soleil un flux d'énergie $S_0$ tel que

$$S_0 = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Si l'on prend $r = 150 \times 10^9$ m, on obtient

$$\frac{3.87 \times 10^{26}\ \mathrm{W}}{4\pi \times 225 \times 10^{20}\ \mathrm{m}^2} \approx 1368{,}7\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}}.$$

L'article de Wikipedia propose de prendre $1366\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$ et Hartmann lui-même prend $1367\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. $S_0$ est appelée *la constante solaire* : celle-ci s'exprime donc en *joules par seconde et par mètre carré.*

• Si l'on désigne par $a$ le rayon de la Terre et si l'on se réfère au schéma ci-après (repris de Hartmann), on voit que la Terre reçoit donc un flux d'énergie égal à $S_0\pi a^2$. Si l'on prend $a$ = 6400 km = $64 \times 10^5$ m, il vient, si l'on prend $S_0$ = 1367 W/m$^2$, $S_0\pi a^2 = 1{,}7590\ldots \times 10^{17}$ W. (Hartmann adopte la valeur $1{,}74 \times 10^{17}$ W.)

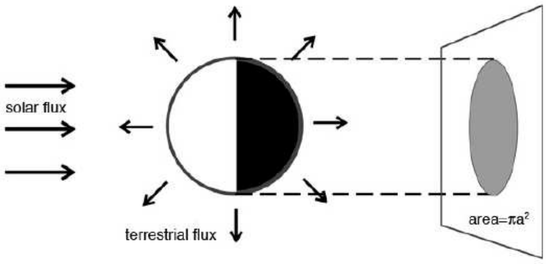



Figure 2.5: The spinning Earth is imagined to intercept solar energy over a disk of radius 'a' and radiate terrestrial energy away isotropically from the sphere. Modified from Hartmann, 1994.

• L'énergie ainsi reçue du Soleil – au rythme de 1,74 × $10^{17}$ J/s – n'est pas entièrement absorbée par la Terre : une *partie* du rayonnement solaire est réfléchie par le sol (on suppose ici que l'atmosphère est parfaitement transparente au rayonnement solaire…). Pour préciser les choses, on use alors de la notion d'*albédo*, que le glossaire de l'ouvrage de Le Treut et Jancovici cité plus haut définit ainsi : « Proportion du rayonnement réfléchi par un objet. Un miroir parfait a un albédo de 100 %, la neige fraîche un albédo de 80 % et un corps noir parfait un albédo nul. » Dans le modèle examiné, on introduit donc un *albédo planétaire* $\alpha$, que l'on prend en outre égal à 0,3 (= 30 %). La Terre absorbe donc un flux d'énergie d'origine solaire au rythme de $(1 - \alpha)S_0\pi a^2$, que Hartmann trouve égal à 1,22 × $10^{17}$ W.

• C'est en ce point que doivent intervenir deux considérations clés. Tout d'abord, comme l'écrit Hartmann, "in equilibrium, the total terrestrial flux radiated to space must balance the solar radiation absorbed by the Earth" : c'est cette égalité que l'on va exprimer ci-dessous. Pour ce faire, ensuite, il faut recourir à la notion de *corps noir* (Kirchhoff, 1860) et à la loi de Stefan-Boltzmann que l'article de Wikipedia consacré à cette loi présente en ces termes.

> The **Stefan-Boltzmann law**, also known as **Stefan's law**, states that the total energy radiated per unit surface area of a black body in unit time (known variously as the black-body **irradiance**, **energy flux density**, **radiant flux**, or the **emissive power**), $j^*$, is directly proportional to the fourth power of the black body's thermodynamic temperature $T$ (also called absolute temperature): $j^* = \sigma T^4$.
> A more general case is of a grey body, the one that doesn't absorb or emit the full amount of radiative flux. Instead, it radiates a portion of it, characterized by its emissivity, $\varepsilon$: $j^* = \varepsilon\sigma T^4$.
> The irradiance $j^*$ has dimensions of energy flux (energy per time per area), and the SI units of measure are joules per second per square metre, or equivalently, watts per square metre. The SI unit for absolute temperature $T$ is the kelvin. $\varepsilon$ is the emissivity of the grey body; if it is a perfect blackbody, $\varepsilon = 1$. Still in more general (and realistic) case, the emissivity depends on the wavelength, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$.
> To find the total absolute power of energy radiated for an object we have to take into account the surface area, $A$ (in m$^2$): $P = Aj^* = A\varepsilon\sigma T^4$.

