

Université de Provence - Département des sciences de l'éducation

Licence 2008-2009

UE SC EE2 : Théorie de l'apprentissage et didactique pluridisciplinaire

Yves Chevallard

y.chevallard@free.fr

Didactique fondamentale

Notes & documents

Unité 6. Organisations didactiques : AER & PER

6.1. Un point d'étape

6.1.1. On a précisé dans l'Unité 3 les exigences d'étude – en quatre points – relatives à ce cours de didactique fondamentale :

– *participer* le plus complètement possible aux séances présentiels en étant attentif *en priorité* au propos de l'enseignant et en examinant *de concert avec lui* le contenu projeté sur l'écran, tout en prenant des *notes écrites* à la fois pour identifier peu à peu la structure du contenu exposé et garder une trace des *difficultés* éprouvées sur le moment ;

– dans la période suivant une séance, *étudier* le *texte* mis en ligne *en prenant des notes* pour dégager la structure de la matière exposée et marquer les éléments répondant à certaines des difficultés éprouvées en séance ;

– faire le point sur les difficultés qui semblent encore non entièrement surmontées à l'issue du travail précédent, en vue de les expliciter sous la forme de *questions adressées à l'enseignant* (y.chevallard@free.fr) ;

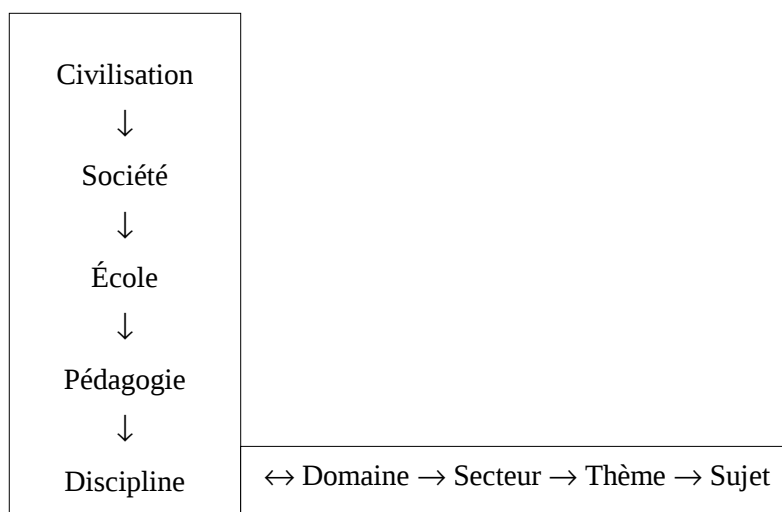
– prendre connaissance, dans le fichier mis en ligne à cet effet (« Forum des questions »), des *réponses écrites* de l'enseignant aux questions posées par les étudiants, en considérant que ces réponses forment un *complément de cours*, auquel on appliquera donc la procédure décrite ci-dessus pour le texte des séances elles-mêmes.

6.1.2. Faisons le point sur ce qui constitue, à l'orée de cette Unité 6, une *analyse didactique* d'une situation supposée décrite dans un texte (oral ou écrit) : c'est une analyse de ce type, on le sait, qui sera au cœur de l'épreuve d'examen.

a) Cette analyse doit comporter, en fonction bien sûr des informations disponibles et de ce que l'on peut raisonnablement conjecturer, à propos de chaque système didactique $S(X ; Y ; \heartsuit)$ présent ou évoqué dans la situation, identifié éventuellement comme étant le SDP ou un SDA, l'examen des questions suivantes :

1. qu'est-ce que X ?
2. qu'est-ce que Y ?
3. que sont les praxéologies $[T / \tau / \theta / \Theta]$ composant ♥ ?
4. que font X et Y , quelles *praxéologies didactiques* mettent-ils en œuvre, mobilisant quelles *ressources didactiques*, pour que X « apprenne » ♥ ?
5. quel *équipement praxéologique* peut-il résulter chez X , à court ou moyen terme, du fonctionnement du système didactique $S(X ; Y ; ♥)$?
6. qu'est-ce que Y et certains environnements éventuels de $S(X ; Y ; ♥)$ auront pu apprendre du fait du fonctionnement de $S(X ; Y ; ♥)$?

b) Pour espérer pouvoir répondre à ces questions, il convient d'identifier les principaux « paquets » de *conditions et contraintes* qui rendent possibles, facilitent ou au contraire interdisent (ou, du moins, gênent) la survenue de tel ou tel état des systèmes didactiques examinés. À cet égard, rappelons l'*échelle des niveaux de co-détermination didactique* à laquelle on est parvenu jusqu'ici : on peut la représenter de la façon suivante.



6.2. Que peut faire X , que peut faire Y ?

6.2.1. Nous revenons ici au type de situations auquel nous sommes arrivés à l'issue de l'Unité 5 : le système didactique envisagé peut s'écrire $S(X ; Y ; ♥_E)$, c'est-à-dire qu'on y étudie les praxéologies portées par un certain *exposé E*.

a) On a déjà envisagé ce qui est, dans le paradigme didactique classique, l'étape antérieure : E est « apporté » par Y , par exemple sous la forme d'un *cours magistral*. Une autre organisation didactique peut exister aussi qui, bien que moins valorisée aujourd'hui dans l'enseignement scolaire et universitaire, consiste en ce que Y fasse le choix d'un exposé E – manuel, traité, article – que X étudiera alors sous la direction de Y . (L'étude de cet exposé peut au reste être *imposé* à X et Y par « l'institution mandante ».) Ainsi les responsables Y d'un séminaire de

recherche $S(X; Y; \heartsuit)$ pourront-ils décider d'y faire étudier tel ou tel article ou livre E qu'ils jugent fondamental et qui, en principe, est tel que $\heartsuit_E \subset \heartsuit$.

b) Que peut faire $S(X; Y; \heartsuit_E)$ pour étudier E ? Nous allons nous arrêter sur deux types de gestes didactiques possibles, déjà évoqués dans les règles d'étude de ce cours.

6.2.2. Le premier geste a pour objet de rendre plus apparent, si nécessaire, la structure de l'exposé. On peut, pour cela, dresser une *table des matières*, comme ci-après.

Cours de didactique fondamentale

Tables des matières

Unité 1. *Le didactique et la didactique*

- 1.1. Un cadre commun
- 1.2. « Didactique » : d'abord, le mot
- 1.3. « Didactique » : ensuite, la chose
- 1.4. Systèmes didactiques, enseignement, apprentissage
- 1.5. Se familiariser avec la diversité des systèmes didactiques
- 1.6. Quelle discipline ?
- 1.7. Engagement formatif et problématique de l'étude

Unité 2. *Observer le didactique ?*

- 2.1. Le pédagogique dissimule le didactique
- 2.2. À la recherche du didactique : en suivant Thomas Platter
- 2.3. Conditions et contraintes : les niveaux de co-détermination didactique
- 2.4. Le didactique introuvable : deux exemples ordinaires
- 2.5. Observer le didactique : un exemple

Unité 3. *Types de tâches et techniques*

- 3.1. Point d'étape
- 3.2. $\emptyset$
- 3.3. Analyse didactique : rappels et prolongements
- 3.4. Un « quelque chose » à faire apprendre : la notion de type de tâches
- 3.5. Un « quelque chose » à faire apprendre : la notion de technique
- 3.6. La dialectique entre types de tâches et techniques
- 3.7. Naturalisation et reproblématisation

Unité 4. *Technologies et théories*

- 4.1. Le bloc de la *praxis* en question
- 4.2. Entre technique et technologie
- 4.3. Pénuries technologiques
- 4.4. Variations technologiques : un exemple
- 4.5. Au-delà de la technologie, la théorie

Unité 5. *La diffusion des praxéologies : premiers jalons*

- 5.1. Le destin des praxéologies : transpositions institutionnelles
- 5.2. Diffusion et dissociation praxéologiques

- 5.3. La « mise en texte » des praxéologies
- 5.4. « Savoir par cœur »
- 5.5. Apprendre et savoir dans les civilisations de l'oralité
- 5.6. Texte du savoir et « excription » praxéologique

a) La question que *X* se posera est alors : « Par delà le titre même de l'unité considérée, puis-je préciser ce que contient chacune des sections composant cette unité ? » La table des matières précédentes peut alors être *annotée*, comme le montre l'exemple ci-après.

Cours de didactique fondamentale	Notes
...	...
Unité 4. Technologies et théories	Cette unité introduit les notions de <u>technologie</u> (θ), de <u>théorie</u> (Θ) et de <u>bloc du logos</u> ($[\theta / \Theta]$). Au début, on ne dispose encore que des notions de <u>type de tâches</u> (T) et de <u>technique</u> (τ), liées entre elles par la notion de <u>bloc de la praxis</u> ou <u>savoir-faire</u> ($[T / \tau]$). En fin d'unité, on arrive à l'introduction formelle de la notion de <u>praxéologie</u> ($[T / \tau / \theta / \Theta]$).
4.1. Le bloc de la <i>praxis</i> en question	...
4.2. Entre technique et technologie	...
4.3. Pénuries technologiques	...
4.4. Variations technologiques : un exemple	Sur l'exemple de la mayonnaise, étude de plusieurs exposés (recettes, etc.) allant du plus « traditionnel » au plus « scientifique » (Hervé This) : mise en évidence de variations praxéologiques affectant tant la technique que la technologie ou la théorie. Cette dernière apparaît clairement comme « pesante » sur les niveaux technique et technologique.
4.5. Au-delà de la technologie, la théorie	...
...	...

b) Cela fait, on peut utiliser les questions de cours proposées pour mettre à l'épreuve la connaissance que l'on a du cours et en guider l'étude. S'agissant du contenu de la section 4.4, par exemple, une unique question de cours est proposée (ci-après).

