Yves Chevallard
UMR P3 ADEF

Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER

Lyon, le 19 mai 2009

1. Ce qu'on demande aux professeurs

1.1. Pour situer le développement qui suit, il faut s'arrêter un instant sur l'échelle des conditions et des contraintes utilisée en TAD ; la voici dans une représentation classique.

Civilisation
↓↑
Société
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Discipline

Le professeur *y* intervient ici au niveau de l'*école*, au sein de *systèmes didactiques* qui y viennent à l'existence et que je note tout aussi classiquement

$$S(X\ ;\ y\ ;\ \heartsuit),$$

où *X* est le collectif des *élèves*, le symbole ♥ désignant l'*enjeu didactique*, soit ce que *X* est censé *étudier* avec l'aide de *y*. D'une façon générale, ♥ est ce que je nomme une *œuvre*, c'est-à-dire une production de l'activité humaine, le mot d'œuvre étant employé d'une façon « anaxiologique ».

1.2. Ce qui importe ici, précisément, c'est la nature, la forme de l'aide que *y* est supposé apporter à *X* dans son étude de ♥. C'est cela que précise le niveau de la *pédagogie*, siège des conditions et contraintes qui façonnent l'activité du professeur *y* (et des élèves $x \in X$), sans bien sûr en déterminer ce que cette activité a de tout à fait spécifique de l'enjeu ♥.

1.3. Au fil des deux derniers siècles se sont succédé des *pédagogies différentes*, qui sollicitent *y* différemment : je les évoquerai ci-après d'une façon stylisée. La fonction de *y*, c'est-à-dire la fonction d'aide à l'étude, a longtemps été, et *reste encore aujourd'hui* en de nombreux contextes, une fonction exercée de façon *improvisée* par des intervenants *occasionnels* dont certains, à la longue, quoique demeurant des *amateurs*, vont se muer en intervenant *réguliers*. Ainsi naît en nos sociétés le *métier d'aide à l'étude*.

1.4. La toute première pédagogie n'exige du professeur que fort peu de chose. Il est notable que le mot de *pédagogue* a désigné d'abord, dans l'antiquité gréco-latine, l'esclave qui conduisait l'enfant à l'école et qui, peu à peu, vit s'étendre son champ d'action au point de se faire parfois le précepteur de son protégé. À Rome comme en Grèce, note l'historien Henri-Irénée Marrou (dans son *Histoire de l'éducation dans l'Antiquité*, Le Seuil, Paris, 1948, pp. 66-67), le maître d'école est « un pauvre hère », dont le métier est « le dernier des métiers, *rem indignissimam* », « fatigant et pénible, mal payé », « bon pour des esclaves, des affranchis ou de petites gens : *obscura initia* dit Tacite d'un parvenu qui avait commencé par là ». Métier qu'on exerce faute de mieux, en attendant mieux. C'est de là que nous venons ; et cette « indignité » originelle pèse toujours. Mais venons-en à une période historique plus récente.

1.5. Une première pédagogie est ce qu'on a pu nommer la *pédagogie de régent*. Le régent conduit l'étude d'une œuvre ♥ en n'ayant sur elle, ordinairement, que de bien faibles lumières. Stendhal, qui fut pendant trois ans (1796-1799) élève de l'école centrale de Grenoble (les écoles centrales sont les ancêtres des lycées que créera Napoléon au début du siècle suivant) a laissé de son expérience, dans sa *Vie de Henry Brulard*, une description fort peu amène. Monsieur Dupuy, le professeur de mathématiques, ne donne pas véritablement de cours, ce dont sans doute il aurait été incapable : « Dupuy, le bourgeois le plus emphatique et le plus paternel que j'aie jamais vu, écrit Stendhal, fut professeur de mathématiques, sans l'ombre de l'ombre de talent. C'était à peine un arpenteur et on le nomma dans une ville qui avait un Gros ! » Assis dans un « immense fauteuil », muni d'une canne, il se contente de faire passer les élèves au tableau pour les interroger sur « le plat cours de Bezout », dont chaque proposition « a l'air d'un grand secret appris d'une bonne femme voisine ». Stendhal note cependant : « M. Dupuy eut le bon esprit de nous parler de Clairaut et de la nouvelle édition que M. Biot (ce charlatan travailleur) venait d'en donner. [...] Clairaut était fait pour ouvrir l'esprit que Bezout tendait à laisser à jamais bouché. » Dans cette « pédagogie de régent », on étudie l'œuvre *dans des livres* et *y* n'est là que pour impulser cette étude.

1.6. Le développement de la pédagogie de régent conduit au XIX^e^ siècle à ce que je nommerai une *pédagogie de l'étude*, expression où le mot d'étude désigne « le travail en étude ». L'historienne Françoise Mayeur (1933-2006) a donné jadis cette brève description de ce que *y* fait alors *en classe*.

> Tout en parcourant et en signant les cahiers de correspondance, il fait réciter les leçons. Puis un élève lit les leçons du lendemain. Le professeur distribue ensuite les copies corrigées des jours précédents. Arrive la correction des devoirs : c'est l'exercice principal, qui réclame le temps le plus long. Cette correction terminée, le professeur dicte un devoir à faire ; la dernière demi-heure est employée à traduire la page de latin ou de grec que les élèves ont dû préparer d'avance ».

L'auteure conclut par ce commentaire : « La classe, dont il ne faut pas oublier qu'elle dure alors deux heures, contrôle donc le travail de l'étude et fournit pour l'étude de nouveaux matériaux. » Comme le souligne l'historien Antoine Prost, il n'y a là rien qui ressemble à un « cours magistral » : « l'exposé du professeur, rarement autonome et suivi, est subordonné aux textes qu'il explique. »

1.7. Après 1880 se met en place ce que je nommerai une *pédagogie de professeur*, dont l'emblème, précisément, est le cours magistral. Un siècle plus tôt, Stendhal avait aussi connu cette pédagogie, où, si l'on peut dire, *y* se substitue aux « textes ». À l'arpenteur Dupuy, il oppose ainsi, on l'a vu, le géomètre Louis-Gabriel Gros (1765-1812), dont l'enseignement est affranchi de toute référence à des auteurs que le jeune Henri Beyle exècre. « J'avais un plaisir vif, écrit Stendhal à propos des leçons qu'il reçut de ce mathématicien, analogue à celui de lire un roman entraînant. Il faut avouer que tout ce que Gros nous dit sur les équations du second degré était à peu près dans l'ignoble Bezout, mais là notre œil ne daignait pas le voir. Cela était si platement exposé que je ne me donnais pas la peine d'y faire attention. À la troisième ou quatrième leçon, nous passâmes aux équations du troisième degré et là Gros fut entièrement neuf. Il me semble qu'il nous transportait d'emblée à la frontière de la science. » Le professeur professe la matière que les élèves devront étudier ensuite par eux-mêmes ou avec l'aide de quelque répétiteur – qui, lui, en reviendra peut-être à une pédagogie de régent.

1.8. Dans tous les cas – pédagogie de régent, pédagogie de l'étude, pédagogie de professeur –, ce que *y* doit faire est en vérité limité, même si, par contraste avec le régent d'autrefois, le professeur, lauréat de l'agrégation ou titulaire de la licence, est réputé « savant » et se regarde comme tel. Au lieu d'aller chercher dans « le livre » (du maître) les réponses aux questions qu'il propose à *X* d'étudier, le professeur *y* est censé les tirer de son propre fonds : c'est elles qu'il expose dans son « cours ». Mais je noterai ici – nous y reviendrons – *une condition clé*, que la figure du professeur tend à dissimuler. Pour que le régent Dupuy exerce son « art », il lui faut en effet disposer du « plat cours de Bezout », sans doute le *Cours complet de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie* en six volumes (1770-1782) rédigé par Étienne Bézout (1730-1783), lequel avait déjà donné (en 1764-1767) un *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine* en quatre volumes ; il aurait pu user des *Éléments d'algèbre* d'Alexis Claude Clairaut (1713-1765), dont la 5^{e} édition est de 1797. On voit par contraste que, dans le cas du « savant » Gros, ces éléments contrastés de l'infrastructure mathématico-didactique utile semblent occultés, comme si Gros tirait de lui-même la technique de résolution (classique) des équations du 3^{e} degré : on a là une forme de *l'illusion superstructurelle*, sur laquelle nous reviendrons.

2. Le XX^{e} siècle et la pédagogie « active »

2.1. Dans tout cela, ce que *y* doit faire – et donc doit *savoir faire* – pour aider *X* se réduit à peu de chose, je le répète. Outre les gestes répressifs (tel l'usage de la férule et autres instruments équivalents, qui occupaient une place centrale dans les pédagogies anciennes), il doit, dans la pédagogie de régent, savoir interroger, corriger les réponses erronées et déficientes. Dans la pédagogie de l'étude, il se devra de faire comprendre « le livre » – les textes – que l'on suit, à l'aide notamment de travaux donnés à faire et qui seront corrigés et commentés. Quant à la pédagogie de professeur, elle substitue au « livre », devenu alors, souvent, un rival, le cours du professeur : ce qui qualifie un professeur est donc sa capacité à concevoir et à donner son cours, même si d'autres gestes professionnels lui sont demandés – donner des devoirs, les corriger, etc. Mais cette situation va évoluer dans la deuxième moitié du XX^e siècle, comme le montrent les instructions générales du 1^er octobre 1946.

2.2. Tout d'abord, ces instructions visent à ouvrir un espace à l'élève en lui donnant la parole au nom du passage à la « méthode active », « dont la valeur n'est plus guère contestée ». Pour *y*, il convient donc de *changer sa manière de faire la classe*.

> C'est, pour employer un terme traditionnel, le « cours », ou la « leçon du maître » qui apporte et communique aux élèves les notions nouvelles qu'ils doivent acquérir. Il ne peut s'agir quelle que soit la classe, d'un enseignement *ex cathedra*, où le professeur a seul la parole ; un tel « monologue » est trop souvent sans portée. La pratique de la « méthode active » s'impose [...] : elle exige, pour donner son plein rendement, beaucoup d'application et peut-être une certaine virtuosité que l'expérience conférera peu à peu. Le débutant aura parfois quelque peine à s'y adapter, mais il ne doit point se décourager devant les difficultés [...].

2.2. En quoi la « méthode active » change-t-elle véritablement le « cours » ? La première exigence est de faire diminuer le temps dévolu au « cours proprement dit », c'est-à-dire à l'avancée du temps didactique.

> ... il convient de réserver une fraction notable de chaque heure de classe au contrôle et à la mise en œuvre directe des notions acquises (récitations de leçons, recherche d'exercices, correction des devoirs), donc, de limiter la durée du « cours » proprement dit, c'est-à-dire la présentation de notions nouvelles. Il ne peut être fixé, à cet égard, de règle précise ; l'essentiel est que le temps consacré aux « exercices » ne soit pas excessivement réduit.

Corrélativement, il faut *accroître le temps d'activité des élèves*.

> ... une bonne part de l'activité des élèves doit être consacrée à l'étude et à la recherche de la solution de « problèmes », depuis le simple exercice d'application proposé pour illustrer un théorème, pour rendre vivante une formule, jusqu'au « devoir », exigeant un effort plus personnel, rédigé hors de la classe et donnant lieu ensuite à un compte rendu précis et détaillé.

2.3. Appelés par le souci de donner un rôle actif à l'élève dans la classe même, les exercices faits en séance sont une relative nouveauté que le texte nomme, maladroitement, *exercices improvisés*, ce qui oblige alors à donner cette précision.

> Les exercices « improvisés » (pour les élèves) doivent faire l'objet d'une préparation de la part du maître ; ils ne seront profitables qu'à cette condition ; leur choix doit permettre de saisir, sous leurs différents aspects, les initiatives à prendre pour mettre en train, pour conduire un raisonnement.