Le kelvin (K) est l'unité SI de mesure de la température : on a $n$ ºC = ($n$ + 273,15) K et $n$ K = ($n$ – 273,15) ºC. Notons tout de suite que l'on a donc +15 ºC = (15 + 273,15) K ≈ 288 K et –18 ºC = (–18 + 273,15) K ≈ 255 K. La constante σ, dite de Stefan, vaut à peu près $5.67 \times 10^{-8}$ W·m$^{-2}$·K$^{-4}$.

• Si l'on regarde la Terre comme un corps noir, la température $T_e$ (dite « température planétaire effective » ou « température d'émission ») est définie par l'égalité

$$\text{rayonnement émis par unité d'aire} = \sigma T_e^4$$

en sorte que

$$\text{rayonnement terrestre total} = 4\pi a^2 \sigma T_e^4$$

L'égalité rayonnement absorbé = rayonnement émis s'écrit alors, pour la Terre, $(1 - \alpha)S_0\pi a^2 = 4\pi a^2\sigma T_e^4$. On voit que le rayon $a$ disparaît et qu'on obtient

$$T_e = \left[\frac{S_0(1-\alpha)}{4\sigma}\right]^{1/4}.$$

On notera que $T_e$ ne dépend que de l'albédo planétaire α et, à travers $S_0$, de la distance $r$ de la Terre au Soleil.

• En utilisant les données numériques adoptées par Hartmann, que trouve-t-on alors pour valeur de $T_e$ ? Calculons… Il vient :

$$T_e = \left[\frac{1367 \times 0,7}{4 \times 5.67 \times 10^{-8}}\,\mathrm{K}^4\right]^{1/4} \approx 254,86\ \mathrm{K}$$

Autrement dit, on a finalement $T_e$ ≈ 255 K ≈ –18 ºC. C'est de là sans doute que provient le –18 ºC que les auteurs reprennent à l'envi : l'enquête devrait être poursuivie pour le vérifier.

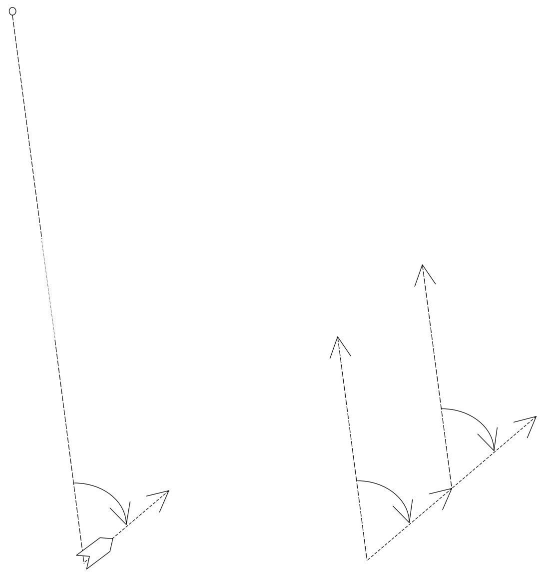
L'enquête évoquée ici confirme plusieurs points. Tout d'abord, il y a bien des mathématiques derrière la température de –18 ºC. Ensuite, ces mathématiques sont simples, élémentaires : elles tiennent en une formule, à savoir