QC₆₂. Quelles variations techniques, technologiques et théoriques peut-on mettre en évidence entre les divers exposés existants sur la manière de fabriquer une sauce mayonnaise, en fonction notamment des conditions et contraintes sous lesquelles ces exposés sont construits et doivent être diffusés ? En particulier, en quoi la « gastronomie moléculaire » permet-elle de mettre en évidence le caractère partiellement artificiel de certaines indications traditionnelles en la matière ? Quelle ingrédient essentiel met-elle en évidence ? Par contraste avec une théorie « scientifique », comment se constituent et se structurent les théories traditionnelles à ce propos ?

On devra donc s'assurer que l'on peut affronter cette question avec succès ou se rendre capable de le faire.

6.2.3. Un autre geste d'étude d'un exposé *E* est celui qui, précisément, permet de passer du texte du cours de didactique fondamentale aux « questions de cours » : il s'agit de mettre *E* « *en questions* ». On illustrera cette technique sur le début de l'exposé relatif à « La méthode des captures-recaptures » examiné dans l'Unité 5.

<i>La méthode des captures-recaptures</i>	Questions
Compte tenu de l'impossibilité d'effectuer un recensement direct, et/ou un piégeage exhaustif, les écologistes utilisent la méthode indirecte du « Lincoln index » dont les premiers éléments ont été fixés par Petersen en 1893 dans le cadre d'un recensement de poissons. Il s'agit d'étudier une population bien définie (une espèce animale par exemple) fixée sur un territoire aux limites bien déterminées supposées infranchissables. Cette méthode qui fait appel à la statistique est particulièrement intéressante à discuter. Cette procédure est dite de <i>capture et recapture</i> . Elle consiste à capturer un premier lot d'animaux, de les marquer, puis de les relâcher. Un peu plus tard, on effectue une seconde capture. Celle-ci comprendra des animaux déjà marqués, et d'autres capturés pour la première fois. La proportion d'animaux marqués dans le second échantillon peut nous renseigner sur la proportion d'animaux marqués la première fois au sein de la population totale. Telle est l'idée directrice. Voyons, à l'aide d'un exemple, les choses de plus près.	Q₁. Quel est le but de la méthode des captures-recaptures ? Cette méthode est-elle récente ? Q₂. Sous quelles conditions la méthode des captures-recaptures est-elle applicable ? À quels types de populations s'applique-t-elle ? Quels outils praxéologiques mobilise-t-elle ? Q₃. Quelle est l'idée directrice de la méthode des captures-recaptures ? Que conduit-elle à calculer ? Pourquoi ?

6.3. Vers un schéma didactique général

6.3.1. L'accès aux praxéologies correspondant à ♥ se fait par le truchement d'exposés E dans lesquels ces praxéologies ont été *inscrites* et dont X , dirigé et aidé par Y , doit les *excrire* pour les faire vivre « concrètement », dans la réalité institutionnelle, comme praxéologies.

a) Ce travail d'excription suppose l'explicitation de questions Q auxquelles E apporterait une réponse R (ou une fragment de réponse R). Dans le cas de la méthode des captures-recaptures, à la question Q_3 ci-dessus, le texte examiné apporte ainsi une réponse R_3 que l'on peut *formuler* ainsi (en empruntant au texte).

L'idée directrice est de capturer un premier lot d'animaux, de les marquer, puis de les relâcher. Un peu plus tard, on effectue une seconde capture. Celle-ci comprendra des animaux déjà marqués, et d'autres capturés pour la première fois. La proportion d'animaux marqués dans le second échantillon peut nous renseigner sur la proportion d'animaux marqués la première fois au sein de la population totale.

Bien entendu, la réponse R_3 n'est pas ce fragment (reconstitué) de *texte* : c'est une *praxéologie*, celle que mettent en œuvre les spécialistes qui pratiquent ladite méthode de captures-recaptures.

b) Le processus décrit ici, réalisé au sein du système $S(X; Y; ♥_E)$, peut être schématisé dans sa généralité de la façon suivante :

$$E \Rightarrow \{ Q_1; Q_2; \dots; Q_\ell \} \Rightarrow \{ R_1; R_2; \dots; R_\ell \}.$$

On écrit de E des questions Q_i (flèche $\Rightarrow$), lesquelles aident à écrire les réponses R_i portées par E (flèche $\Rightarrow$).

b) C'est cela qui, pour l'essentiel, peut se passer dans une classe scolaire *ordinaire*. Dans la page d'un manuel de géométrie de 1921 reproduite dans l'Unité 3, intitulée « Cubage des bois », est ainsi *inscrite* une praxéologie (inadéquate) qui semble bien n'avoir pas été véritablement *excrite* par les utilisateurs du manuel, y compris les professeurs, ce qu'on peut noter de façon suggestive ainsi (E désigne la page reproduite) :

$$E \Rightarrow \{ Q \} \Rightarrow \{ R \}.$$

Bien entendu, la question Q est « Comment cuber un “bois” [une grume] ? ». La réponse R , elle, reste « prise » dans le texte du manuel.

c) L'exemple précédent constitue sans doute une exception : le texte du manuel, le cours du professeur, la recette trouvée sur Internet ou dans un magazine recèlent des praxéologies que l'on va écrire en les faisant apparaître comme des réponses R à des questions Q : telle est la règle générale. C'est ainsi par exemple que, à partir de la fiche sur la comparaison des décimaux, vue dans l'Unité 5, se construira dans la classe de 6^e qui l'utilise une praxéologie R

qui sera normalement intégrée à l'équipement de la classe et qui permettra aux élèves, sauf exception, de comparer sans erreur les nombres 7,2 et 7,13 par exemple.

6.3.2. Comment aider plus encore le processus d'excription praxéologique d'un exposé E que doit réaliser X ? Une technique contemporaine est la suivante : Y (ou l'institution mandante) propose, non un exposé E « tout fait », mais une question Q , que X va alors étudier Q (sous la direction de Y) pour lui apporter une réponse R , ce qu'on notera ainsi :

$$S(X ; Y ; Q) \mapsto R.$$

Une fois élaborée, la réponse R sera inscrite en un texte E , qui sera « l'exposé de référence » pour le système didactique considéré, qu'il s'agisse d'une classe scolaire, d'une équipe de recherche, d'un binôme directeur de mémoire/étudiant, etc.

a) Nous examinerons ici un premier exemple, celui d'une classe sud-africaine d'élèves de 15-16 ans (*grade 10*), lors d'une séance de mathématiques dont le contenu des échanges oraux entre professeur et élèves nous est connu sur une période d'un quart d'heure environ. Le sigle OHP utilisé ci-après désigne le rétroprojecteur, *OverHead Projector* en anglais. Y est désigné par l'abréviation Tr (pour *teacher*) ; les membres de X , soit x_1, x_2 , etc., sont désignés par les abréviations Lr1, Lr2, etc. (avec Lr pour *learner*).

In the first seven minutes of the class, the Teacher (Tr), standing in the front of the class, puts the following problem onto the OHP, explains what the class is to do, and they spend this time working on the problem:

How many diagonals are there in a 700-sided polygon?

Tr: I want you to take out a single page quickly. Single page and for the next five minutes no discussion. I want you to think about how would you possibly solve this problem? The question is, for those of you who can't see at the back, "How many diagonals are there in a 700-sided polygon?"

The teacher moves to side of class to observe learners (Lr) who attempt to garner more specific guidance from the teacher, to which he eventually responds:

Tr: Like I said, it is entirely up to you. Whatever you want to do, try and solve the problem. If you want to draw it, draw it. If you want to calculate something do it, whatever you want to do ... You can do as you please.

After seven minutes, the Teacher calls the class' attention.

00:07 – 00:14

Tr: Ok! Guys, time's up. Five minutes is over. Who of you thinks they solved the problem? One, two, three, four, five, six.

Lr 1: I just divided 700 by 2.

Tr: You just divided 700 by 2. (Coughs).

Lr 1: Sir, one of the side's have, like a corner. Yes ... (inaudible), because of the diagonals. Therefore two of the sides makes like a corner. So I just divided by two ... (Inaudible).

Tr: So you just divide the 700 by 2. And what do you base that on? So what do you base that on because there's 700 sides. So how many corners will there be if there's, 700 sides?

Lr 1: Ya, there's 700 corners.

Tr: Will there be 700 sides if there's 700 corners?

Lr 1: No, there's will be 350 corners.

Tr: Why will there be 350 corners?

Learner1 attempts to explain shifting between 700 sides so 700 corners and 350 diagonals to 350 corners and so 175 diagonals, without being able to justify further than the need to divide by two to get diagonals.

Tr: Let's hear somebody else opinion.

Lr2: Sir what I've done sir is ... First 700 is too many sides to draw. So if there is four sides how will I do that sir? Then I figure that the four sides must be divided by two. Four divided by two equals two diagonals. So take 700, divide by two will give you the answer. So that's the answer I got.