La direction de l'étude d'un exercice « improvisé » est alors une tâche relativement neuve, pour laquelle le texte de 1946, qui proscrit la « méthode d'autorité » au profit d'un « esprit libéral », doit prodiguer des recommandations.

> ... une question étant à résoudre, on acceptera, dans les tâtonnements de la recherche, toute idée raisonnable ; on comparera les démarches possibles ; on montrera comment l'on fixe son choix ; on fera comprendre la nécessité d'une mise au point ; on guidera peu à peu vers une solution harmonieuse et satisfaisante, dont on fera apprécier la valeur.

2.4. Le « cours proprement dit », lui-même, une fois ramené à ses justes proportions, doit permettre « la participation constante des élèves », qui devront prendre part « à l'élaboration du "cours", c'est-à-dire à l'exposé et à l'application des questions nouvelles », ce qui ne présente pas de difficultés insurmontables, du moins « si le professeur sait partir de l'expérience accessible à l'enfant, enchaîner les faits dans une progression naturelle, élargir peu à peu le champ des acquisitions, construire logiquement un édifice solide et harmonieux ».

2.5. Les instructions tentent de définir, en la matière, un juste milieu. D'un côté, en chaque classe, « un livre sera mis entre les mains des élèves », mais on ne doit pas revenir à une « pédagogie de régent », et, en pratique, « il ne faut point qu'une leçon soit donnée dans un manuel sans qu'elle ait été expliquée, commentée et comprise en classe ». Dans ce sens, encore, « il va de soi que [...] les élèves ne doivent, sous aucun prétexte, garder leur livre ouvert sous les yeux pendant que le professeur expose une question [...] ». D'un autre côté, bien sûr, le cours dicté « est à proscrire », ainsi que « la prise de notes "à la volée" par les élèves cherchant à enregistrer la totalité d'un exposé ». Pourtant « cette interdiction n'empêche pas la dictée d'un résumé ou d'un texte bref destiné à modifier ou à compléter, sur quelque point, la rédaction d'un livre ». Le texte ajoute : « Une telle dictée, qui doit toujours être courte, constituera d'ailleurs un exercice actif et profitable si elle est présentée comme une mise au point, faite en commun, de la question traitée. »

2.6. L'organisation de l'étude préconisée sait en outre faire sa place au travail d'équipe. Ainsi, à propos des révisions de fin d'année, le texte note que « ce travail peut être rendu plus attrayant et plus fructueux par la constitution de petites équipes d'élèves, dont chacune reçoit la charge d'exposer une question déterminée, en présentant en même temps quelques exercices d'application imaginés ou choisis par elle ». Plus généralement, le travail en équipe pourra être envisagé, même si, « en l'absence d'une tradition ou d'une expérience déjà assise », il convient de se montrer prudent : « ... il paraît préférable de ne constituer d'équipes qu'en vue de l'accomplissement d'une tâche nettement limitée : étude d'une question exigeant une certaine documentation et que l'équipe devra exposer à l'ensemble de la classe ; recherche de la solution d'un problème présentant quelque difficulté ; préparation d'un travail de révision ; confection de modèles de géométrie ; rédaction d'un formulaire ; organisation d'une bibliothèque de classe [...] ». Ce travail en équipe trouve en fait sa place à l'occasion des *séances de travail dirigé*, en classe, qui, « bien préparées et bien conduites », sont l'occasion pour le professeur « d'étudier les réactions et les comportements de chacun devant une tâche proposée et de donner, individuellement, les conseils appropriés ».

2.7. Le travail du professeur se fait ainsi plus complexe, plus riche aussi, et le texte indique à ce propos.

> On ne saurait trop insister sur l'importance que doit attacher le professeur à la préparation de chacune de ses classes. Bien plus que l'enseignement *ex cathedra*, la pratique de la « méthode active » rend nécessaire une mise au point préalable de ce qui sera fait par le maître et de ce qui sera demandé aux élèves. Il faut prévoir dans le détail : la matière de la leçon nouvelle ; la nature et la forme des questions qui solliciteront, au cours d'un exposé, la participation de la classe ; l'énoncé bien choisi, des exercices d'application, des calculs numériques, le texte, soigneusement étudié, du devoir.

2.8. La pédagogie « active » promue par les instructions de 1946 intègre donc des dispositifs propres empruntés à la pédagogie de régent – le manuel –, à la pédagogie de l'étude – les devoirs et leur correction –, ainsi qu'à la pédagogie de professeur – le cours. Mais elle les « corrige » afin de ménager en chacun d'eux une place « active » à *X*. On aura observé que le tableau ainsi brossé au lendemain de la Libération est, au cours des dernières décennies, devenu réalité, même si toutes ses promesses n'ont pas été accomplies ou ne l'ont été que bien imparfaitement. Or, cette *pédagogie hybride moderne* exige en droit bien davantage de *Y* que ce n'était le cas antérieurement. *Le métier se complique* : *Y* n'est plus un régent (sauf par moments), et il n'est vraiment un professeur que par intermittences, ce que certains déplorent. On pourrait dire qu'il est devenu un « impulseur d'étude », qui doit avoir plusieurs cordes à son arc – un peu régent, un peu professeur, un peu aide à l'étude. Cette pédagogie hybride est aujourd'hui devenue dominante à travers d'innombrables variantes – spontanées plutôt que délibérées. Mais la pédagogie scolaire s'est installée ainsi à l'intérieur d'une frontière que, depuis trente ans, elle ne parvient pas à franchir. Tel est le grand problème.

3. La pédagogie des AER : une frontière

3.1. Qu'elle est cette infranchissable frontière ? Au-delà du mot d'ordre de la « méthode active », au-delà des pédagogies hybrides qui en ont découlé s'étend en fait un vaste domaine que les professeurs n'ont, pour l'essentiel, pas réellement investi. En utilisant ici les mots et les sigles de la théorie anthropologique du didactique, ce domaine est celui d'une *pédagogie des AER*, des *activités d'étude et de recherche*. L'essentiel de cette pédagogie se trouve dans la *théorie des situations didactiques* (TSD) développée en pionnier par Guy Brousseau, théorie dont je n'évoquerai ici que la notion de *situation fondamentale*, telle que la présente en 2003 le *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques* (http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf).

> **Situation fondamentale (correspondant à un savoir)**
> C'est un schéma de situation capable d'engendrer par le jeu des variables didactiques qui la déterminent, l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé. Une telle situation, lorsqu'on peut l'identifier, offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner.

3.2. Le recours à une situation fondamentale en ce sens est une exigence épistémologique fondée, qui définit un projet d'élaboration d'une infrastructure mathématique didactiquement adaptée à une pédagogie des AER. Mais une pédagogie des AER requiert toutefois des conditions moins radicales ; je les rappelle ici dans la formulation qui en était donnée dans la séance 4 (tenue le mardi 26 septembre 2000) de mon séminaire de l'année 2000-2001 pour les élèves de 2e année d'IUFM, professeurs stagiaires de mathématiques. (Le sigle OMP désigne une organisation mathématique *ponctuelle*, de la forme [T/τ/θ/Θ].)

– Soit un type de tâches T dont l'étude est programmée. L'AER par laquelle sera mise en place dans la classe l'OMP [T/τ/θ/Θ] doit ***en premier lieu motiver*** le type de tâches T, en exhibant l'une au moins de ses ***raisons d'être***.

– Le schéma général permettant cette motivation est le suivant : on choisit une tâche, notée ✓ (« coche »), d'un ***type*** familier à l'élève, mais dont l'accomplissement selon une certaine technique amène ce dernier à rencontrer une difficulté déterminée, une tâche ***problématique*** $t^* \in T^*$ que l'accomplissement d'une tâche $t \in T$ permettrait de dépasser.

– Le type de tâches T apparaît ainsi comme permettant d'accomplir les tâches du type T^* : T^* (et derrière T^*, ✓) motive T, dont il apparaît alors comme une raison d'être.

– Voici d'abord l'ébauche d'un exemple relatif au type de tâches T consistant à effectuer une division (dans $\mathbb{N}^*$) :

- la tâche ✓, ici, n'est pas à la charge de l'élève, mais à la charge ***d'un personnage évoqué par l'énoncé*** : « Un paysan doit expédier un lot de 250 œufs dans des boîtes pouvant contenir chacune 6 œufs » ;
- la ***difficulté*** qui surgit devant le personnage évoqué – ici, le paysan – dans l'accomplissement de ✓ est, elle aussi, ***évoquée*** : combien ce paysan doit-il se procurer de boîtes ? Répondre à cette question revient à accomplir une tâche du type T^* suivant : « Déterminer le nombre N de boîtes pouvant contenir n objets d'un certain type afin qu'on puisse y ranger m objets de ce type » ;
- le type de tâches T^* est supposé être ***problématique*** pour le personnage évoqué, mais aussi – et surtout – ***pour les élèves*** ;
- le travail demandé alors ***à la classe, sous la direction du professeur***, est la création d'une OMP du type [T^*/τ*/θ*/Θ*], la technique τ* imposant l'accomplissement ***d'une tâche du type***

$\boldsymbol{T}$ (ici, une division), et donc la mise au point d'une OMP [$T/\tau/\theta/\Theta$] : dans l'exemple proposé on aura ainsi $N = \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{250}{6} \right\rceil + 1 = 41 + 1 = 42$;

– Voici un second exemple.

• La tâche ✓ est la suivante : « Trois vacanciers doivent se partager la somme de 860 F qui, à l'issue de leurs vacances, reste dans la caisse commune créée pour faire face aux frais quotidiens collectifs, et dans laquelle ils ont versé en tout, respectivement, 1900 F, 2100 F, 2200 F » ;
• La ***tâche problématique*** $t^* \in T^*$ consiste ici à « déterminer les sommes x, y, z qui doivent être restituées aux trois vacanciers » ;
• Les tâches du type T^* peuvent être accomplies – tel est ici le type de tâches T à motiver – ***en mettant le problème en équation et en résolvant le système obtenu*** : celui-ci comportant ici les équations 1900 F – x = 2100 F – y = 2200 F – z & $x + y + z$ = 860 F, sa résolution conduit à x = 120 F, y = 320 F, z = 420 F.

3.3. Notons que, dans les situations précédentes, la volonté prêtée à une personne (ou à un collectif de personnes) d'accomplir une certaine tâche ✓ conduit à devoir affronter une certaine question Q ayant la forme suivante : comment accomplir (de façon intelligible et justifiée) les tâches t^* d'un certain type T^* ? Cette question Q est ainsi au principe d'une certaine activité d'étude et de recherche.

3.4. Quelle est alors la difficulté centrale que rencontre le projet d'une pédagogie des AER ? Réponse : *l'absence d'une infrastructure didactique* (c'est-à-dire, ici, didactico-mathématique) adéquate. Pour toute entité à enseigner ♥, il s'agit en principe de concevoir une « situation », d'inventer une AER – avec sa tâche ✓, etc. – proposant un problème dont la tentative de résolution induise la rencontre avec ♥ et, si cela se peut, oblige à une certaine « maîtrise » de ♥. Ainsi une pédagogie des AER en mathématiques appelle-t-elle une infrastructure didactico-mathématique au service de la mise en évidence didactique des raisons d'être des notions mathématiques d'angle, de droites parallèles, de droites sécantes, de demi-droite, de segment de droite, de nombre décimal, de développement d'une expression algébrique, de factorisation d'une expression algébrique, de réduction d'une fraction, etc. La liste, on l'imagine, est fort longue ! Or c'est devant cette grande ambition que ce que je nommerai un peu plus loin « la profession » va s'arrêter. Symptôme mineur mais proliférant : les « activités » que leur employeur – l'Éducation nationale – demande aux professeurs d'introduire dans la classe sont bientôt rebaptisées « activités *préparatoires* », alors même que ce qualificatif est absent des prescriptions officielles. La pédagogie des AER (ou « des situations ») est ainsi réduite à une adjonction au corpus des gestes professoraux, additif qui apparaît à beaucoup inutile et se trouve de ce fait vite abandonné, sans que les raisons d'être en ait été bien comprises.