$$T_e = \left[\frac{S_0(1-\alpha)}{4\sigma}\right]^{1/4}.$$

Enfin, il n'y a pas que des mathématiques – il y a en particulier des éléments de physique précis (et, jusqu'à un certain point, « sophistiqués »). Le travail accompli requiert que, de même que l'on ait confiance dans les mathématiques, on ne s'effarouche pas de la présence d'éléments praxéologiques relevant d'autres champs disciplinaires mais qu'au contraire on ait confiance dans notre capacité à y aller voir autant qu'il est utile. Dans cette perspective, il convient de noter que l'étude d'œuvres – telle la loi de Stefan-Boltzmann – *n'est nullement destiné à disparaître* avec l'émergence du paradigme du questionnement, qui, au contraire, la suppose, quoique dans des situations où il sera toujours question d'étude *finalisée* d'une œuvre et non d'étude d'une œuvre « en soi et pour soi ». Ainsi pourra naître une culture de la codisciplinarité sans laquelle l'ambition de questionner le monde resterait vaine.

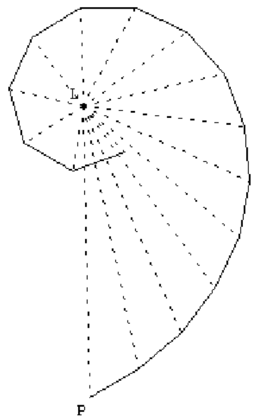
7. Mon second exemple a, lui, été en partie vécu avec des élèves de 4^e dans un atelier ayant pour titre « Enquêtes sur Internet » à propos de la question suivante : « Pourquoi les insectes de nuit se précipitent-ils sur les sources de lumière ? »

• L'une des théories qui prétendent expliquer ce phénomène est la « théorie de la Lune ». Son hypothèse de départ est qu'un insecte de nuit se guide, pour voler, sur une source de lumière L, selon le principe suivant : le papillon P vole en faisant un angle *a constant* avec la direction de la lumière.



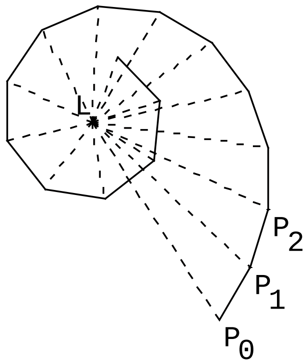
• Si la lumière L est « à l'infini », si L est la Lune par exemple, les droites successives (PL) sont (pratiquement) *parallèles* entre elles et le papillon vole alors en ligne droite (les angles correspondants sont égaux).

• Si la lumière est à distance finie (s'il s'agit d'une ampoule sous le porche d'une maison par exemple), le papillon fait un angle constant avec la droite (PL), et cela l'entraîne dans un mouvement en spirale autour de L (voir ci-après).



• Dans le premier cas, l'étude du problème proposé – que se passe-t-il si l'on suppose que la trajectoire fait un angle constant par rapport à la source de lumière ? –, la « synthèse » devrait mettre en avant une réciproque inhabituelle d'un théorème « bien connu », celui qui caractérise le parallélisme de deux droites coupées par une sécante commune faisant avec elles des angles *correspondants* égaux : cette réciproque inconnue énoncerait que, si des droites $(P_0P_1)$ et $(P_1P_2)$ font avec deux parallèles des angles « correspondants » *égaux*, alors $P_0$, $P_1$ et $P_2$ sont alignés. Mais que se passe-t-il dans le second cas ?

• On peut établir graphiquement le fait que le vol est « en spirale ». À un certain niveau, une mathématisation plus poussée pourrait être la suivante. On suppose que l'insecte « fait le point » régulièrement, cette régularité étant entendue comme l'égalité des angles $\widehat{P_0LP_1} = \widehat{P_1LP_2} = \ldots$