Tr: So you say that, there's too many sides to draw. If I can just hear you clearly; ... that 700 sides are too many sides, too big a polygon to draw. Let me get it clear. So you took a smaller polygon of four sides and drew the diagonals in there. So how many diagonals you get?

Lr2: In a four sided shape sir, I got two.

Tr: Two. So you deduced from that one example that you should divide the 700 by two as well? So you only went as far as a 4 sided shape? You didn't test anything else.

Lr2: Yes, I don't want to confuse myself.

Tr: So you don't want to confuse yourself. So you're happy with that solution, having tested only one polygon?

Lr2: Inaudible response.

Tr: Ok! You say that you have another solution. (Pointing to Lr3). Let's hear.

Lr3: Sir you said that diagonals are line that connect non-consecutive lines. ... Well we had a discussion about diagonals and we came to a conclusion. ... It has to have 700 points. Now a polygon is an enclosed shape, so it has to have 700 corners... Every shape that has 700 lines that is closed has the number of corners equal to the number of lines that there is.

Tr: Learner1, what do you think about that?

Interaction over the number of sides and corners continues and then

Lr1: I just said he is right.

Tr: He is right about the fact that the number of sides and the number of corners should be the same. Can you justify?

Lr1: I just think it's right. ... It makes sense.

Tr: What about you Lr4? You said you agree.

Lr4: He makes sense. ... He proved it. ... He used a square.

Tr: He used a square? Are you convinced by using a square that he is right.

Lr5: But sir, here on my page I also did the same thing. I made a 6-sided shape and saw the same thing. Because a six thing has six corners and has three diagonals.

Lr1: So what about a 5-sided shape? Then sir.

Tr: What about a 5-sided shape? You think it would have 5 corners? How many diagonals?

Interaction continues, with Tr first admonishing learners to listen to each other as they all attempt to talk at the same time, and during which time he hears (this is not audible on the

videotape because of the co-incident talking) that there is confusion between the words polygon and pentagon. Tr intervenes to say:

Tr: Ok! Let's just listen to what they got to say.

L5: No sir, we just saying in the diagonals of a pentagon there's 5 – sides. They give you, us 5 – sides and five diagonals. (Interrupted by other learners).

Tr: Ok! So now I am hearing that some people are not too sure about what is a polygon. ... Is a pentagon a polygon?

a) La question Q_0 étudiée est donc celle-ci : « Combien de diagonales possède un polygone à 700 côtés ? » Le professeur communique cette question, dont l'énoncé figure sur un transparent, en le projetant sur un écran (détail qui relève de l'organisation *pédagogique*). Cela noté, la première observation à faire est peut-être que cette question ne semble pas avoir été *motivée* : pour quelle raison Y demande-t-il à X de l'étudier, cela – apparemment – n'est pas connu ni de X ni de l'observateur. On dira d'une telle question qu'elle apparaît *immotivée*.

b) En dépit du caractère immotivé de Q_0 , comme toujours ou presque les élèves se révèlent *dociles*, qualificatif qui, en français comme en anglais, a deux acceptions non indépendantes mais distinctes, que le *Online Etymology Dictionary* présente ainsi.

1483, from It. or Fr. *docile*, from L. *docilis* “easily taught,” from *docere* “teach” (see *doctor*). Sense of “obedient, submissive” first recorded 1774.

En un premier sens, donc, *docile* signifie « disposé à s'instruire, qui apprend aisément » ; en un second sens, aujourd'hui plus courant, il signifie « qui obéit facilement, qui se laisse diriger » : il s'agit là d'un sens dérivé.

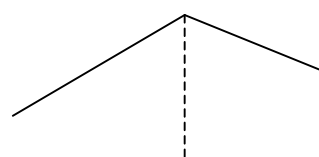
c) Le système didactique peut s'écrire ici : $S(\{ Lr1, \dots, Lrn \} ; Tr ; Q_0)$. Ce qui est frappant dans son fonctionnement (observé durant un quart d'heure, rappelons-le), c'est le manque de *moyens*, de *ressources* pour étudier la question Q_0 . Pour préciser la chose, on va introduire ici une nouvelle notion de didactique.

6.3.3. Le schéma présenté plus haut, doit, d'une façon générale, être enrichi ainsi :

$$[S(X ; Y ; Q) \Rightarrow M] \Rightarrow R.$$

La lettre M désigne ici le *milieu didactique*, c'est-à-dire l'ensemble des ressources mobilisées pour étudier la question Q , produire la réponse R et la *valider*.

a) De quoi est fait le milieu didactique de $S(\{ Lr1, \dots, Lrn \} ; Tr ; Q)$? Il est assez clair que $Lr1$, en dépit de sa difficulté à s'exprimer sur le sujet, a recouru au modèle visuel ci-contre, où l'on aperçoit deux côtés formant un « coin », avec une diagonale (en pointillé).



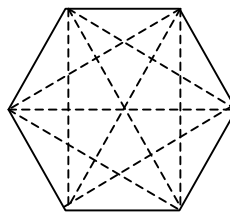
Avant d'interagir avec Tr , $Lr1$ semble admettre comme évident que, dès lors qu'il y a 700 côtés, il y aurait 700 « coins ». Son raisonnement pourrait donc être le suivant (il s'agit là,

bien entendu, d'une reconstruction *conjecturale*) : « À chaque diagonale correspondent deux “coins”. Comme il y a 700 “coins”, il y a *donc* $700/2 = 350$ diagonales. » En outre, cette conclusion est cohérente avec le fait que, dans le cas d'un polygone à 4 côtés, on a bien 2 diagonales (voir ci-dessous, à gauche). On ne saurait donc dire que la réponse de Lr1 a été élaborée *sans* milieu didactique : ce n'est *jamais* le cas.



b) Lr1 aurait pu enrichir le milieu utilisé en considérant un polygone à 5 côtés (un pentagone). En ce cas, dire qu'il y a 5 coins est juste, mais on ne peut plus diviser le nombre de coins par 2... Un essai graphique suggère que le nombre de diagonales est ici égal à 5 (voir ci-dessus, à droite).

c) En désignant le nombre de côtés par la lettre n et le nombre de diagonales par D_n , on peut conclure que $D_4 = 2$ et $D_5 = 5$. Notons aussi que, si le polygone a 3 côtés, c'est-à-dire est un triangle, il n'a pas de diagonale : $D_3 = 0$. Le problème est donc de trouver la valeur de D_{700} . Sur cette voie, on peut penser à chercher une « formule générale » pour D_n en examinant d'autres valeurs de n pour lesquelles un travail graphique adéquat apparaît raisonnable et raisonnablement fiable. Pour $n = 6$, on a ainsi ce que voici.



Comme d'ailleurs dans le cas où $n = 5$, on a intérêt à numéroter les diagonales pour être plus sûr qu'on a bien $D_6 = 9$. La stratégie employée ici est classique en mathématiques.

6.3.4. Pour avancer, à nouveau, une notion doit être introduite : celle de *milieu* ou *système adidactique*. On appelle ainsi un fragment du milieu didactique M qui se comporte, *vis-à-vis de la question qu'on lui pose*, comme un fragment de *nature*, c'est-à-dire comme *un système dépourvu d'intention* – intention de plaire ou de déplaire à qui l'interroge, de le tromper ou de lui déciller les yeux, voire de négocier avec lui la « réponse » qu'il va donner, etc.

a) Le dessin d'un quadrilatère constitue un tel système *adidactique* : si l'on pose la question « Combien de diagonales possède un quadrilatère ? », ce dessin répond clairement et sèchement : 2. De la même façon, lorsque $n = 3$, le dessin d'un triangle va répondre : 0.

b) On aura noté que l'examen du cas $n = 4$ réalisé par Lr1 a été également le fait de Lr2, lequel admet qu'il s'en est tenu là, ce que Tr lui reproche explicitement : "So you deduced from that one example that you should divide the 700 by two as well? So you only went as far as a 4 sided shape? You didn't test anything else." La réponse de l'élève est éclairante sur le rapport qu'il entretient aux systèmes adidactiques : "I don't want to confuse myself", répond-il à Tr, « Je ne veux pas m'embrouiller ». Il est clair en effet que la considération du dessin d'un pentagone troublerait la belle conclusion dont il se satisfait. Et c'est d'ailleurs sur la question du polygone à 5 côtés que l'épisode de classe prend fin, sans qu'aucun résultat solide ait été obtenu.

c) Chose plus remarquable : le manque de formation à user de milieux adidactiques (ne serait-ce qu'en étant capables d'en *recevoir* les réponses, au moins lorsqu'elles ne sont pas ambiguës) conduit même Lr5 à un *déni de réalité* puisque, s'agissant d'un hexagone, il affirme : "But sir, here on my page I also did the same thing. I made a 6-sided shape and saw the same thing. Because a six thing has six corners and has three diagonals." Contre toute évidence, un hexagone aurait donc 3 diagonales ! La formule (inexacte) $D_n = \frac{n}{2}$ qui, pour $n = 6$, donne $D_6 = 3$, l'emporte ici sur la simple observation de la réalité...