4. Le problème de l'infrastructure

4.1. Pour mieux poser le problème de l'infrastructure didactique, je m'arrêterai d'abord sur un exemple d'AER dont, bien entendu, je n'évoquerai ici que l'argument. Toute notion mathématique, ai-je rappelé, a ses raisons d'être. Pourquoi ainsi s'intéresser à ce qu'on peut appeler la *pente* en un certain point de la courbe représentative d'une fonction ? Considérons la situation du monde suivante.

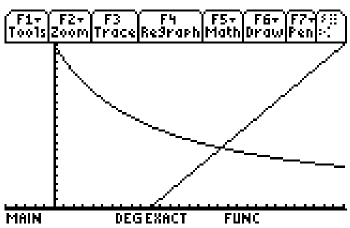
> Voulant calculer l'expression $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ et ne disposant que de la calculette de son téléphone mobile, un élève a remplacé $\sqrt{3}$ par la valeur approchée 1,7 ; il obtient ainsi $\frac{2}{\sqrt{3}+1} \approx$ 0,7407407. En utilisant l'égalité
> $$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1$$
> il réalise ensuite qu'il obtient alors $\frac{2}{\sqrt{3}+1} \approx 0{,}7$. Quelle est la bonne valeur ? se demande l'élève ; ou plutôt laquelle de ces deux valeurs (0,7 et 0,74) est la plus proche de la valeur exacte de $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$?

Ici, la tâche ✓ prêtée à l'élève consiste à calculer – avec certains moyens de calcul – une valeur décimale approchée du réel $A = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$. L'accomplissement de ✓ également évoquée conduit l'élève à devoir choisir la meilleure des deux valeurs 0,7 et 0,74 : c'est la tâche t^*. Pour cela, on va être conduit à accomplir une tâche t d'un type que l'on explicite ci-après.

4.2. Cette tâche t consiste ici, pour l'essentiel, à introduire les fonctions définies par

$$f(x) = \frac{2}{x+1} \text{ et } g(x) = x - 1$$

et à comparer leur rapidité de croissance ou de décroissance autour de $\sqrt{3}$. La technique τ peut se satisfaire d'une calculatrice scientifique où l'on affiche les courbes représentatives de f et g (ci-après).



On a bien sûr $f(\sqrt{3}) = g(\sqrt{3}) = A$; mais, comme

$$1{,}7 < \sqrt{3}$$

et que la courbe représentative de f « descend », on a

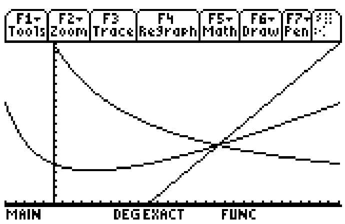
$$f(1{,}7) > f(\sqrt{3}) \text{ et donc } 0{,}741 > A.$$

De même, on voit que la droite représentative de g « monte », en sorte que l'on a $g(1,7) < g(\sqrt{3}$), soit $0,7 < A$. On a donc ainsi, finalement, l'encadrement suivant : $0,7 < A < 0,741$. Ce premier résultat trouve son origine dans la considération du caractère *croissant* ou *décroissant* des fonctions f et g implicitement manipulées quand on remplace $\sqrt{3}$ par 1,7 : ce sont ces propriétés-là *qui expliquent le phénomène constaté*. Quelle est alors la valeur la plus proche de la valeur exacte A, $f(1,7)$ ou $g(1,7)$? Il faut pour cela examiner un deuxième aspect des fonctions manipulées : la *pente* de leur courbe représentative près de $\sqrt{3}$. La fonction f décroît à l'évidence plus lentement que la fonction g ne croît, si bien que, quand on s'éloigne de ε de $\sqrt{3}$, $f(\sqrt{3} + \varepsilon)$ s'éloigne moins de A que ne le fait $g(\sqrt{3} + \varepsilon)$: la valeur la plus proche est donc $f(1,7)$.

4.3. On voit au passage que l'activité requise pour apporter une réponse R à la question Q est « ouverte » : on pourra poursuivre l'étude en se demandant comment *mathématiser* la notion de pente de f en $\sqrt{3}$ ou autour de $\sqrt{3}$ (ce que l'on aura fait sans trop y réfléchir pour la fonction affine g). La notion de *dérivée* de f en $\sqrt{3}$, qui est au bout de ce questionnement, permettra alors, en principe, de prévoir, *sans même examiner* les courbes représentatives de f et g, quelle est la meilleure expression de A à utiliser : on a $f'(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^2}$ et donc $|f'(\sqrt{3})| = \dfrac{2}{(\sqrt{3}+1)^2} < \dfrac{2}{(2,7)^2} < 0,275$, alors que g a pour pente 1, en sorte que c'est la première expression qui donne la valeur la plus proche. On peut aussi songer à fabriquer une expression de A « meilleure » que les deux disponibles, c'est-à-dire correspondant à une fonction h ayant, près de $\sqrt{3}$, une pente plus faible. Une « idée graphique » simple est de créer une fonction h dont la courbe représentative passe par l'intersection des deux courbes précédentes et se situe entre les deux courbes déjà tracées. Ainsi peut-on penser à prendre la fonction

$$h = \frac{f+g}{2}$$

qui vérifie bien l'égalité $h(\sqrt{3}) = A$. En ajoutant aux deux précédentes la courbe représentative de h, on obtient la configuration qui se révèle sur la copie d'écran ci-après.



On a alors :

$$h(1,7) = \frac{1,7-1}{2} + \frac{1}{1,7+1} = 0,35 + \frac{1}{2,7} = 0,720\ldots$$

On peut penser à itérer le procédé en prenant

$$i = \frac{f+h}{2} = \frac{f + \frac{f+g}{2}}{2} = \frac{3f+g}{4}$$

ce qui donne :

$$i(1{,}7) = \frac{\frac{6}{1{,}7+1} + 0{,}7}{4} = \frac{6 + 2{,}7 \times 0{,}7}{2{,}7 \times 4} = \frac{6 + 1{,}89}{10{,}8} = 0{,}73\ldots$$

Bien entendu, rien n'empêche de recommencer : on aura chaque fois un résultat plus proche de $A = 0{,}7320508075688772\ldots$

4.4. L'étude pourra être davantage fouillée : on pourra par exemple se proposer d'établir par le calcul, sans utiliser de dérivées ou à l'aide des dérivées, ce que montre la calculatrice graphique. On notera aussi que la bonne ou moins bonne qualité de l'approximation de $\sqrt{3}$ utilisée pourra être compensée par le bon choix de la fonction permettant de calculer la valeur approchée ; etc. Dans cette perspective, on soulignera l'apparition, dans ce qui précède, de l'idée de « barycentres » de deux fonctions ; et on pourra alors s'essayer à déterminer pour quelles valeurs du paramètre $\lambda \in [0 ; 1]$ on aura avantage à prendre, pour expression de A, $h_\lambda(\sqrt{3})$, où

$$h_\lambda = \lambda f + (1 - \lambda)g.$$

(Je laisse au lecteur intéressé le soin de mener à bien, pour son compte, une telle étude.)

4.5. Ce que je voudrais souligner surtout, c'est qu'une telle AER suppose localement une infrastructure mathématique adaptée, en général partiellement à créer. À titre d'illustration, voici un document (en ligne : http://www.htdp.org/2001-01-18/Book/node128.htm#figfuncdiff) qui, sous le titre *The slope of a function*, exemplifie le nécessaire travail de création d'une infrastructure voulue adéquate à un certain objectif didactique – nous allons voir lequel, en ce cas – qui ressemble à ce que pourrait être l'infrastructure sur laquelle pourrait s'appuyer le développement de l'AER précédente.

The Slope of a Function

For many problems, we need to be able to draw a line that has the same slope as some curve at a certain point. Indeed, computing the slope is often the true goal. In economics problems, the slope is the growth rate of a company if the curve represents the income over time. In a physics problem, the curve could represent the velocity of some object; its slope, at any point, is then the current acceleration of the object.

Determining the slope of some function f at some point x is to *differentiate* the function. The differential operator (also called a functional) returns a function f' (pronounced "f prime"). It tells us for any x what the slope of f is at that point. Computing f' is complicated, so it is again a good task for a computer program. The program consumes some function f and produces f'.

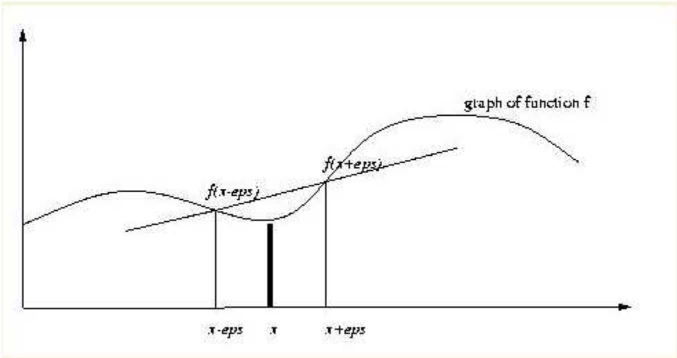


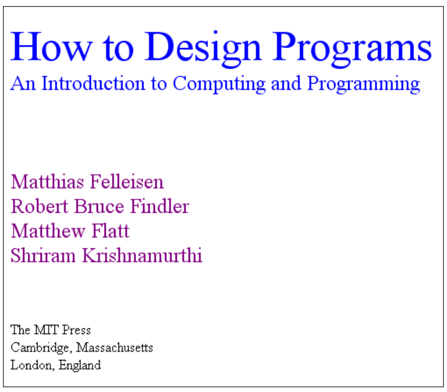
Figure: The graph of some function

To design a “differentiator” we must study how we could construct lines that have the same slope as a curve. In principle, such a line touches the curve at just that point. But suppose we relax this constraint for a moment and look at straight lines that intersect the curve close to the point of interest. We pick two points that are equally far away from x, say, $x - \varepsilon$ and $x + \varepsilon$; the constant ε, pronounced epsilon, represents some small distance. Using the two corresponding points on the curve, we can determine a straight line that has the proper slope.
The situation is sketched in figure [cross-reference]. If the point of interest has coordinate x, the two points are $(x, f(x - \varepsilon))$ and $(x, f(x + \varepsilon))$. Hence the slope of the line is

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2 \cdot \varepsilon}$$

That is, the difference between the height of the right point and the left point divided by their horizontal distance.

L’erreur que l’on n’aura pas manqué de constater – les points à considérer ont en fait pour coordonnées $(x - \varepsilon, f(x - \varepsilon))$ and $(x + \varepsilon, f(x + \varepsilon))$ – est typique d’une infrastructure didactico-mathématique *naissante*, peut-être trop vite constituée. En fait, si l’on se reporte à l’adresse http://www.htdp.org/2001-01-18/Book/index.htm, on découvrira qu’il s’agit là d’un extrait d’un ouvrage d’initiation à la programmation apparemment des plus sérieux.


How to Design Programs
An Introduction to Computing and Programming

Matthias Felleisen
Robert Bruce Findler
Matthew Flatt
Shriram Krishnamurthi

The MIT Press
Cambridge, Massachusetts
London, England

4.6. On devine que le passage à une pédagogie des AER suppose des remaniements infrastructurels importants, qui ne devraient pas le céder en difficulté à ceux que réalisa jadis la réforme des mathématiques modernes (laquelle se voulait en adéquation avec un renouveau de la pédagogie de professeur). Mais je voudrais souligner que le problème infrastructurel se pose, de façon spécifique, *en toute pédagogie*. Je prendrai ici un exemple tiré du séminaire adressé aux professeurs stagiaires de mathématiques élèves de l'IUFM d'Aix-Marseille en 2005-2006.