Les triangles $P_0LP_1$, $P_1LP_2$, etc., sont semblables : on passe de $P_0$ à $P_1$ par la similitude $s$ de centre L, d'angle $\alpha = \widehat{P_0LP_1} = \widehat{P_1LP_2} = \ldots$ et de rapport $k = LP_1/LP_0$. On a ainsi, avec des notations évidentes, $z_1 = k\,e^{i\alpha} z_0$, $z_2 = k\,e^{i\alpha} z_1$, …, et, plus généralement, $z_{n+1} = k\,e^{i\alpha} z_n$, et donc, pour tout $n \geq 1$, $z_n = k^n\,e^{in\alpha} z_0$. Il vient donc $z_n = r_0k^n\,e^{i(n\alpha+\theta_0)}$. Posons $\theta_n = n\alpha + \theta_0$ ; on a $n = \frac{\theta_n - \theta_0}{\alpha} = \frac{\theta_n}{\alpha} + \left(-\frac{\theta_0}{\alpha}\right)$ et donc $z_n = r_0\,k^{\theta n/\alpha}\,k^{-\theta 0/\alpha}\,e^{i\theta n} = (r_0k^{-\theta 0/\alpha})\,e^{(\ln k/\alpha)\theta n}\,e^{i\theta n}$. En coordonnées polaires, on a donc $r_n = a\,e^{b\theta n}$ où $a = r_0k^{-\theta 0/\alpha} = r_0e^{-(\ln k/\alpha)\theta 0}$ et $b = \ln k/\alpha$. Les points $P_0$, $P_1$, $P_2$, etc., se trouvent ainsi sur la *spirale logarithmique* d'équation polaire $r = ae^{b\theta}$. (On notera que si $b = 0$, c'est-à-dire si $k = 1$, la courbe est un cercle.)

• La spirale logarithmique est une entité mathématique qui a été bien étudiée et depuis longtemps : ainsi on démontre, à l'aide des outils de la géométrie différentielle élémentaire, que, si un point P décrit une courbe telle que la droite (LP) et la tangente en P à la courbe font un angle constant, la courbe est une spirale logarithmique ou un cercle (voir par exemple Guy Laville, *Courbes et surfaces*, Ellipses, 2004, p. 52).

• Le fait de se rendre disponibles les outils mathématiques *O* utiles participe de ce que je nommerai la *viabilisation mathématique* de l'étude d'un problème : celle-ci constitue progressivement le milieu didactique de l'enquête. Quel que soit le niveau de l'étude (et, corrélativement, de l'outillage mathématique utilisé), cette viabilisation, indispensable, identifie, élabore et organise les principaux composants mathématiques qui entreront ultérieurement dans la synthèse. Cette viabilisation est l'affaire *de la classe* : ainsi l'étude de ce qui se passe quand les droites (PL) conservent la même direction ou lorsque, au contraire, le point L est « à distance finie » fait-elle partie du PER dirigé par le professeur : elle devra produire deux résultats distincts, à des niveaux distincts de traitement mathématique.

• Mais un autre niveau de viabilisation existe, que je voudrais rappeler *in fine* : c'est celui de *l'infrastructure mathématique*, celle qui, par exemple, rend disponibles les *systèmes de nombres* utiles (y compris, ici, les complexes), ou, encore, à un autre niveau, la *structure vectorielle du plan*, etc. La classe, en ce cas, devra étudier, non un *problème*, mais une *œuvre* (mathématique), élaborée spécialement pour permettre le travail des classes de tel niveau, comme certaines œuvres mathématiques sont élaborées spécialement pour permettre le travail des ingénieurs, ou des chimistes, ou des biologistes, etc. Bien entendu, l'étude de cette œuvre conduira à étudier un grand nombre de problèmes dont la plupart seront *intramathématiques*. Le relèvement de l'enseignement des mathématiques suppose ainsi tout un travail infrastructurel, dont la réforme des mathématiques modernes a, il y a un demi-siècle, illustré le genre superlativement, mais qu'il s'agit aujourd'hui de reprendre *à nouveaux frais* en adéquation avec les besoins de viabilisation mathématique effectivement éprouvés dans le cadre du paradigme scolaire de questionnement du monde et de la pédagogie de l'enquête et des PER.