6.3.5. Un autre événement est digne de remarque : Tr met en doute une affirmation qui va de soi pour les élèves interrogés – le fait qu'un polygone à n côtés posséderait n sommets (que ces élèves appellent des « coins » : l'anglais pour « sommet » est *vertex*, qui fait au pluriel *vertices*). Tr introduit ainsi, obliquement une seconde question, Q_1 , qu'on peut énoncer ainsi : « Un polygone à n côtés a-t-il toujours n sommets ? »

a) On peut dire que $Y = \text{Tr}$ fait là « quelque chose » qui *n'aide pas* $X = \{ \text{Lr1}, \dots, \text{Lrn} \}$ à produire une réponse validée à Q_0 et qui va provoquer une « dérive » du processus didactique, en suscitant au reste des régressions diverses : de la part de Lr1 d'abord, lequel ne sait plus où il en est, du groupe tout entier ensuite, où l'intervention maladroite de Tr semble induire un état de confusion qui conduit certains à hésiter quant à la différence entre *polygone* et *pentagone*.

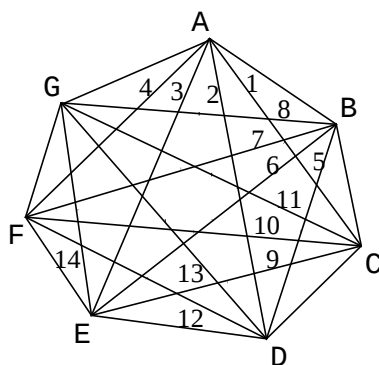
b) Ce que Tr aurait pu faire pour aider positivement X était, non de se constituer comme partenaire de dialogue jouant le rôle de milieu *non adidactique*, mais d'inciter les élèves à aller interroger sans s'émouvoir ces milieux adidactiques que sont (ici) le pentagone et l'hexagone, ce qui leur aurait permis d'aboutir aux résultats *partiels* mentionnés plus haut ($D_3 = 0$, $D_4 = 2$, $D_5 = 5$, $D_6 = 9$) et donc de rejeter la formule conjecturale (et « arrangeante ») $D_n = \frac{n}{2}$.

6.3.6. On doit en ce point s'interroger, d'une façon générale, sur ce que Y peut « se permettre » de faire afin d'aider X à étudier une question Q . En réalité, ce que Y « se permet » n'est rien d'autre, en principe, que ce qu'*on* lui permet, « on » désignant ici l'institution

mandante et la pédagogie qu'elle légitime, mais aussi la société et la civilisation dans lesquelles cette institution est plongée.

a) L'exemple examiné montre que les types d'interventions permises à Y déterminent ce qu'il peut faire *positivement* pour X confronté à Q_0 , mais aussi *négativement*, en éloignant X d'une issue heureuse à cet égard. L'arme est ainsi à double tranchant ; en outre, plus elle est puissante, plus la responsabilité de Y est engagée. Ce sont les prérogatives accordées à Y – prérogatives « professorales », en un temps et un lieu déterminés – qui lui permettent la manœuvre didactique clé : celle consistant à demander le nombre de diagonales d'un polygone à *sept cents* côtés, question apparemment immotivée et arbitraire en laquelle on peut voir pour cela un véritable *abus de pouvoir*.

b) Le nombre n de côtés constitue, dans la situation examinée, ce qu'on nomme une *variable didactique*, dont la valeur peut changer structurellement la situation dans laquelle sont plongés les élèves (et le professeur) : pour $n = 4$ ou 5 ou 6 , voire pour $n = 7$, en effet, il est encore possible de mettre en œuvre la technique qu'on a évoquée, comme on le voit aussi sur le cas d'un *heptagone* (ci-après).



Mais pour $n = 700$, il n'en est plus question, ce que les élèves n'ont pas manqué d'observer. Lr2 déclare ainsi : "Sir what I've done sir is ... First 700 is too many sides to draw." Tr reprend en écho : "So you say that, there's too many sides to draw." Le « saut » de $n = 5$ ou 6 à $n = 700$ est là pour rendre inopérante la technique de détermination de D_n spontanément mobilisée par les élèves pour les petites valeurs de n .

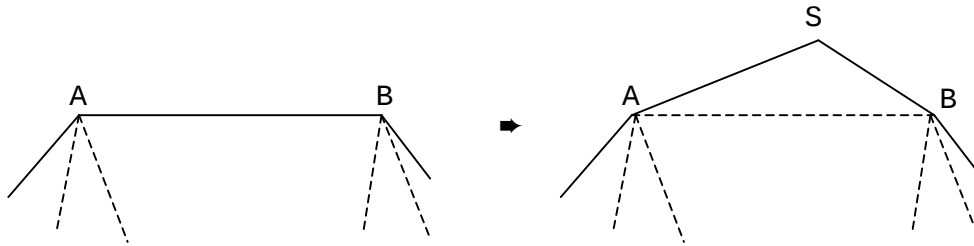
c) Une telle « manipulation » de la variable n a un sens dans le cadre de l'étude de la question « Combien de diagonales possède un polygone à n côtés ? » Mais, redisons-le, elle apparaît ici immotivée : dans quel contexte institutionnel pourrait-on donc imaginer de la voir surgir $n = 700$? Cette question demeure sans réponse, et, en fait, n'est même pas posée.

6.3.7. On aura noté que l'épisode se termine sans que la classe ait sérieusement avancé dans l'étude de Q_0 . On peut alors imaginer ceci : un certain temps ayant passé, on voit cette classe disposer d'un exposé E_0 . On suppose qu'il s'agit de l'exposé que l'on trouvera ci-après (et qui est en vérité un exposé *de fiction*).

Nombre de diagonales d'un polygone (suite)

3. Passer de n à $n + 1$

Que devient le nombre de diagonales quand on passe d'un n -gone à un $(n + 1)$ -gone ? Les schémas ci-après permettent de répondre.



Chaque sommet (tel A ou B) est joint aux $n - 3$ sommets non adjacents par $n - 3$ diagonales. Si l'on ajoute un sommet S entre A et B (par exemple), on rajoute $(n + 1) - 3 = n - 2$ diagonales (celles partant de S), *plus* une diagonale, à savoir l'ancien côté [AB] qui a désormais le statut de diagonale. On a donc : $D_{n+1} = D_n + (n - 2) + 1 = D_n + n - 1$. On obtient donc l'égalité

$$D_{n+1} = D_n + n - 1.$$

4. Une formule générale pour D_n

On observera que la formule précédente permet de retrouver des résultats déjà établis : sachant que $D_3 = 0$, on obtient ainsi les égalités successives suivantes :

$$D_4 = D_3 + 2 = 2 ; D_5 = D_4 + 3 = 5 ; D_6 = D_5 + 4 = 9 ; D_7 = D_6 + 5 = 14 ; \text{etc.}$$

C'est là une remarque qu'on peut mettre en œuvre pour obtenir une formule générale pour D_n , à condition d'écrire les égalités précédentes ainsi :

$$D_4 = D_3 + 2 = 2 ; D_5 = D_4 + 3 = 2 + 3 ; D_6 = D_5 + 4 = 2 + 3 + 4 ; D_7 = 2 + 3 + 4 + 5 ; \text{etc.}$$

On aura plus généralement :

$$D_n = 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 3) + (n - 2).$$

Nous savons (voir la fiche XVII) que l'on a : $1 + 2 + 3 + \dots + (N - 1) + N = \frac{N(N+1)}{2}$. Ici, en ajoutant 1 au début de la somme et en le retranchant au dernier terme, et en posant alors $N = n - 3$, il vient :

$$\begin{aligned} D_n &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 3) + (n - 3) = \frac{(n - 3)(n - 2)}{2} + (n - 3) \\ &= \frac{n - 3}{2} [(n - 2) + 2] = \frac{n - 3}{2} \times n = \frac{(n - 3)n}{2}. \end{aligned}$$

On a ainsi : $D_n = \frac{(n - 3)n}{2}$.

5. Retour au problème initial

Le problème initial était celui du nombre de diagonales d'un polygone à 700 côtés. On a donc :

$$D_{700} = \frac{(700 - 3) \times 700}{2} = 697 \times 350 = 243\,950.$$

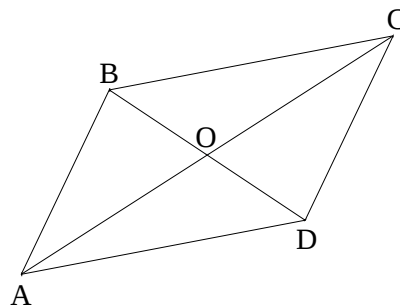
On aura de même pour un dodécagone, $D_{12} = 9 \times 6 = 54$.

a) On peut envisager que ce soit *la classe elle-même* qui, sous la direction et avec l'aide de son professeur, ait élaboré cette fiche de synthèse. Par contraste, on peut imaginer aussi qu'il s'agisse d'une fiche extraite d'un manuel, que Tr aurait « apporté » à la classe. Dans les deux cas, il conviendra que la classe *étudie* E_0 , même si elle l'a construite très activement par elle-même. Mais on imagine que la situation sera très différente selon que l'on est dans ce cas ou que la fiche E_0 est apportée toute faite par Tr, fût-ce après avoir constaté l'échec de la classe à avancer par ses propres moyens vers une réponse R_0 validée.

b) Nous sommes rendus, ici, à un carrefour important du point de vue de *l'organisation de l'étude*. Avant de nous y arrêter, nous examinerons une autre observation de classe.