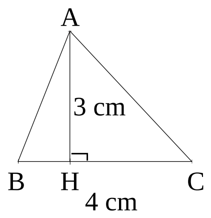
En 5^e, concernant le calcul d'aire, quelle est la meilleure rédaction ?

1) Aire du triangle ABC :

$$\frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

L'aire du triangle ABC est de 6 cm^2.

2) Aire du triangle ABC : $\frac{3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}}{2} = \frac{12 \text{ cm}^2}{2} = 6 \text{ cm}^2$.



Matériaux pour une réponse

1) La première manière de faire – en omettant les symboles des unités – est incontestablement la manière encore dominante aujourd'hui. Elle se justifie, mais elle ne doit sous aucun prétexte conduire à des écritures du type $\frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}^2$ dans lesquelles on égale des « grandeurs scalaires », ici $\frac{3 \times 4}{2}$ et $\frac{12}{2}$, à une « grandeur vectorielle », ici 6 cm^2. Les aires, c'est-à-dire les grandeurs de l'espèce « aire », forment en effet une droite vectorielle – une demi-droite si l'on ne considère que les aires positives –, dont les éléments sont ici décomposés dans la base { cm^2 }. On a par changement de base dans cet espace vectoriel de dimension 1 : $6 \text{ cm}^2 = 6\ (10^{-2} \text{ dm}^2) = 0{,}06 \text{ dm}^2$.

2) Il existe une « algèbre des grandeurs » qui conduit notamment à écrire ceci (par exemple) : $6 \text{ cm}^2 = 6\ (10^{-1} \text{ dm})^2 = 6\ (10^{-2} \text{ dm}^2) = \ldots$ Cela correspond à la deuxième manière de faire relevée dans la question examinée. Bien qu'elle soit encore largement étrangère à la profession, sans doute, c'est cette manière de faire qui est poussée en avant par les nouveaux programmes du collège.

• Le texte intitulé *Mathématiques. Introduction générale pour le collège* précise ainsi les objectifs de l'étude des différents domaines que les programmes distinguent. À propos du domaine intitulé « Grandeurs et mesure », ces objectifs sont les suivants.

■ **grandeurs et mesure**

– se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) ;

– connaître et utiliser les périmètres, aires et volumes des figures planes et des solides étudiés ;

– calculer avec les unités relatives aux grandeurs étudiées et avec les unités de quelques grandeurs quotients et grandeurs produits.

Ces programmes sont construits de manière à permettre une acquisition et un approfondissement progressifs des notions sur toute la durée du collège. Leur mise en œuvre est enrichie par l'emploi des instruments actuels de calcul, de dessin et de traitement (calculatrices, ordinateurs).

• Le calcul avec les unités doit être mis en œuvre dès la sixième, comme le montre ce commentaire du domaine d'études *Nombres et calculs* relatif au secteur d'études « Nombres entiers et décimaux ».

> Les activités proposées doivent permettre une reprise de l'étude des nombres décimaux, sans refaire tout le travail réalisé à l'école élémentaire, l'objectif principal étant d'assurer une bonne compréhension de la valeur des chiffres en fonction du rang qu'ils occupent dans l'écriture à virgule.
> Pour cela, diverses mises en relation sont utilisées. Par exemple, 23,042 est mis en relation avec [...] l'expression de mesures, une unité étant choisie : 23,042 m, c'est 23 mètres plus 4 centièmes de mètre (4 cm) et 2 millièmes de mètre (2 mm) ou 23 mètres plus 42 millièmes de mètre (42 mm), ce qui permet d'écrire : 23,042 m = 23 m + 4 cm + 2 mm = 23 m + 42 mm.

• Le programme de 4^{e} actuel (de même que celui qui entrera en vigueur en septembre 2007) comporte ce commentaire :

> Les situations où interviennent des vitesses moyennes constituent des exemples riches où le traitement mathématique s'avère particulièrement pertinent, comme l'étude de la vitesse moyenne d'un trajet sur un parcours de 60 km, où l'aller se parcourt à 20 km·h^{-1} et le retour à 30 km·h^{-1}.

Pour déterminer la vitesse moyenne, on utilise simplement la formule $v = \frac{d}{t}$. Ici, on a d = 60 km + 60 km = 120 km. Pour la durée t, en usant cette fois de la formule $t = \frac{d}{v}$, on a alors :

$t = t_A + t_R = \dfrac{60\text{ km}}{20\text{ km·h}^{-1}} + \quad = 3\text{ h} + 2\text{ h} = 5\text{ h}$

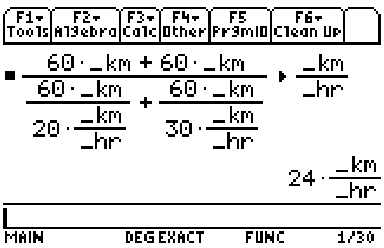
en sorte que $v = \dfrac{120\text{ km}}{5\text{ h}} = 24$ km/h = 24 km·h^{-1}. On aurait pu écrire d'un seul coup :

$$v = \frac{60\text{ km} + 60\text{ km}}{\dfrac{60\text{ km}}{20\text{ km·h}^{-1}} + \dfrac{60\text{ km}}{30\text{ km·h}^{-1}}}.$$

En ce cas, la conduite du calcul pourrait alors être celle-ci :

$$v = \frac{60\text{ km} + 60\text{ km}}{\dfrac{60\text{ km}}{20\text{ km·h}^{-1}} + \dfrac{60\text{ km}}{30\text{ km·h}^{-1}}} = \frac{1+1}{\dfrac{1}{20\text{ km·h}^{-1}} + \dfrac{1}{30\text{ km·h}^{-1}}} = \frac{2}{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{30}}\text{ km·h}^{-1} = \frac{12}{0,3+0,2}\text{ km·h}^{-1} = \frac{12}{0,5}\text{ km·h}^{-1} = 24\text{ km·h}^{-1}.$$

• On notera que certaines calculatrices permettent le calcul avec les unités, comme on le voit ci-dessous.



4.7. Pour fonder tout cela, il a fallu un travail dont la séance 16 du séminaire de l'année 2001-2002 se fait l'écho dans les termes suivants – toujours à propos d'une question soulevée par un professeur stagiaire.

Qu'est-ce qu'une grandeur ?
À propos de proportionnalité, j'ai un peu laissé tomber l'idée d'expliquer ce qu'est une grandeur. J'ai défini « deux grandeurs proportionnelles », mais j'ai passé sous silence la définition de « grandeur ». Heureusement (ou malheureusement), je n'ai pas eu de remarque là-dessus. Où puis-je m'instruire sur ce sujet ?

① Sous le titre ***Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations***, on trouvera une théorie « complète » des grandeurs dans le numéro à paraître de la revue ***Petit x***. Pour une information plus complète, on se reportera aussi à la première partie de ce travail, publiée sous le titre ***Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée*** dans le numéro 55 de cette même revue. On se bornera ici à une rapide esquisse.

② En termes « savants », la théorie mathématique des grandeurs conduit à regarder une espèce de grandeurs $\mathcal{G}$ (aire, volume, masse, etc.) comme une ***demi-droite vectorielle réelle*** (lorsque le système des nombres positifs disponibles n'est encore que $\mathbb{D}_+$ on doit bien sûr parler de demi-module ; lorsque ce système n'est encore que $\mathbb{Q}_+$, de demi-droite vectorielle rationnelle).

③ En pratique, une fois choisie une grandeur $u \in \mathcal{G}$ non nulle, toute grandeur $g \in \mathcal{G}$ s'écrira sous la forme $g = x\,u$. Dans le langage de l'algèbre linéaire, $\{ u \}$ est une ***base*** de $\mathcal{G}$, et x est la ***coordonnée*** du ***vecteur*** $g \in \mathcal{G}$ dans cette base. Dans le langage des grandeurs, u est la ***grandeur unité***, et x est la ***mesure*** de la ***grandeur*** g par rapport à cette unité.

④ Si v est une seconde grandeur non nulle, et si $v = r\,u$, soit encore si $u = \frac{1}{r}v$, alors on a : $g = x\,u = x\left(\frac{1}{r}v\right) = \left(x\frac{1}{r}\right)v = \frac{x}{r}v$.

❶ Si $\mathcal{G}$ est l'espèce $\mathcal{L}$ des ***longueurs***, et si u = m et v = cm, on a m = 1 m = 100 cm et donc par exemple 10 m = 10 (100 cm) = (10 × 100) cm = 1000 cm.

❷ Si $\mathcal{G}$ est l'espèce $\mathcal{D}$ des ***durées***, et si u = h et v = min, on a h = 1 h = 60 min et donc par exemple $\frac{1}{2}$ h = $\frac{1}{2}$ (60 min) = $\frac{60}{2}$ min = 30 min. De même on aura $\frac{1}{4}$ h = $\frac{1}{4}$ (60 min) = $\frac{60}{4}$ min = 15 min, ou $\frac{1}{5}$ h = $\frac{1}{5}$ (60 min) = $\frac{60}{5}$ min = 12 min, et aussi $\frac{11}{15}$ h = $\frac{11}{15}$ (60 min) = $\left(\frac{11}{15} \times 60\right)$ min = 44 min.

⑤ Ce qui précède se généralise aux grandeurs ***composées*** : à la notion de demi-droite vectorielle réelle il faut alors substituer une structure mathématique appelée ***algèbre de grandeurs***. L'essentiel est de retenir que l'on peut ainsi justifier complètement le calcul ***avec les unités***, qu'elles soient « simples » (comme ci-dessus) ou « composées ».

❶ Considérons le problème suivant :

Calculer la capacité, en litres, d'un réservoir parallélépipédique de 0,6 m de longueur, 10 cm de largeur, et 50 mm de profondeur. (On prendra : 1 litre = 1 dm^3.)

On a : $V = L \times \ell \times p = 0{,}6\ m \times 10\ cm \times 50\ mm = 0{,}6\ (10\ dm) \times 10\ (10^{-1}\ dm) \times 50\ (10^{-2}\ dm) = 6\ dm \times 1\ dm \times 0{,}5\ dm = 3\ dm^3$ = 3 litres. De même, soit le problème suivant :

Déterminer la masse linéique en g/cm d'un barreau d'acier de section constante et de 4 dm de longueur pesant 2,85 kg.

On a ici : $\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{2{,}85\ kg}{4\ dm} = \frac{2{,}85\ (1000\ g)}{4\ (10\ cm)} = \frac{285}{4}\ g/cm = 71{,}25\ g/cm$.

❷ Le ***type de tâches*** *T* dont relève ces deux tâches particulières peut être décrit ainsi :

Une grandeur g s'exprimant en fonction d'autres grandeurs g_1, g_2, g_3… au moyen d'une ***formule*** supposée connue, $g = \Phi(g_1, g_2, g_3…)$, calculer g, exprimée dans une unité imposée, pour des valeurs données de g_1, g_2, g_3…, ces grandeurs étant exprimées dans des unités déterminées.

Le problème suivant constitue un autre spécimen de ce type de tâches :

Déterminer la vitesse en mètres par seconde d'une balle de tennis lancée à 95 miles par heure. (On a : 1 mile = 1 mi = 1,609 km.)

La mise en œuvre de la technique τ conduit ici à écrire simplement : $v = 95\ mi/h = \frac{95\ mi}{1\ h} = \frac{95\ (1609\ m)}{3600\ s} \approx 42{,}5\ m/s$.