6.4. AER et synthèses

6.4.1. En classe de 5^e, les élèves doivent étudier, en mathématiques, la propriété θ_1 du parallélogramme que voici : dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu. En d'autres termes, sur la figure ci-après, on a $AO = OC$ et $BO = OD$.



a) C'est se référer là à un certain « texte du savoir » traditionnel, qui tient en peu de mots, et dont le programme officiel de la classe de 5^e fournit un résumé (sinon un exposé en bonne et due forme) : on y lit en effet que les élèves devront « connaître et utiliser une définition du parallélogramme et des propriétés relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles » et que, par des « travaux » adaptés, les classes devront parvenir à « l'énoncé et l'utilisation de propriétés caractéristiques du parallélogramme », en veillant « à toujours formuler ces propriétés à l'aide d'énoncés séparés » (ce n'est en principe qu'en classe de seconde qu'on manipule des CNS, des conditions nécessaires *et* suffisantes). On voit en passant que ce n'est pas seulement la propriété θ_1 qui est « au programme », mais aussi sa réciproque : si, dans un

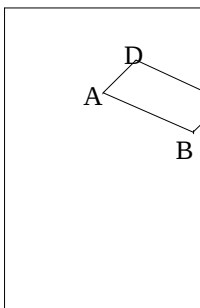
quadrilatère ABCD, les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu, alors ABCD est un *parallélogramme*.

b) Cette situation, classique dans l'univers didactique scolaire d'aujourd'hui, suppose que l'on « mette en questions » non pas un exposé concret, mais un « texte du savoir » dont des versions concrètes sont déposées par exemple dans les manuels. Cela conduit à une situation un peu différente de celle évoquée à propos d'un exposé E mis au cœur du travail d'un système didactique $S(X; Y; \heartsuit_E)$: ici, le système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$, où $\heartsuit$ est désigné (non sans imprécisions) par le programme de la classe (on sait par exemple que $\heartsuit \supset \theta_1$), devra élaborer son propre exposé de référence E . Si Y ne l'apporte pas « tout fait », la construction de E devra se faire à partir d'une *mise en questions* du programme – de $\heartsuit$ – à la charge de $S(X; Y; \heartsuit)$ et, en général, à la charge de Y plus particulièrement. Nous verrons ainsi, un peu plus loin, une professeure choisir pour question « inaugurale » de l'étude de la propriété θ_1 , ou plutôt d'une praxéologie mathématique à préciser que nous noterons

$$O_{\theta_1} = [\dots / \dots / \theta_1 / \dots],$$

la question Q_T correspondant au type de tâches T suivant.

T . Tracer la diagonale [AC] d'un parallélogramme ABCD dont le sommet C ne « tombe » pas dans la feuille où on a voulu le dessiner.



c) D'une façon générale, ayant à étudier $\heartsuit$, X et Y se trouvent – dans des positions institutionnelles différentes – devant une tâche qui relève du *type de tâches didactique fondamentale* $\Delta_{\heartsuit}$, « Étudier/diriger l'étude de $\heartsuit$ ». À cette interrogation portant sur le type de tâches $\Delta_{\heartsuit}$ doit répondre une certaine « organisation praxéologique » formée autour du type de tâches $\Delta_{\heartsuit}$ et qu'on nommera de façon générique une *organisation didactique* (relative à $\heartsuit$). Dans le cas que nous suivrons ici, le premier geste technique qui permet de réaliser la tâche $\Delta_{\heartsuit}$ – ou, plus précisément, Δ_{θ_1} – a été de proposer à X , à titre de problème à résoudre, la question Q_T .

d) Supposons un instant, ici, l'étude de Q_T accomplie. Voici alors ce que pourrait être un extrait de « l'exposé de référence » (pour $S(X; Y; Q_T)$ auquel pourrait avoir abouti le travail de $S(X; Y; Q_T)$: cet exposé est constitué par la *synthèse* du travail réalisé par X avec l'aide et sous la direction de Y sur la question Q_T .

Synthèse : Parallélogramme
(Dernière mise à jour : 21-11-08)

III. Diagonales du parallélogramme (1)

1) Type de tâches

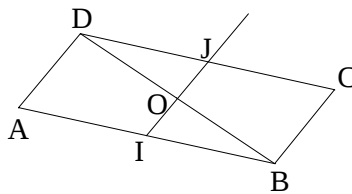
Tracer la diagonale [AC] d'un parallélogramme ABCD tracé sur une feuille mais dont le sommet C « tombe » en-dehors de la feuille.

2) Technique

- Par une technique quelconque (éventuellement *approchée*), marquer le milieu O de [BD].
- À l'aide de la règle, tracer la partie de la demi-droite [AO) située sur la feuille.

3) Justification de la technique (technologie)

- La technique se justifie par la propriété suivante :
 θ_0 . Dans un parallélogramme [ABCD], la diagonale [AC] passe par le milieu O de la diagonale [BD].
- La propriété θ_0 se déduit aisément de la propriété suivante :
 θ_1 . Dans un parallélogramme [ABCD], les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu O.
- Cette propriété peut être établie *par l'expérience* graphique et confirmée par l'emploi d'un logiciel de géométrie dynamique.
- θ_1 peut également *se déduire* de propriétés bien connues (théorèmes des milieux), comme suit.
Dans la figure ci-après, ABCD est un parallélogramme, I est le milieu de [AB] et (IJ) est parallèle à (BC).



D'après le 2^e théorème des milieux, dans le triangle ABD, (IJ) coupe [BD] en son milieu O ; par suite, dans le triangle BDC la droite (OJ) coupe [CD] en son milieu, J. D'après le 3^e théorème des milieux, dans le triangle ABD, on a $IO = AD/2$ et, dans le triangle BDC, on a $OJ = BC/2$. Comme $AD = BC$, on a $IO = OJ$: O est donc le milieu de [IJ] et on en conclut que la diagonale [BD] passe par le milieu de [IJ], qui est aussi le milieu de [BD]. On montre de même que la diagonale [AC] passe par le milieu de [IJ], O, qui est aussi le milieu de [AC]. Les deux diagonales se coupent donc en leur milieu.

e) En notant désormais θ ce qu'on a noté θ_1 jusqu'ici, on pourra aussi inclure dans $O_\theta \subseteq O_\heartsuit$ d'autres types de tâches T' , pour lesquels par exemple une technique τ' peut être produite et

justifiée à l'aide de la même technologie θ élaborée à propos de T , à des additifs mineurs près. Dans le cas du parallélogramme, ainsi, la classe pourra poursuivre son travail et en inscrire le fruit dans la synthèse suivante.

Collège Georges Bouligand

4^e 3 – Mathématiques

Synthèse : Parallélogramme (Dernière mise à jour : 28-11-08)

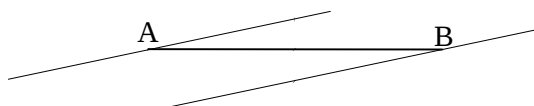
III. Diagonales du parallélogramme (2)

1) Type de tâches

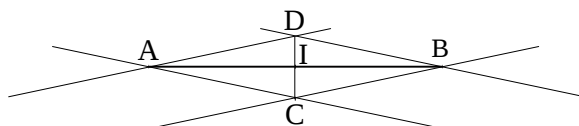
À l'aide d'une règle à deux bords parallèles, marquer le milieu d'un segment $[AB]$.

2) Technique

- Placer la règle de façon que l'un de ses bords passe par A et l'autre par B ; tracer alors les droites correspondant aux bords de la règle (voir la figure).



- En changeant la position de la règle, tracer de même deux parallèles passant l'une par A , l'autre par B : les droites tracées se coupent en A , B et en deux autres points, C et D (voir ci-dessous).



- Marquer le point I , intersection des droites (AB) et (CD) : I est le milieu de $[AB]$ (voir ci-dessus).

3) Justification de la technique (technologie)

- La technique se justifie par la propriété suivante :

θ . Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.

- Par construction, le quadrilatère $ACBD$ est un parallélogramme (voir la définition). D'après θ , donc, $[AB]$ et $[CD]$ se coupent en leur milieu I : I est donc le milieu de $[AB]$.

Dans le cas précédent, l'organisation (praxéologique) mathématique construite se formalisera ainsi : $O_{\heartsuit} = [T, T' / \tau, \tau' / \theta / \Theta]$. Cette organisation mathématique comporte deux types de tâches, avec, pour chacune d'entre elles, une technique appropriée. Elle pourrait en comporter plusieurs autres encore, tout en étant présentée comme la praxéologie (parmi d'autres possibles) explicitant l'enjeu didactique $\heartsuit$. (On parle de praxéologie *ponctuelle* lorsqu'une

praxéologie ne contient qu'un *type* de tâches, et de praxéologie *locale* lorsque, comme dans le cas précédent, elle en contient *plusieurs* justifiées par la *même* technologie.)

6.4.2. Les « travaux » dont parle le programme de 5^e cité plus haut correspondent à ce que nous nommerons ici des *activités d'étude et de recherche*, des AER.

a) Divers textes publiés par le ministère de l'Éducation nationale, désignant ces AER sous le simple nom d'*activité*, en esquissent les contours, tel par exemple cet extrait du programme de 1996 pour la classe de 6^e.