❸ Contrairement à un usage malheureux mais aujourd'hui dominant, on n'écrira pas, comme le fait tel manuel de 5e :

> aire de base $A_2 = (6 \times 6) : 2 = 18\ cm^2$
> aire de base $A_3 = 72–18 = 54\ cm^2$
> $V_2 = 18 \times 12 = 216\ cm^3$
> $V_3 = 864–216 = 648\ cm^3$

Cette confusion des scalaires et des vecteurs doit céder la place à une écriture correcte, dont les auteurs du manuel cité donnent d'ailleurs les règles – règles qu'eux-mêmes n'ont sans doute pas eu le courage de suivre tant sont pesantes les manières d'écrire aujourd'hui répandues :

> Il est tout à fait autorisé d'écrire :
> 1,825 km = 1 825 m
> $2\ m \times 3{,}5\ m = 7\ m^2$

4.8. La séance 17 du séminaire de l'année 2001-2002 comporte une annexe *exposant* la théorie de l'algèbre des grandeurs évoquée plus haut. Cette construction infrastructurelle n'est due, en l'espèce, ni au formateur, ni aux auteurs de l'étude parue dans *Petit x*, mais au mathématicien Hassler Whitney (1907-1989), à la « force productive » peu commune comme le lecteur pourra le constater à la lecture de l'article éponyme de l'encyclopédie (en anglais) *Wikipedia*.

5. Une profession qui n'arrive pas à naître

5.1. Une pédagogie des AER suppose de résoudre à nouveaux frais le lourd problème de l'infrastructure didactico-mathématique adéquate à cette pédagogie. Bien entendu, ce problème se décline en une foule de problèmes partiels qu'il faut identifier pour espérer les résoudre utilement. Mais un obstacle imposant se dresse devant l'effort à accomplir pour cela : l'obstacle de l'état historique du métier de professeur (de mathématiques). Pour saisir cette difficulté, il faut commencer par distinguer le *métier* de professeur – soit ce que fait le professeur quand il exerce son art – et la *profession* de professeur, organisation sociale qui, en quelque sorte, veille sur le métier et vers laquelle les gens de métier se tournent ou devraient se tourner lorsqu'ils rencontrent quelque problème *du métier* – en sorte que celui-ci devient alors problème *de la profession*.

5.2. En fait, ce couple métier/profession n'existe pas vraiment aujourd'hui en ce qui concerne le métier *de professeur*. Effet d'un atavisme autrefois utile autant qu'il est aujourd'hui détestable, la culture professorale établie porte le professeur à se regarder comme un *petit producteur indépendant* qui doit se procurer ses outils, ses ressources, inventer ses solutions, et vivre seul ce qu'il croit être ses échecs, dont il se désole, et ses réussites, dont il se rengorge. Par contraste avec les métiers qui relèvent d'une profession, il se vit comme une île, par nature recluse dans une indépassable autarcie. Un médecin n'invente ni la science médicale qu'il met en œuvre, ni les thérapies qu'il prescrit. Un architecte ne crée pas l'art de construire, même s'il peut contribuer à l'enrichir. Le professeur croit s'engendrer lui-même. Le médecin se reconnaît des maîtres en certains de ses professeurs de la faculté de médecine ; le professeur n'avoue aucun maître – à moins qu'il n'ait abdiqué sa liberté de praticien en se rangeant dans la troupe de quelque gourou ! La « profession », dans son cas, est, au vrai, d'un piètre secours : elle ne répond qu'à très peu de questions essentielles que lui pose le métier. Chacun est donc renvoyé d'abord à lui-même.

5.3. Une notion aidera à mieux voir ce qu'il en est, aujourd'hui, de la « profession » de professeur : la notion de *semi-profession*, popularisée il y a quarante ans par le sociologue américain Amitai Etzioni dans un livre au titre révélateur : *The Semi-professions and their Organisation: Teachers, Nurses and Social Workers* (1969). Les professeurs (*Teachers*) seraient, à l'instar des infirmières (*Nurses*) et des travailleurs sociaux, « organisés » en *semi-*profession. Pour identifier les semi-professions, on a pu proposer la liste suivante de critères (voir l'article "Semiprofession" de l'encyclopédie *Wikipedia*).

Criteria for a Semi-Profession

1. Lower in occupational status.
2. Shorter training periods.
3. Lack of societal acceptance that the nature of the service and/or the level of expertise justifies the autonomy that is granted to the professions.
4. A less specialized and less highly developed body of knowledge and skills.
5. Markedly less emphasis on theoretical and conceptual bases for practice.

6. A tendency for the individual to identify with the employment institution more and with the profession less.
7. More subject to administrative and supervisory surveillance and control.
8. Less autonomy in professional decision making, with accountability to superiors rather than to the profession.
9. Management by persons who have themselves been prepared and served in that semiprofession.
10. A preponderance of women.
11. Absence of the right of privileged communication between client and professional.
12. Little or no involvement in matters of life and death.

Par contraste avec le cas des semi-professions, voici maintenant des critères analogues relatifs aux professions.

Criteria for a Profession

1. Professions provide essential services to the individual and society.
2. Each profession is concerned with an identified area of need or function (e.g., maintenance of physical and emotional health).
3. The profession possesses a unique body of knowledge and skills (professional culture).
4. Professional decisions are made in accordance with valid knowledge, principles, and theories.
5. The profession is based on undergirding disciplines from which it builds its own applied knowledge and skills.
6. Professional associations control the actual work and conditions of the profession (e.g., admissions, standards, licensing).
7. There are performance standards for admission to and continuance in the profession.
8. Preparation for and induction into the profession requires a protracted preparation program, usually in a college or university professional school.
9. There is a high level of public trust and confidence in the profession and in the skills and competence of its members.
10. Individual practitioners are characterized by a strong service motivation and lifetime commitment to competence.
11. The profession itself determines individual competence.
12. There is relative freedom from direct or public job supervision of the individual practitioner. The professional accepts this responsibility and is accountable through his or her profession to the society.

On notera en passant que les professeurs français n'ont pas, à ce jour, de *diplôme professionnel* garanti par leur « profession » (à travers des structures universitaires) : en la matière, ils sont contraints de se prévaloir de leur réussite à un concours de recrutement, se soumettant ainsi aux critères de l'employeur – une administration d'État –, sans pouvoir faire entendre un point de vue indépendant qui serait celui de leur profession, sinon en écho approbateur ou plus souvent réprobateur aux décisions ou aux projets de l'employeur d'État.

5.4. Ce que cet état de semi-profession ne permet pas, c'est de franchir la frontière à l'intérieur de laquelle le métier de professeur stagne depuis des décennies. Ce qu'il ne permet pas, en particulier, c'est de rassembler les *forces productives didactico-mathématiques* nécessaires pour élaborer l'infrastructure indispensable à une pédagogie des AER. Ce blocage est d'autant plus fort que s'impose le mythe du petit producteur indépendant – ou du groupement de petits producteurs –, qui serait capable de subvenir en tout point aux besoins du métier… La survivance de ce mythe est en fait corrélée avec le refoulement du problème infrastructurel, ce qui laisse la place libre à l'illusion superstructurelle, qui confère au professeur le sentiment d'être maître de sa pédagogie et des moyens de sa pédagogie. On imagine aisément que les mêmes obstacles vont se rencontrer avec la pédagogie des PER, à laquelle j'arrive maintenant.

6. Genèse de la notion de PER

6.1. La *notion* de PER est née *hors de la classe de mathématiques*, en relation avec la notion « institutionnelle » de TPE, qui s'installe en classe de première à la rentrée 2000. C'est elle qui va donner lieu à une *première généralisation* d'emblée essentielle : celle de PER *codisciplinaire* (avec éventuellement dominante disciplinaire ou bidisciplinaire, etc.), sur laquelle je m'arrêterai un instant. La notion clé peut être schématisée de la manière suivante. Une question Q étant posée, un système didactique

$$S(X ; Y ; Q)$$

se forme autour d'elle : X est un collectif d'étude (une classe, une équipe d'élèves, une équipe de chercheurs, un journaliste, etc.) et Y une équipe (en général réduite : Y peut même être l'ensemble vide) d'aides à l'étude et de directeurs de l'étude (professeur, tuteur, directeur de recherche, directeur de la rédaction, etc.). Le but de la constitution de ce système didactique est *d'étudier* Q ou, comme le dit aussi, d'*enquêter* sur Q, c'est-à-dire de chercher à apporter à la question Q une réponse R qui satisfasse certaines contraintes *a priori*, dont celle de résister à sa mise à l'épreuve par la confrontation avec des « milieux adidactiques » appropriés. Le bilan du travail attendu de X sous l'impulsion de Y peut être noté ainsi :

$$S(X ; Y ; Q) \rightarrowtail R.$$

6.2. Contrairement à une fiction scolaire commode mais trompeuse, une telle enquête ne mobilise que rarement un outillage issu d'une unique discipline : la production de R procède généralement d'une *hétérogenèse*. En d'autres termes, et sauf exception, l'enquête fait « travailler » ensemble des outillages issus de plusieurs disciplines : elle est donc *codisciplinaire*. S'engager dans une telle enquête revient à s'engager dans un *parcours d'étude et de recherche* (PER) motivé par cette enquête même. Pour élaborer R, en effet, il convient de rassembler et d'organiser un milieu de travail M réunissant ensemble des ressources anciennes ou nouvelles dont X fera usage. Parmi ces ressources, certaines seront des réponses « toutes faites » à Q, validées par telle ou telle institution, et qu'on note pour cela $R^\lozenge$ (« R poinçon »), parce qu'elles sont censées avoir reçu une « estampille » institutionnelle. L'analyse de ces réponses fournira des matériaux pour la construction de la réponse R, elle-même notée maintenant $R^{♥}$. D'autres seront des œuvres O de la culture, quelle qu'en soit par ailleurs la « cote » culturelle, qui fourniront des outils d'analyse des réponses $R^{\Diamond}$ et de construction de la réponse espérée $R^{♥}$. Les œuvres O seront pour partie issues de diverses disciplines établies, même si certaines relèvent de « disciplines » non reconnues, parce que naissantes ou culturellement vilipendées. Le bilan plus détaillé du travail d'enquête est représenté par le « schéma herbartien », qu'on peut noter dans sa forme condensée par

$$(S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrow M) \hookrightarrow R^{♥}$$

et, dans sa forme développée par

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrow \{\, R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots, O_m \,\}] \hookrightarrow R^{♥}.$$

6.3. La notion d'enquête codisciplinaire ou de PER codisciplinaire permet de subsumer un vaste ensemble de pratiques sociales de connaissance : recherche scientifique, enquête policière ou journalistique, etc. L'étude scolaire est pourtant ce qui semble le moins se prêter à une modélisation en termes de PER. De fait, on peut peindre les formes les plus traditionnelles d'enseignement en disant que, si elle suppose bien une enquête à propos de Q, celle-ci est le fait de l'enseignant et s'opère en une autre scène que la classe ; l'élève, lui, se voit proposer une réponse $R^{\Diamond}$ toute faite, estampillée par le professeur, qui sera la réponse $R^{♥}$ de la classe : il devra l'étudier, comme il l'aurait fait des réponses $R^{\Diamond}$ rapportées dans le milieu M par la classe X si le loisir lui en avait été donné. Le passage du schéma dégénéré correspondant au schéma herbartien évoqué ci-dessus apparaît alors comme une ardente obligation d'une démocratie accomplie, où chaque citoyen ou collectif de citoyens doit pouvoir enquêter sur toute question qu'il lui plaira, en usant notamment d'un équipement praxéologique de base dont la formation scolaire l'aura muni. Cette transition démocratique, qui devient pensable, est pourtant loin encore d'être un fait, ou du moins un projet qu'il ne resterait qu'à accomplir.

6.4. Je voudrais toutefois évoquer comment le schéma herbartien permet de repenser une organisation didactique scolaire des plus classiques. Un professeur y donne à une classe X un travail à faire, disons un problème de mathématiques. Ce « problème » peut être regardé comme une question Q à laquelle chaque élève $x \in X$ doit apporter une réponse R_x, sa « solution » au problème, qu'on peut encore noter $R_X^{\Diamond}$, parce que cette réponse est « poinçonnée » par l'élève x. On peut imaginer que la classe travaille ensuite pour produire, sous la direction de y, « sa » réponse $R^{♥}$ à partir des réponses $R_X^{\Diamond}$, $x \in X$. L'évaluation d'une réponse $R_X^{\Diamond}$ doit porter sur la valeur de $R_X^{\Diamond}$, vis-à-vis du projet de développement de $R^{♥}$ et de la réception dans la classe de cette réponse.

6.5. Revenons à la genèse proprement dite. Dès l'année 2000-2001 sont mises en évidence ces praxéologies didactiques indispensables à la conduite d'un PER que sont les diverses « dialectiques » : *du sujet et du hors sujet* ; *du parachutiste et du truffier* ; *des boîtes noires et des boîtes claires* ; *de la conjecture et de la preuve* ou *des médias et des milieux* ; *de la lecture* *et de l'écriture* ou *de l'excription et de l'inscription* ; *de la diffusion et de la réception*. Tout cela apparaît au reste dans l'ultime séance – la 24e – du séminaire adressé au professeurs stagiaires de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille dès l'année 2000-2001. (J'ajoute que, très récemment, une septième dialectique a été reconnue : la dialectique *de l'individu et du collectif* ou *de l'autonomie et de la synnomie*.) Par contraste, et sauf erreur de ma part, ce n'est que dans le séminaire adressé à la promotion 2003-2004 qu'apparaît l'expression de *parcours d'étude et de recherche* – dans la 13e séance exactement. Dans ce contexte, le sigle PER fait système avec le sigle AER, présent, on l'a vu, dès l'année 2000-2001 (et même bien avant). Je reviens plus loin sur le motif qui a poussé à passer ainsi des AER aux PER. Mais avant cela, précisons plusieurs traits qui, par rapport à la notion de PER associée à la notion *générale* d'enquête codisciplinaire, doivent être soulignés dans le cas d'un PER en classe de mathématiques. Premier point : le dispositif du PER évoqué ici à propos de l'enseignement des mathématiques est une importation du dispositif des TPE, dont il s'inspire et dont il constitue une adaptation. Deuxième point : dans cette importation, la codisciplinarité est mise entre parenthèses ; les PER en question sont « mathématiques » : ce sont des PER que, aujourd'hui, je nomme plus généralement des PER (ou enquêtes) *monodisciplinaires* ; ou, pour être plus proche de la réalité, *quasi* monodisciplinaires. Dans le cas de la classe de mathématiques, on peut parler d'*enquêtes mathématiques*. Troisième point : alors que, dans ce que je nommerai une enquête codisciplinaire *ouverte*, l'outillage rassemblé dans le milieu didactique

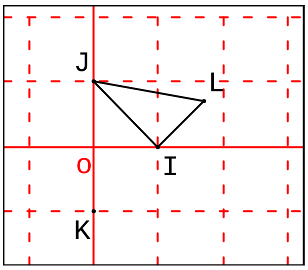
$$M = \{ R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, \ldots, O_m \}$$

est *a priori* quelconque, ici le milieu M, pour être admissible, doit être prélevé pour l'essentiel dans un domaine mathématique désigné à l'avance par le programme de la classe, dont il doit en outre recouvrir une partie non négligeable (afin de s'intégrer efficacement dans la dynamique d'ensemble de l'étude). Je parlerai alors de PER *finalisé* – la finalité assignée étant celle de la rencontre et de l'emploi d'éléments mathématiques figurant dans le programme d'étude de la classe.

6.6. Un quatrième point doit être traité à part : il concerne la question Q étudiée. Deux notions doivent être mentionnées. La première est celle de la *générativité* de la question Q, c'est-à-dire de sa capacité – lorsqu'on l'étudie sous certaines contraintes et dans des conditions données déterminant un certain parcours d'étude et de recherche – à engendrer des questions « dérivées ». Il paraît évident que, plus la générativité d'une question est élevée (selon un certain parcours d'étude et de recherche), et plus elle conduira à multiplier les occasions de rencontres mathématiques (ou codisciplinaires). Dans la séance 13 du séminaire de la promotion 2003-2004 des professeurs stagiaires de mathématiques, ainsi, le premier exemple de PER cité est engendré par le projet de *construire un calculateur graphique* : la question Q à étudier est donc « Comment construire un calculateur graphique ? », question dont l'étude est de nature à susciter la rencontre avec l'essentiel des praxéologies géométriques à étudier au collège. Par exemple, lorsqu'on se demande comment construire la racine carrée d'un entier, on obtient une réponse à l'aide du théorème de Pythagore : puisque $5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$, on obtient $\sqrt{5}$ en mesurant l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et 2. Comme on a aussi $5 = 9 - 4 = 3^2 - 2^2$, on obtient encore $\sqrt{5}$ comme le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont le premier côté de l'angle droit mesure 2 et dont l'hypoténuse mesure 3. Bien entendu, on peut se demander pour quels entiers ces techniques « marchent » – c'est-à-dire quelle est leur *portée*, autrement dit quels sont les entiers qui s'écrivent comme une *somme* ou comme une *différence* de *deux carrés*. La réponse a la seconde question est facile à établir: ce sont les entiers impairs (car $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$) ainsi que les multiples de 4 (car $4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$). La réponse à la première question n'est pas du niveau de la 4^e^ : la classe devra *éventuellement* la rechercher dans des documents plus avancés pour découvrir et comprendre (partiellement) l'assertion selon laquelle un entier est somme de deux carrés si et seulement si « chacun de ses facteurs premiers de la forme $4k + 3$ intervient à une puissance paire » (*Wikipédia*, article « Théorème des deux carrés de Fermat »). Bien entendu, comme dans un travail scientifique ordinaire, la classe pourra s'arrêter devant la difficulté de ce résultat, sur décision de *y*. Mais elle pourra aussi, par ailleurs, se demander comment étendre les techniques trouvées au cas des *décimaux* non entiers par exemple. Une question génératrice d'un PER peut ainsi être reprise pour prolonger l'enquête – ou pour la *reprendre*. Pour mieux apprécier la générativité de la question évoquée ici, je reproduis une partie du passage des notes de la séance 13 déjà mentionnée.

---

② Revenons à la notion de « calculateur graphique » : on doit se rendre capable d'effectuer des ***calculs graphiques*** tel celui ébauché lors de la séance 12 du Séminaire, en construisant un segment [JL] de mesure $\sqrt{3}$ et dont le mesurage permet alors d'avoir une valeur approchée de $\sqrt{3}$.



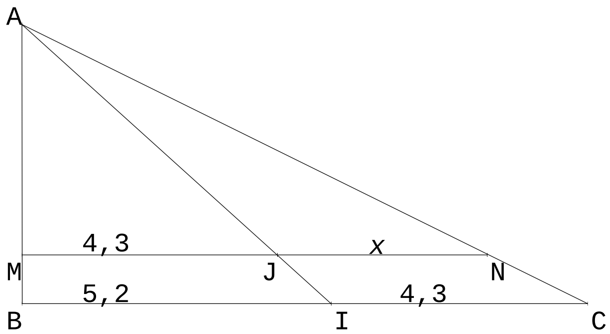
❶ Le calcul graphique est un domaine des mathématiques appliquées aujourd'hui presque entièrement disparu, mais qui, pendant un siècle environ à partir de 1860, permit aux ingénieurs d'effectuer graphiquement des calculs en tous genres (évaluation de fonctions, calcul d'intégrales, résolution de systèmes d'équations, etc.). Ce « calcul » ne sera éliminé que lentement par les progrès des moyens électroniques de calcul dans la deuxième moitié du XX^e^ siècle. En 1956, dans un *Manuel de calcul pratique numérique et graphique* destiné aux candidats au baccalauréat technique, l'auteur pouvait encore écrire :

> Sans méconnaître l'importance actuelle et surtout les promesses d'avenir du *Calcul mécanique*, je n'ai pas cru devoir le faire figurer dans cet ouvrage. Les machines à calculer modernes sont à la fois complexes, coûteuses et encombrantes. Leur emploi est encore réservé à une minorité.

❷ La partie du calcul graphique étudiée dans le PER ne concerne que les moyens de calcul graphique les plus simples, ce qu'on appelait jadis les ***diagrammes géométriques***, dont le manuel déjà cité présente en ces termes le principe d'emploi :

La **Géométrie** permet, à l'aide de constructions simples effectuées avec la règle et le compas, de calculer rapidement et avec une précision suffisante, certaines grandeurs définies par une formule. Ces constructions conduisent, comme résultat final, à la mesure d'une longueur qui représente l'inconnue cherchée.

❸ À titre d'exemple, calculons le nombre $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$. On réalise pour cela l'***épure*** ci-après : d'après le théorème de Thalès, on a en effet d'une part $\frac{x}{4{,}3} = \frac{AJ}{AI}$ et d'autre part $\frac{AJ}{AI} = \frac{4{,}3}{5{,}2}$, ce qui entraîne : $\frac{x}{4{,}3} = \frac{4{,}3}{5{,}2}$ soit $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$. En mesurant le segment [JN], on obtient ici $x = JN \approx 3{,}5$.

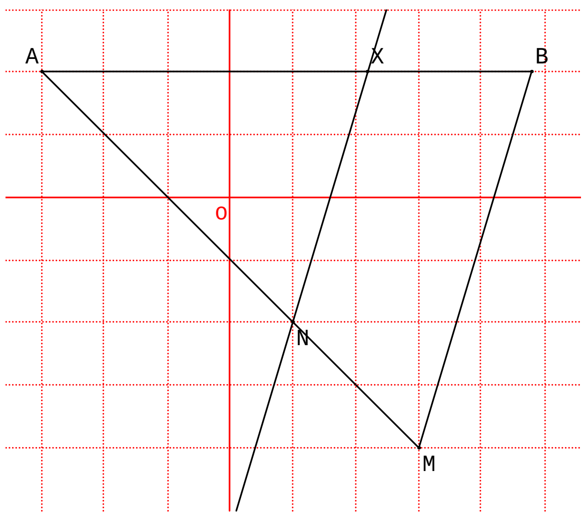


③ Le PER considéré conduira par exemple à traiter le type *T* de questions dont voici un spécimen *t* :

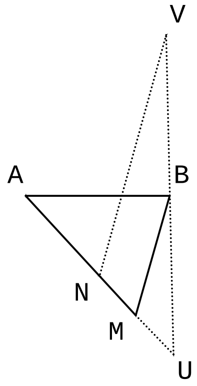
t. Calculer graphiquement l'expression $\frac{2}{3} \times 7{,}8$.

❶ Il faudra pour cela élaborer une technique τ consistant par exemple à faire ceci (pour *t*) :

τ(*t*). Tracer sur un quadrillage un segment horizontal [AB] de mesure 7,8, avec A sur le quadrillage, puis une demi-droite d'origine A sur laquelle on marque des points M et N tels que $AN = \frac{2}{3} AM$ (voir ci-après).
Tracer alors la parallèle à (MB) passe par N : cette droite coupe [AB] en X ; la mesure de AX est égale au nombre cherché.