Les activités choisies doivent :

- permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne donner que des consignes très simples et n'exiger que les connaissances solidement acquises par tous ;
- créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;
- rendre possible la mise en jeu des outils prévus ;
- fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.

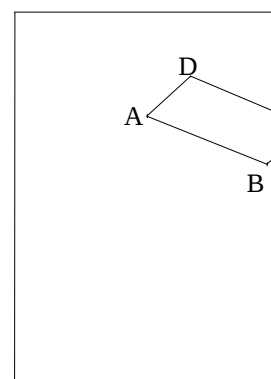
b) L'aboutissement d'une AER, c'est un *exposé de référence pour la classe* qu'on nommera la *synthèse*, ce dont nous avons déjà vu des exemples. À ce propos, le texte ministériel déjà cité à propos des activités indique ceci.

[Les AER] nécessitent une synthèse, brève, qui porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître, mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu.

De la même façon, le programme de seconde en vigueur jusqu'à la rentrée 2000 précisait ceci.

La *synthèse*, qui constitue le cours proprement dit, doit être brève ; elle porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître et savoir utiliser, mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu.

c) Tout cela noté, nous nous référerons dans ce qui suit à une séance observée dans une classe de 5^e dont la professeure a choisi de placer les élèves dans la situation déjà évoquée : il s'agit pour eux d'effectuer la tâche *t* consistant à tracer la diagonale [AC] d'un parallélogramme ABCD dont, en fait, le sommet C ne « tombe » pas dans la feuille où on a voulu le dessiner (voir ci-contre). L'idée derrière ce choix est de faire émerger la technique τ_T consistant à placer le milieu O de la diagonale [BD] (ce que l'on peut faire sans sortir de la feuille), puis à tracer la partie de la demi-droite [AO] située sur la feuille. La justification de cette technique se trouve dans

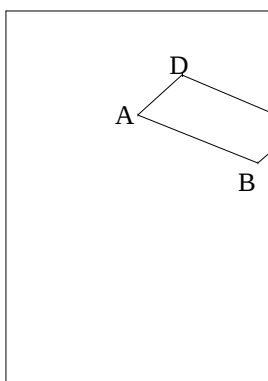


la propriété θ qu'il s'agit précisément de faire apparaître. Les élèves découvriront-ils θ comme clé technologique du succès technique ? Ne « risquent »-ils pas de proposer une autre technique justifiable avec les « outils » dont ils disposent d'ores et déjà ?...

6.4.3. De quoi est faite une *organisation didactique* ? Il est possible de répondre en examinant la manière dont elle prend en charge certaines *fonctions* didactiques, dont plusieurs ont été rencontrées jusqu'ici, et qu'on nomme des *moments de l'étude* ou *moments didactiques* : l'usage de « moment » vient ici de ce que, au cours du processus d'étude d'une question, il « arrive un moment » où cette fonction doit, peu ou prou, être assurée. Dans ce qui suit, nous passerons ces moments en revue. Soulignons dès maintenant que l'ordre de présentation retenu ici n'est pas nécessairement celui de la réalisation de ces moments dans la chronique d'un système didactique $S(X ; Y ; \heartsuit)$, où, au demeurant, ils se réalisent en règle générale *en plusieurs épisodes* séparés dans le temps. Comme annoncé, nous illustrerons ces grandes fonctions didactiques en suivant le compte rendu d'observation de la séance d'une classe de 5^e où a été réalisée la situation du « parallélogramme coupé ».

a) Le *premier moment* est le moment *de la première rencontre* avec le type de tâches T . Voici à cet égard le début du compte rendu d'observation. (Pour des raisons d'anonymat, la professeure est partout désignée par la seule lettre P.)

P : « Bon, on passe à l'activité n° 2. Vous pouvez ranger vos exercices. » Un élève distribue la feuille de travail. Une élève s'enquiert de la place à lui donner : « C'est après l'activité 2 ? » P : « Oui... » Puis un élève lit l'énoncé (voir la figure ci-après) : « Le sommet C du parallélogramme ABCD est sorti des limites de la feuille. Tracer la partie visible de la droite (AC). »



En écho, P écrit :

Question : tracer (AC) ?

Elle demande ce que sont, ici, les données. Un élève, sollicité, répond : « ABCD est un parallélogramme. » P : « Tout le monde voit ? » Puis : « Qu'est-ce qu'il faut pour tracer une droite ? » Une élève : « Une droite ? Un compas, un crayon, une gomme. » P : « Laissez de côté les instruments de géométrie. » Un élève intervient, sans succès ; puis une élève trouve : « Des points ! », s'écrit-elle. P : « Combien ? » L'élève : « Deux ! » « Tout le monde est d'accord ? » « Oui... » « Par quels points passe la droite ? » « A et C » « C, on ne peut pas s'en servir.

Comment faire ? » P relance : « Qu'est-ce qu'il faudrait faire ? » Après quelques essais infructueux, la classe dégage la réponse attendue : il faudrait avoir un autre point. P écrit :

Activité 2

Pour tracer (AC), il faut 2 points

Ici, on n'en a qu'un : le point A

Il faudrait trouver un autre point

P : « Ce point, il faudrait qu'il soit comment ? » Elle interroge une élève, qui répond : « Sur la droite (AC). » P approuve et écrit :

Il faudrait trouver un autre point

qui est sur (AC)

Un débat s'ensuit à propos de ce deuxième point : il faut qu'il soit sur la feuille, souligne P, « sinon ça n'a aucun intérêt ». Elle écrit :

qui est sur (AC), et sur

la feuille

P : « Comment on pourrait trouver ce deuxième point ?... Cherchez. Et après on partagera ensemble ce qu'on a fait ! »

Cet exemple rappelle que la *rencontre* avec un problème peut être ratée : on peut passer à côté du problème. Ici, la professeure passe un certain temps à aider les élèves à s'en saisir : elle travaille à ce qu'on nomme la *dévolution* du problème. On notera par ailleurs le dispositif consistant à expliciter au tableau les plus petites avancées dans l'étude du problème ainsi dévolu aux élèves.

b) Le *deuxième moment* est le moment d'*exploration* du type de tâches *T* et d'*émergence de la technique* τ . Voici, à cet égard, la suite du compte rendu.

Il est 11 h 32. Les élèves travaillent en silence. P circule lentement. Peu à peu des élèves se manifestent auprès de P. Un élève dit à voix basse : « Ça y est, j'ai trouvé ! J'ai trouvé ! » P s'adresse bientôt à la classe : « Bon, on va partager les solutions. » Elle sollicite un élève : « Explique-nous ce que tu as fait. » L'élève a... ajouté une feuille pour tracer le parallélogramme. Une élève, interrogée, va droit au but : « On trace le segment [DB], on prend le milieu, on le nomme, et après on trace (AI), si I est le milieu... » Plusieurs ont trouvé cette solution. Une élève a fait comme le premier élève interrogé. Un autre élève parle de l'angle $\widehat{DAB}$. P : « Mais où le tracer l'angle $\widehat{BCD}$? » Un élève encore propose une tentative qui n'aboutit pas. Un autre veut faire la symétrie par rapport à (AD). P indique qu'on verra cette idée demain : pour le moment, on examine la solution par le milieu de [DB]. Après un court dialogue à ce sujet, P écrit :

Les diagonales [AC] et [DB] se coupent,

en un point O

P : « Il se balade sur le segment ? Il est où ? » « Au milieu », répond une voix. Un autre élève intervient ; il a compris la solution, mais il semble qu'il veuille « placer le point C », à partir de

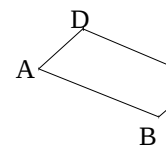
A et O. P fait reformuler le problème : il s'agit de tracer la droite (AC), pas le point C. Un élève encore parle de « trouver où est le point C ». P : « Est-ce que c'est ça le problème ? » Des élèves en chœur : « Non ! » Mais certains semblent avoir un peu de mal à l'entendre.

La recherche par les élèves d'une solution au problème posé – solution qui consiste d'abord en une technique τ pour accomplir les tâches du type T – n'a pas été observée (il est, au reste, délicat de le faire). Seule la *mise en commun* des résultats obtenus, impulsée par la professeure, l'est. Elle révèle des trouvailles multiples de la part des élèves :

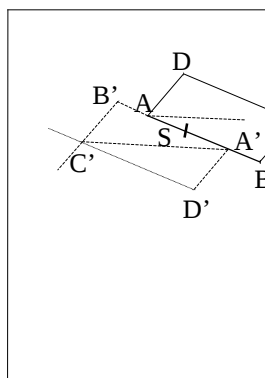
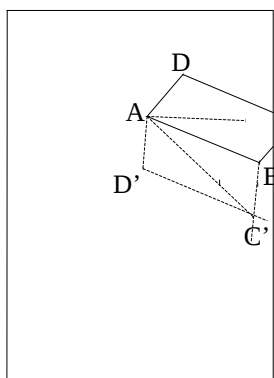
1) la manœuvre consistant à « rajouter une feuille », qui peut permettre de résoudre le problème *en pratique*, ne satisfait pas aux contraintes implicitement imposées : tracer la diagonale demandée en restant « dans la feuille » et à l'aide des seuls instruments de tracé usuels ;

2) la solution attendue est bien présente, à plusieurs exemplaires (« On trace le segment [DB], on prend le milieu, on le nomme, et après on trace (AI), si I est le milieu... »), et cela bien que la propriété des diagonales de se couper en leur milieu *ne soit pas connue préalablement des élèves* (ils croient la découvrir en s'efforçant de résoudre le problème étudié, mais n'en ont pas encore de preuve formelle) ;

3) Un autre essai de résolution (par des considérations angulaires : il est question de l'angle $\widehat{DAB}$: voir ci-contre) est proposé mais est aussitôt abandonné, sans examen poussé ;



4) une autre solution est avancée : faire la symétrie par rapport à (AD) (afin de ramener le parallélogramme dans la feuille), tracer alors la diagonale du parallélogramme obtenu par symétrie, puis refaire la même symétrie pour se ramener au parallélogramme donné : on a représenté ci-après l'emploi d'une symétrie par rapport à la droite (AB) (à gauche) et aussi l'emploi (non évoqué) d'une symétrie par rapport à un point S « bien choisi » (à droite) ; l'étude de la solution suggérée n'est pas rejetée mais différée (elle sera effectivement menée à bien ultérieurement).