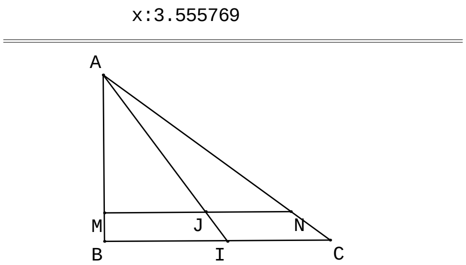
Ici, l'épure permet d'écrire : $\frac{2}{3} \times 7{,}8$ cm ≈ 5,2 cm. Comme $3 \times 5{,}2 = 15{,}6$ et $2 \times 7{,}8 = 15{,}6$, on a en fait : $\frac{2}{3} \times 7{,}8$ cm = 5,2 cm.



❷ Notons que la technique τ est, en l'espèce, incomplètement décrite : comment par exemple « tracer […] la parallèle à (MB) passe par N » ? Employant une technique de construction rencontrée lors de la séance 4 du Séminaire et qui exploite le 1er théorème des milieux, on peut procéder comme l'indique le schéma ci-après, où U et V sont respectivement symétriques de N et U par rapport à M et B : on notera que l'emploi du quadrillage permet ici de n'utiliser le compas qu'une fois (pour marquer le point V), puisque U est un nœud du quadrillage.

④ À partir du calculateur graphique, on pourra fabriquer un calculateur ***électronique*** en utilisant un logiciel de géométrie dynamique tel Géoplan.

❶ Pour cela, on construit l'épure à l'aide du logiciel ; puis on demande au logiciel de fournit la mesure du segment donnant la réponse à la question posée.



❷ Considérons le calcul de $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$. On obtient ceci. [Voir ci-dessus.] La valeur calculée par le logiciel, 3,555769, est cohérente avec la valeur mesurée sur l'épure : 3,55.

⑤ Le PER pris pour exemple ici permet de motiver beaucoup de questions qu'il est pertinent d'étudier dans une classe donnée. Ainsi fait-il apparaître comme « naturel » le fait que l'on se demande (ainsi qu'on l'a fait dans la séance 11) ce que sont les entiers naturels n qui s'écrivent comme une ***somme*** de carrés d'entiers ($n = x^2 + y^2$) : grâce au théorème de Pythagore, la racine carrée de tels nombres peut en effet être obtenue par un calcul graphique très simple. On justifierait de semblable façon le fait de s'interroger sur la nature des entiers n qui s'écrivent comme une ***différence*** de carrés d'entiers ($n = x^2 - y^2$).

❶ Si par exemple on chercher à « construire » le nombre $\sqrt{202}$, on pourra observer que 202 = 121 + 81 = $11^2 + 9^2$. Il suffira alors de mesurer sur une feuille de papier d'écolier la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle ont pour longueur 11 cm et 9 cm (par exemple).

❷ La construction évoquée permet d'établir que l'on a : $\sqrt{202} \approx 14{,}2$. Si l'on avait souhaité calculer $\sqrt{2{,}02}$ on aurait pu écrire (en 3e) que $\sqrt{2{,}02} = \sqrt{\frac{202}{100}} = \frac{\sqrt{202}}{10} \approx 1{,}42$. On a en vérité : $\sqrt{2{,}1} = 1{,}4212670\ldots$

❸ Le PER envisagé – la conception d'un calculateur graphique – ne conduit pas obligatoirement à étudier la question des entiers sommes de deux carrés, et l'étude de cette question ne conduirait pas non plus à tout coup à se pencher sur le fait que cet ensemble d'entiers est clos pour la multiplication (voir la séance 11 du Séminaire). Un programme d'étude et de recherche n'est pas entièrement déterminé à l'avance : il résulte de divers choix, qui sont en dernier ressort de l'autorité du professeur agissant comme directeur d'étude, l'un des critères de choix essentiels étant évidemment celui d'une « bonne couverture du programme » de l'année. Si, par exemple, la motivation du choix de la question « Est-il vrai que le produit de deux entiers sommes de deux carrés est toujours lui-même une somme de deux carrés ? » était surtout le travail sur certaines identités remarquables, et si celles-ci sont largement travaillées par ailleurs (dans le même PER ou dans un autre), le professeur pourra décider de ne pas aller voir dans cette direction – non sans le préciser aux élèves, notamment si la dynamique spontanée de la classe y portait.

6.7. L'introduction de la notion de PER dans la classe de mathématiques conduit naturellement à la question de la *(re)définition par PER d'un curriculum mathématique* – par exemple du curriculum du collège français actuel, question que je laisserai de côté ici tout en soulignant le rôle clé que doit jouer, dans son étude, le concept de *générativité* introduit plus haut. Je préciserai maintenant les raisons originelles du passage de la notion d'AER à la notion de PER, telles qu'on les trouve exprimées dans la même séance 13 du séminaire des PLC2 de mathématiques pour l'année 2003-2004.

⇨ ***Principes structurants : AER et PER***

• On examine maintenant quelques principes, tous fondamentaux, qui doivent guider la conception, la construction, la réalisation d'un enseignement rénové.

• Le premier principe consiste à ne pas chercher à réaliser des AER « isolées », visant chacune à « engendrer » ***un*** (et un seul) élément mathématique – tel théorème, telle définition, telle notion, etc. Il convient au contraire de s'autoriser à concevoir et à réaliser des AER ***à visée mathématique large***, bien que se donnant pour cible certains thèmes ou sujets du programme de l'année.

① Cela ne signifie pas que l'on s'interdise de proposer des AER de « petite taille » ; mais cela signifie que l'on ne s'imposera pas une « découpe millimétrique » du mathématiquement nouveau qu'une AER donnée est censée faire découvrir.

② Dans cette perspective, le programme de l'année peut être étudié à travers un nombre fini de ***quelques*** « grandes AER » qu'on peut appeler des ***parcours d'étude et de recherche*** (PER), et qui se laisseront scinder en AER au sens plus usuel du terme : un PER apparaît alors comme un véritable « parcours de découverte », à l'instar des IDD de 5^{e} et 4^{e}. Dans un langage plus proche de celui des chercheurs professionnels, on pourra entendre aussi bien, par PER, un « ***programme*** d'étude et de recherche ».

• À titre de premier exemple de PER, ici en 4^{e}, on s'arrête un instant sur le parcours qu'induit la question Q suivante :

Q. Comment construire un calculateur graphique ?

Le lecteur connaît la suite…

7. Problèmes d'une pédagogie des PER

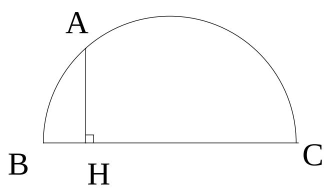
7.1. La problématique « classique » de l'enquête en classe de mathématiques est semblable à celle des AER : on se donne un ensemble de contenus mathématiques $\wp$ et l'on propose une question Q telle que l'élaboration d'une réponse $R^\heartsuit$ à Q amènera, si le parcours adopté pour ce faire appartient à un certain ensemble de parcours, à rencontrer $\wp$, ce qu'on peut écrire ainsi :

$$\wp \subset \{ R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, \ldots, R_n^\Diamond, O_{n+1}, \ldots, O_m \} \cup \{ R^\heartsuit \}$$

Dans la question sur le calculateur graphique, ainsi, on rencontrera le théorème de Thalès et le théorème de Pythagore, notamment à titre d'œuvres O outillant la construction de $R^\heartsuit$. Si l'enquête conduit à examiner certaines réponses $R^\Diamond$, elle pourra conduire aussi à y rencontrer des propriétés mathématiques étrangères au programme dans lequel on souhaite se situer, comme l'illustre le passage suivant de la séance 12 du séminaire 2004-2005 destiné aux PLC2 « marseillais ».

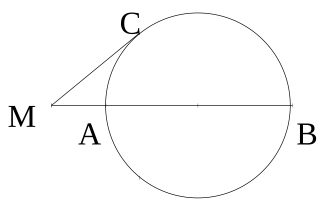
---

① Supposons d'abord qu'on veuille calculer graphiquement le nombre $\sqrt{n}$, où n est un entier naturel. On peut le faire en construisant une épure conforme au schéma ci-après, où BH = 1 et HC = n.



La connaissance géométrique clé est ici le fait qu'on a l'égalité $AH^2 = BH \times HC$, soit le fait que « dans un triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse ». Cette propriété implique qu'on a ici $AH^2 = BH \times HC = 1 \times n = n$ et donc $AH = \sqrt{n}$.

② On peut encore utiliser la technique suivante : on construit des points alignés M, A, B tels MA = 1, MB = n, puis on trace une des deux tangentes issue de M au cercle de diamètre [BC], soit (MC), où C est le point de contact ; enfin on mesure MC, ce qui donne le nombre cherché. La connaissance géométrique cruciale s'exprime ici à l'aide de la notion de ***puissance d'un point par rapport à un cercle*** : la puissance de M pour le cercle de diamètre [AB] est égale d'une part au produit MA × MB, d'autre part au carré MC^2 ; si l'on a donc MB = n et MA = 1, il vient $MC^2 = n$ et donc $MC = \sqrt{n}$.



Ici, bien entendu, la référence à la notion de « puissance d'un point par rapport à un cercle », étudiée jadis en classe terminale scientifique, fait sortir des programmes actuels – dont elle souligne du même coup le caractère presque nécessairement arbitraire.

7.2. Cette apparente difficulté n'en est pas une : en tant qu'il dirige l'enquête, le professeur *y* peut toujours décider d'écarter tel ou tel développement possible qui, en une certaine étape du parcours d'étude et de recherche, apparaît pertinent. Tel est l'un des intérêts *économiques* des PER : ils ne sont pas écrits à l'avance et s'écrivent en se déployant. Mais c'est là aussi un de leurs points de faiblesse *écologique*. Dans la logique d'étude qui vise $\wp$ à travers l'étude de Q, ce qui tend à être valorisé est $\wp$, tandis que la question *Q et tout ce qui découle de son étude par delà $\wp$*, à savoir

$$\{ R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, \ldots, O_m, R^\heartsuit \} \setminus \wp$$

auront peut-être, en fait sinon en droit, le statut d'éléments provisoires, constitutifs d'un échafaudage ayant permis (ou devant permettre) d'arriver à $\wp$. On imagine que, en ce cas, il devient un jour tentant *d'aller directement à $\wp$* sans passer par l'étude de Q. Ainsi revient-on bientôt à la présentation frontale du « savoir à enseigner », $\wp$, détaché de toute espèce de motivation !

7.3. Pour cette raison, l'enquête *finalisée* – qui généralise la notion « classique » d'AER – participe d'une infrastructure didactique *essentiellement fragile*, même s'il est indispensable de continuer à accumuler les connaissances à son propos. D'une façon générale, la viabilité d'une pédagogie des PER se heurte à deux difficultés solidaires. Tout d'abord, on voudrait contrôler *a priori* les parcours d'étude et de recherche, comme il en va dans la pédagogie magistrale d'exposition du savoir ; ensuite, on est tenté d'aller trop vite au but désigné à l'avance, $\wp$, en négligeant l'intérêt de voir émerger comme nécessaires, ou du moins comme clairement utiles, l'ensemble des éléments praxéologiques composant le « butin » de l'étude, soit l'ensemble

$$M \cup \{ R^\heartsuit \} = \{ R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, \ldots, O_m, R^\heartsuit \}.$$

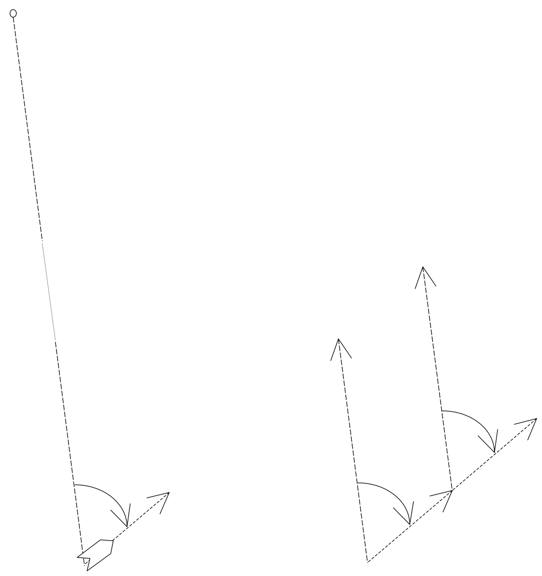
Pour cela sans doute, il est bon de proposer à l'étude une question Q motivée par un projet Π (imaginaire ou plutôt réel) et dont l'étude suppose une élaboration *de longue durée* (qui sera le lieu de nombreux apprentissages pertinents).