La fin de l'épisode rapporté plus haut montre que le *moment de la première rencontre* se poursuit ici : un élève s'est mis en tête qu'il fallait trouver le point C, alors même qu'il s'agit de dissocier le tracé de [AC) de la connaissance *préalable* du point C. Mais « la classe » a avancé : elle rejette son point de vue sans autre forme de procès.

c) Le *troisième moment* est le moment *technologico-théorique*, qui voit la création (ou l'identification) du bloc $[\theta / \Theta]$. C'est ce moment-là qu'a amorcé, *motu proprio*, la professeure à la fin de l'épisode précédent.

... P écrit :

Les diagonales [AC] et [DB] se coupent,
en un point O

P : « Il se balade sur le segment ? Il est où ? » « Au milieu », répond une voix.

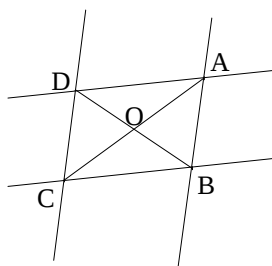
Voici alors la suite du compte rendu.

P : « Je vous propose d'expérimenter à l'ordinateur pour voir si on a bien les diagonales qui se coupent en leur milieu. » P projette au tableau l'écran d'un ordinateur portable et demande à un élève d'aller écrire au tableau en même temps. L'élève note :

Avec le logiciel Cabri-géomètre

On a tracé un parallélogramme ABCD

Une élève se plaint que c'est écrit « trop petit ». P fait apparaître deux couples de parallèles, « des bandes », disent les élèves. Elle trace les diagonales, nomme O leur intersection.



« Il y a une fonction dans l'ordinateur qui permet de mesurer les distances », dit P. Un élève précise : on mesure AO, etc. Les distances mesurées apparaissent en projection sur le tableau. Échange pour savoir si O est bien le milieu de [BD] : oui ! Ensuite, on passe à AO et OC, qui sont eux aussi trouvés égaux. Conclusion : dans ce parallélogramme, O est le milieu des deux diagonales. P précise : « On peut changer les droites avec ce logiciel. » Elle sollicite un élève qui va à l'ordinateur pour faire bouger (AD) et (AB) : il y parvient après un minimum d'hésitations. Les distances affichées restent égales entre elles ! Les élèves : « L'autre droite ! L'autre bande ! » L'élève le fait, fort bien. Pendant ce temps, l'élève au tableau a écrit :

On a bougé les diagonales AC et BD

On mesure BO et OD pour savoir

Si O est le milieu puis on fait pareil
avec AO et OC

On a bougé les droites et on

remarque que O est bien le milieu

Un élève s'étonne que les diagonales n'aient pas la même longueur. Une élève affirme : « C'est que dans les carrés ! » P prend acte du propos de l'élève mais ajoute qu'on verra, que là on voit que ce n'est pas pareil... L'élève au tableau a écrit :

remarque que O est bien le milieu des segments

DB et AC

P corrige les notations fautives. Puis elle demande à un élève de formuler la propriété étudiée, ce qu'il fait : « Les diagonales se coupent en leur milieu. » Elle ajoute : « On pourrait le démontrer, mais c'est un peu long. Donc on va l'admettre. » Elle écrit :

Propriété (admise) : si

alors

P : « Qu'est-ce que je mets après le "si" ? » Un élève se lance ; des élèves semblent rejeter sa formulation. P, finalement, conclut :

Propriété (admise) : si un quadrilatère est un

parallélogramme alors ses diagonales

se coupent en leur milieu

Le travail de justification de l'assertion notée θ_1 plus haut est ici uniquement « expérimental ». À bien des égards, il est exemplaire, notamment par la part qu'y prennent des élèves et « la classe ». Le résultat (technologique) qui en découle peut s'énoncer ainsi : « L'expérience montre que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. » Un élément *théorique* sous-jacent – ici comme ailleurs en géométrie « élémentaire » – est que les propriétés d'une figure *sont indépendantes de sa taille* (et de sa position dans l'espace), en sorte qu'il suffit de procéder à l'expérimentation sur des figures qui peuvent être tracées à l'intérieur d'une feuille de papier (ou affichées à l'écran d'un ordinateur).

d) Le *quatrième moment* est le moment *du travail de l'organisation praxéologique* créée (ou en cours de création), où *l'on fait travailler* les éléments praxéologiques élaborés pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on *travaille sa propre maîtrise* de cette organisation praxéologique, en particulier de la technique τ élaborée.

e) Le *cinquième moment* est le moment *de l'institutionnalisation*, où l'on *met en forme* l'organisation praxéologique [$T / \tau / \theta / \Theta$] (ou [$T, T', T'' \dots / \tau, \tau', \tau'' \dots / \theta / \Theta$]) en précisant chacun de ses composants, et en « l'intégrant » à l'organisation praxéologique éventuellement déjà institutionnalisée.

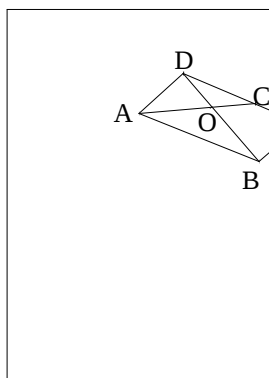
f) Le *sixième moment* est le moment *de l'évaluation*, où l'on évalue sa maîtrise de l'organisation praxéologique créée, mais aussi où *l'on évalue cette organisation praxéologique elle-même*, c'est-à-dire où l'on tente d'estimer la *valeur* que l'on peut attribuer à l'une et à l'autre dans la perspective d'un certain *projet* – plus vaste – d'élaboration praxéologique. On soulignera donc que, à l'instar des autres moments didactiques, l'évaluation *n'est pas* un artefact scolaire, mais participe *de l'activité humaine en général*, où

qu'elle prenne place. Qu'est-ce que cela *vaut* pour ce qu'on *veut en faire* ? Telle est la question cardinale à cet égard, à tous propos et en tout lieu.

6.4.4. Une AER comme celle que pilote P prend en charge normalement *les trois premiers moments didactiques*. Toutefois, les autres moments peuvent ne pas en être entièrement absents. Dans la séance en classe que nous observons, ainsi, comment peut-on situer, dans *l'espace à six dimensions* que définissent les six moments didactiques, la suite des épisodes examinés jusqu'ici ? Voici le compte rendu de la fin de l'épisode (et de la séance).

Il est 11 h 55. P : « Quelqu'un peut résumer ce qu'était le problème et ce qu'on a fait pour le résoudre ? » Un élève : « C'était trouver le point C » Non ! Un élève qui avait fait cette erreur rectifie : « C'est tracer (AC). » Une élève précise la technique pour ce faire. P reprend sa formulation puis ajoute : « Je vous laisse tracer la partie visible de la droite (AC). »

Elle circule. Léger brouhaha de travail. L'élève qui avait rectifié l'erreur de son camarade montre son dessin à ses voisins en demandant si c'est ça. « Non, c'est pas ça ! » Il a placé O de façon que (AO) coupe (DC) sur la feuille !



P à l'élève : « Bon, alors, tu vas finir le dessin qui est au tableau ! » Il est midi. L'élève dessine à main levée, fort bien. P enchaîne : « Je vais distribuer la feuille d'exercices... » Elle le fait, aidée par deux élèves. Une élève demande si, pour indiquer que $DO = OB$, on peut mettre les « traits ». P rétorque que « ça ne te montre rien ». L'élève : « Je sais, mais ça permet de voir. » P approuve et place les traits indiquant l'égalité des longueurs en question. Elle poursuit : « Vous sortez votre cahier de textes. » Des élèves protestent : « Demain, on a le test ! » P : « C'est bon ! C'est bon ! » Elle indique qu'il s'agit de travailler la deuxième stratégie proposée, qu'on a laissée de côté :

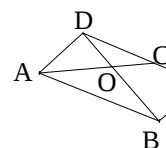
Pour vendredi → tracer le symétrique
de la figure par rapport à (AD)

Un débat s'esquisse : s'agit-il d'une symétrie centrale ? La sonnerie retentit. P poursuit : « Interrogation écrite d'une demi-heure demain... » Les élèves corrigent : « 35 minutes ! » P : « N'oubliez pas votre calculatrice. » La séance est finie.