7.4. La pédagogie des PER doit donc affronter une contrainte redoutable : celle qui impose la distinction de « vrais » enjeux didactiques institutionnalisés dans la discipline dont on se réclame et d'enjeux didactiques *« opportunistes »*. Comment parer à la dérive qui nous ramènerait, une fois de plus, d'une rencontre « arrangée » à une rencontre *frontale*, immotivée parce que démotivée ? Dans la hiérarchie des niveaux de conditions et de contraintes, la réponse se situe au niveau de l'*école* ou plutôt du *pacte* entre école et société, qui définit ce que je nomme le *paradigme de l'étude scolaire*. Dans l'actuel paradigme scolaire, celui *de l'inventaire des œuvres*, ce qui compte est $\wp$, non Q ; et le professeur est jugé sur les œuvres

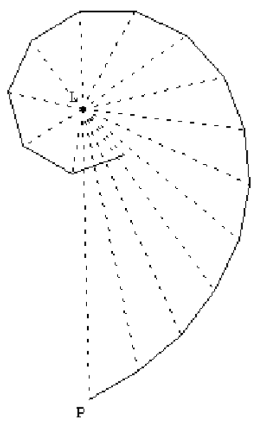
– les savoirs – dont il aura impulsé l’étude dans sa classe. Dans ce que je nomme le paradigme *du questionnement du monde*, le professeur est jugé sur les *questions* dont il aura dirigé l’étude. Selon ce paradigme scolaire à venir, le professeur n’aura pas rempli son contrat vis-à-vis de l’école parce qu’il aura fait étudier le théorème de Pythagore ou le théorème de Thalès, mais bien parce que il aura conduit l’étude de la question de la construction graphique d’une formule ou, à différents niveaux, la question de l’expression d’un réel donné adéquate pour le calcul approché de ce réel à l’aide de moyens de calcul donnés par exemple.

7.5. Aller vers une *pédagogie des PER* suppose ainsi que l’on aille vers un *paradigme scolaire du questionnement du monde* – dont on voit bien que certaines parties seulement échapperont à l’obligation épistémologique d’une réelle *codisciplinarité*. Nous pouvons commencer à *concevoir* une infrastructure didactique – avec ses composants disciplinaires utiles – adéquate à une telle organisation didactique scolaire, mais il est sans doute hors de portée encore de *construire* cette infrastructure *comme totalité*. Ce qui est possible, en revanche, du moins en matière de recherche, c’est tenter de faire vivre d’un même mouvement le paradigme de questionnement du monde et la pédagogie de l’enquête, autant que faire se peut et chaque fois que cela se peut. Si certains de ces essais restent confinés au monde des chercheurs – hors des classes proprement dites, donc – on y apprendra comment notre rapport à la connaissance et à l’ignorance ainsi qu’à la diversité disciplinaire et à la codisciplinarité doit être remanié comme condition de l’essor de la pédagogie de l’enquête. Si l’on travaille avec des élèves, en s’extrayant avec eux momentanément du paradigme de l’inventaire des savoirs, on tentera d’apprendre combien et comment ce paradigme aujourd’hui dominant résiste (à travers les contrats didactiques qu’il inspire, dont élèves et professeurs ou même chercheurs restent fortement prisonniers) et comment on peut aider à l’émergence d’un paradigme nouveau, marqué par les sept dialectiques mentionnées au début de mon propos.

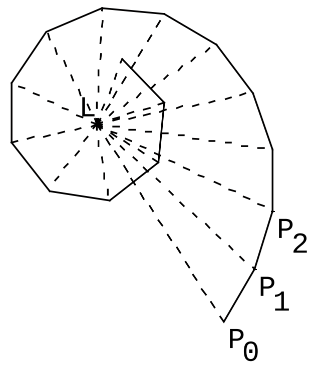
7.6. Une question peut légitimement tarauder les professeurs « spécialistes » : quel sera le sort fait à « ma » discipline dans une telle organisation scolaire de l’étude ? Ce que j’espère, en ce qui me concerne, c’est que cette question ne « taraude » plus qui que ce soit, mais fasse simplement l’objet d’observations et d’analyses précises, l’inquiétude étant remplacée, chez les professeurs « spécialistes », par une confiance dans « leur » discipline attentive au fait que le sort de tel ou tel complexe praxéologique ne dépende que de ses « mérites » propres et non du traitement culturel qui en sera fait par exemple – je songe ici au processus de refoulement des mathématiques véritablement présentes dans la construction sociale de la réalité. Je prendrai ici un unique et minuscule exemple, en partie vécu avec des élèves de 4^e^ dans un atelier ayant pour titre « Enquêtes sur Internet » à propos de la question *Q* suivante : « Pourquoi les insectes de nuit se précipitent-ils sur les sources de lumière ? » L’une des théories qui prétendent expliquer ce phénomène est la « théorie de la Lune ». Son hypothèse de départ est qu’un insecte de nuit se guide, pour voler, sur une source de lumière L, selon le principe suivant : le papillon P vole en faisant un angle *a constant* avec la direction de la lumière.



Si la lumière L est « à l’infini », si L est la Lune par exemple, les droites successives (PL) sont (pratiquement) *parallèles* entre elles et le papillon vole alors en ligne droite (les angles correspondants sont égaux). Si la lumière est à distance finie (s’il s’agit d’une ampoule sous le porche d’une maison par exemple), le papillon fait un angle constant avec la droite (PL), et cela l’entraîne dans un mouvement en spirale autour de L (voir ci-après).



Dans le premier cas, l’étude du problème proposé – que se passe-t-il si l’on suppose que la trajectoire fait un angle constant par rapport à la source de lumière ? –, la « synthèse » devrait mettre en avant une réciproque inhabituelle d’un théorème « bien connu » dès la 5^{e}, celui qui caractérise le parallélisme de deux droites coupées par une sécante commune faisant avec elles des angles *correspondants* égaux : cette réciproque inconnue énoncerait que, si des droites (P_0P_1) et (P_1P_2) font avec deux parallèles des angles « correspondants » *égaux*, alors P_0, P_1 et P_2 sont alignés. Mais que se passe-t-il dans le second cas ? On peut établir graphiquement le fait que le vol est « en spirale ». À un certain niveau, une mathématisation plus poussée pourrait être la suivante. On suppose que l’insecte « fait le point » régulièrement, cette régularité étant entendue comme l’égalité des angles $\widehat{P_0LP_1} = \widehat{P_1LP_2} = \ldots$



Les triangles P_0LP_1, P_1LP_2, etc., sont semblables : on passe de P_0 à P_1 par la similitude *s* de centre L, d'angle $\alpha = \widehat{P_0LP_1} = \widehat{P_1LP_2} = \dots$ et de rapport $k = LP_1/LP_0$. On a ainsi, avec des notations évidentes,

$$z_1 = k\, e^{i\alpha} z_0,\ z_2 = k\, e^{i\alpha} z_1,\ \dots,$$

et, plus généralement,

$$z_{n+1} = k\, e^{i\alpha} z_n.$$

On aura donc, pour tout $n \geq 1$,

$$z_n = k^n e^{in\alpha} z_0.$$

Il vient donc $z_n = r_0k^n e^{i(n\alpha+\theta_0)}$. Posons $\theta_n = n\alpha + \theta_0$; on a $n = \dfrac{\theta_n - \theta_0}{\alpha} = \dfrac{\theta_n}{\alpha} + \left(-\dfrac{\theta_0}{\alpha}\right)$ et donc

$$z_n = r_0\, k^{\theta_n/\alpha} k^{-\theta_0/\alpha} e^{i\theta_n} = (r_0k^{-\theta_0/\alpha})\, e^{(\ln k/\alpha)\theta_n} e^{i\theta_n}.$$

En coordonnées polaires, on a ainsi

$$r_n = a\, e^{b\theta_n}$$

où $a = r_0k^{-\theta_0/\alpha} = r_0e^{-(\ln k/\alpha)\theta_0}$ et $b = \ln k/\alpha$. Les points P_0, P_1, P_2, etc., se trouvent ainsi sur la *spirale logarithmique* d'équation polaire $r = ae^{b\theta}$. (On notera que si $b = 0$, c'est-à-dire si $k = 1$, la courbe est un cercle.) La spirale logarithmique est une entité mathématique qui a été bien étudiée et depuis longtemps : ainsi on peut établir (à l'aide des outils de la géométrie différentielle élémentaire) que, si un point P décrit une courbe telle que la droite (LP) et la tangente en P à la courbe font un angle constant, la courbe est une spirale logarithmique ou un cercle (voir par exemple Guy Laville, *Courbes et surfaces*, Ellipses, 2004, p. 52).

7.7. Le fait de se rendre disponibles les outils *O* utiles participe de ce que je nommerai la *viabilisation* (ici, *mathématique*) de l'étude d'un problème : celle-ci constitue progressivement le *milieu didactique* de l'enquête. Quel que soit le niveau de l'étude (et, corrélativement, de l'outillage utilisé), cette viabilisation indispensable identifie, élabore et organise les principaux composants praxéologiques (mathématiques) qui entreront ultérieurement dans la synthèse, laquelle a pour fonction de rassembler, d'organiser, de présenter les outils et les résultats de l'enquête. Cette viabilisation *superstructurelle* est l'affaire *de la classe*. Ainsi l'étude de ce qui se passe quand les droites (PL) conservent la même direction ou lorsque, au contraire, le point L est « à distance finie » fait-elle partie du PER dirigé par le professeur : ici, elle devra produire deux résultats distincts, à des niveaux distincts de traitement mathématique. Bien entendu, un autre niveau de viabilisation existe, que je rappelle encore, celui de *l'infrastructure didactico-mathématique*, qui, par exemple, doit rendre disponibles d'une manière appropriée les *systèmes de nombres* utiles (y compris, ici, les complexes). La classe, en ce cas, devra étudier, non pas une *question*, un *problème*, mais une *œuvre* (en l'espèce, mathématique), élaborée spécialement pour permettre le travail des classes de tel niveau, comme certaines œuvres mathématiques sont élaborées spécialement pour permettre le travail des ingénieurs, ou des chimistes, ou des biologistes, etc. Bien entendu, l'étude de cette œuvre conduira à étudier un grand nombre de problèmes dont la plupart seront *intramathématiques*. Dans le cas où l'étude de la question *Q* est inévitablement *codisciplinaire* – comme il en va par exemple avec la question « Pourquoi dit-on que les émissions de CO_2 tendent à augmenter l'effet de serre ? » –, des efforts semblables devront être déployés au double niveau superstructurel et infrastructurel, par exemple en physique, en biologie, etc. Pour la société, le relèvement de l'enseignement a un prix : promouvoir les changements qui rendront viable une *pédagogie de l'enquête* (ou des PER) ; et pour cela fonder clairement le *pacte scolaire* sur le *paradigme de questionnement du monde*. En même temps, c'est à la *profession* (où il faut ranger à côté des professeurs leurs formateurs, leurs responsables ainsi que les chercheurs qui consentent à s'engager dans des recherches fondamentales à finalité de développement professionnel) qu'il revient d'impulser et de gérer l'élaboration de *l'infrastructure didactique codisciplinaire* sur laquelle l'activité des classes scolaires pourra se déployer. L'avenir est ouvert !