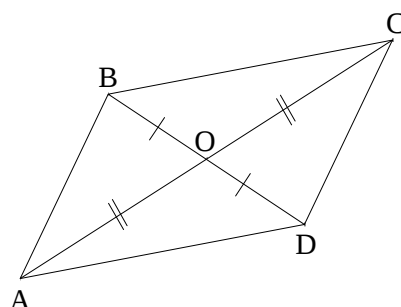
a) On voit que P engage un *bilan* (oral) du travail accompli : c'est là un épisode qui, si peu que ce soit, participe tant du moment de l'institutionnalisation – qu'il prépare – que du moment du travail de l'organisation praxéologique en construction. De ce double point de

vue, on voit d'abord qu'une formulation inexacte du problème continue de circuler : il s'agirait de « trouver » *le point C*. Mais on voit aussi que cette erreur *régresse* – un élève qui l'avait faite quelques minutes auparavant vient corriger un camarade qui se trompe encore. Le fait d'énoncer correctement le problème est évidemment un élément clé du point de vue de l'*institutionnalisation* (qui prendra la forme concrète d'une *synthèse*). Quant au fait de corriger l'erreur quelque peu insistante sur l'énoncé du problème, il relève à l'évidence du moment du *travail* (de l'organisation) praxéologique, nécessaire pour parvenir à une synthèse « valable », c'est-à-dire évaluée positivement.

b) Qu'il y ait travail de la praxéologie mathématique en cours de construction est marqué encore par cette consigne donnée par P : « Je vous laisse tracer la partie visible de la droite (AC). » Cette demande va, au demeurant, susciter un nouveau symptôme de la difficulté déjà relevée (sur laquelle nous allons reviendrons) : un élève situe de force le point C dans le cadre de la feuille (voir la figure ci-contre) !



c) La remarque de l'élève sur « les traits » (voir la figure ci-dessous) et le court dialogue qui s'ensuit avec P (dialogue que celle-ci conclut en faveur de l'élève, dont elle accepte finalement la proposition) relève également du travail praxéologique : le produit du travail, du moins du point de vue de l'élève, voit ainsi sa « valeur » augmenter (il gagne en lisibilité).



d) Le travail à la maison demandé pour le lendemain prépare l'examen en classe de la technique suggérée par un élève consistant à prendre le symétrique du parallélogramme par la symétrie d'axe (AD) : ce travail participe donc du travail de la praxéologie construite, et, implicitement, de son évaluation – la solution validée ici ne serait-elle pas, au fond, inutile ?

6.5. Des AER aux PER

6.5.1. La conception, la construction, l'analyse *a priori*, la réalisation effective, l'analyse *a posteriori* d'une AER n'ont rien de facile. Les différents moments didactiques fournissent à cet égard des repères indispensables. Sur cette question difficile on ne fera ici que quelques remarques, que devrait prolonger – si le temps dévolu à cet enseignement le permettait – une étude approfondie de la *théorie des situations didactiques* (TSD) de Guy Brousseau, sur laquelle on pourra voir le document déjà cité dans l'Unité 1 (*Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*) et encore le texte intitulé *La*

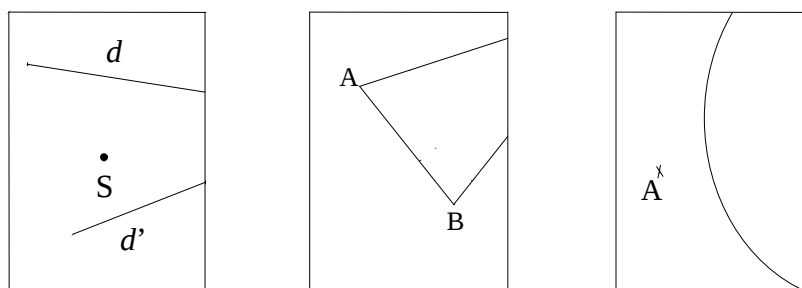
théorie des situations didactiques et que l'on trouvera en ligne ¹. On s'arrêtera ici sur certains développements actuels qu'on peut situer principalement dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD).

a) Partons pour cela d'un symptôme évident dans la séance observée en 5^e : le fait que certains élèves au moins semblent ne pas comprendre le *type* de problèmes dont il s'agit, qui leur impose de procéder à une certaine construction géométrique (avec les instruments habituels : règle, compas, équerre, etc.), mais sous des conditions où certains éléments de la figure, ordinairement « donnés », ne le sont pas (il s'agit en l'espèce du point C, qui « tombe » hors de la feuille). Imaginons, par contraste, que la classe ait maintes fois travaillé sur des problèmes de ce type, dont voici trois exemples.

Problème 1. Sur une feuille, on a tracé deux droites d et d' qui se coupent hors de la feuille (voir ci-dessous, figure de gauche). On voudrait tracer sur la feuille la partie du segment qui joint un point S donné au point d'intersection de d et d' .

Problème 2. Sur une feuille de papier, on a voulu tracer un triangle ABC dont, en fait, le sommet C tombe hors de la feuille (ci-dessous, au centre). Pour une raison non précisée, on souhaite tracer la partie figurant sur la feuille de la hauteur issue de C.

Problème 3. Sur une feuille de papier, on a marqué un point A et un arc de cercle dont le centre O tombe hors de la feuille (ci-dessous, à droite). On veut tracer la partie du segment [AO] figurant sur la feuille.



La difficulté notée dans la séance sur le parallélogramme aurait été rencontrée de toute façon ; mais son *dépassement*, réalisé sur le *premier* des problèmes du type étudié par la classe, sera un *acquis* (à consolider, sans doute) de la culture de la classe lorsque celle-ci s'attaquera ultérieurement à d'autres problèmes de ce type. De là l'idée de travailler par *grands types de problèmes*, comme il en va avec celui pris pour exemple ici, que l'on peut formuler ainsi :

Comment marquer ou tracer (avec les instruments habituels : règle, compas, équerre, etc.) un certain élément (un point, un segment, etc.) d'une figure tracée sur une feuille de papier lorsque les techniques graphiques connues supposent l'utilisation d'éléments de la figure dont l'un au moins est inaccessible parce que situé hors de la feuille ?

¹ http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf.

b) Le *schéma de question* précédent va être activé sous la forme de questions Q particulières, telle la suivante, maintenant bien connue : « Comment tracer la partie de la diagonale $[AC]$ d'un parallélogramme $ABCD$ tracé sur une feuille, lorsque le sommet C “tombe” à l'extérieur de la feuille ? » Le travail piloté par $Y = P$ dans la séance observée résulte de la mise en fonctionnement du système didactique $S(X ; Y ; Q_T)$. Quelle est la relation entre ♥ et $Q = Q_T$, ici ? On l'a dit : P a dû « inventer » une question Q (isolée) telle que, pour apporter une réponse R à Q , on ait besoin (sous certaines conditions et contraintes) de la propriété θ (selon laquelle les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu). La réponse R prend alors la forme d'une praxéologie $O_\theta = [T / \tau / \theta / \Theta]$. Le processus didactique mené à bien peut alors s'écrire ainsi, on l'a vu,

$$S(X ; Y ; Q) \Rightarrow R$$

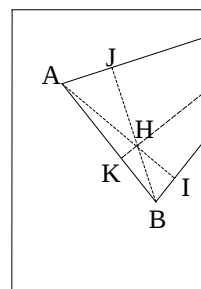
où $R = O_\theta = [T / \tau / \theta / \Theta]$, la flèche $\Rightarrow$ signifiant « produire », « élaborer », « engendrer ».

6.5.2. Ce procédé peut être généralisé : dans une telle problématique didactique, pour tout enjeu didactique ♥ consigné dans le programme d'études (s'il existe), Y devra « inventer » (ou choisir) une ou plusieurs questions $Q_\heartsuit$ telle que ♥ apporte un *composant clé* à la réponse $R_\heartsuit$ susceptible d'être élaborée sous les conditions et les contraintes usuelles de fonctionnement du système didactique $S(X ; Y ; Q_\heartsuit)$.

a) La problématique didactique représentée formellement par le schéma

$$[S(X ; Y ; Q) \Rightarrow M] \Rightarrow R$$

a nombre de mérites. *En tout premier lieu*, elle combat la « *monumentalisation* » scolaire des *savoirs enseignés*, c'est-à-dire le fait qu'on les visite à l'école, si possible avec déférence, voire avec vénération, sans avoir presque aucune idée de leurs usages, de leurs fonctionnalités possibles – en sorte qu'il ne s'agit plus dès lors que de *savoirs sans utilité*. Ainsi apprendra-t-on que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, sans savoir à quoi cela peut bien être utile, alors même que, par exemple, il s'agit de la *propriété clé* pour élaborer une technique graphique résolvant le deuxième des trois problèmes évoqués plus haut, comme le suggère la figure ci-contre.



b) Corrélativement, le fait de « partir d'une question » Q renoue avec la problématique fondamentale de la connaissance : *connaître, c'est être capable d'apporter une réponse raisonnée, vérifiée, efficace à une question*. La problématique scolaire, qui marchait sur les mains, est ainsi remise sur ses pieds. Mais on doit alors aller plus loin dans la rénovation épistémologique, qui n'est pas qu'une affaire scolaire, mais une affaire de *société*, voire de civilisation.