

Université d'Aix-Marseille

2013-2014

Master « Mathématiques et applications »

Spécialité « Enseignement et formation en mathématiques »

Parcours « Didactique » (2^e année)

UE 35

Fondements et méthodes de la recherche en didactique

Yves Chevallard & Michèle Artaud

Leçon 4. Praxéologies de recherche II

1. Problématiques fondamentales et questions de recherche

1.1. Revenons à la modélisation de la position ρ de chercheur en didactique des mathématiques. Ce que nous nommerons *une recherche* sera associé à une question Q que le chercheur ξ ou son équipe Ξ étudie afin de lui apporter une réponse $R^\heartsuit$ – qu'on pourrait aussi bien noter, selon le cas, $R_\xi^\heartsuit$ ou $R_\Xi^\heartsuit$. On notera que, souvent, le « sujet » de la recherche *n'est pas formulé en termes de questions*, mais par la désignation – de façon plus ou moins vague – de l'*objet* « principal » sur lequel porterait la question de recherche. L'existence d'une question Q est un critère important, voire décisif, pour décider si « une recherche » mérite bien ce titre. Il est vrai cependant que les chercheurs procèdent souvent à l'envers : étant arrivés à certains « résultats », ils les regardent (et les font apparaître) comme apportant réponse à une question Q qu'ils n'avaient pas nécessairement formulée à l'avance : le travail accompli devient ainsi *rétrospectivement* un travail de recherche !

1.2. Quelles questions étudie un chercheur en didactique ? Plus exactement : comment peut-on modéliser le système (ouvert) des questions étudiées en didactique ? Les questions de recherche – « prospectives » ou « rétrospectives », si l'on peut dire – participent très généralement d'un petit nombre de grands « corps de problèmes », de grandes *problématiques*, que l'on rappelle rapidement ci-après. La première de ces *problématiques fondamentales* est la *problématique de base*, dans laquelle on étudie l'ensemble des systèmes de conditions C qui, sous des contraintes K_0 , provoquent la rencontre ($\Re$) ou l'étude (∂) d'une

entité praxéologique $\wp_0$ par l'instance U_0 (qui est une personne ou une institution, telle une classe par exemple) : $\{C / \partial\forall\mathfrak{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)\}$. Une *question de recherche* typique consiste ainsi à déterminer ce que peut être un système C^* de conditions tel que

$$C^* \in \{C / \partial\forall\mathfrak{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)\}.$$

Un *résultat de recherche* peut consister en la conclusion que, pour un certain système C^* de conditions, on aurait $C^* \in \{C / \partial\forall\mathfrak{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)\}$; ou, au contraire, que l'on aurait

$$C^* \notin \{C / \partial\forall\mathfrak{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)\}.$$

1.3. Si l'on échange C et $\wp$ dans ce qui précède, on obtient l'ensemble

$$\{\wp / \partial\forall\mathfrak{R}(K_0, C_0, \wp, U_0)\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des entités praxéologiques $\wp$ que l'instance U_0 rencontre ou étudie dès lors qu'elle est soumise aux conditions C_0 sous les contraintes K_0 . Il s'agit là de la problématique dite *duale* de la problématique de base : on l'appelle problématique *possibiliste*. On notera que, lorsqu'un chercheur s'efforce de déterminer si

$$C^* \in \{C / \partial\forall\mathfrak{R}(K_0, C, \wp_0, U_0)\}$$

cela revient à se demander si $\wp_0 \in \{\wp / \partial\forall\mathfrak{R}(K_0, C^*, \wp, U_0)\}$. On passe ainsi naturellement de la problématique *de base* à la problématique *possibiliste*, et inversement.

1.4. Plus généralement, un travail de recherche dans le cadre de la problématique de base – ou, au demeurant, de l'une quelconque des quatre problématiques fondamentales – peut engendrer diverses questions *qu'on regardera, en puissance, comme autant de questions de recherche en didactique*. Une telle question de recherche peut ainsi être la suivante, en désignant par $E(U_0)$ l'équipement praxéologique de U_0 : « Étant donné une entité praxéologique $\wp_0$ et une instance U_0 , est-il vrai que $\wp_0 \in E(U_0)$? Plus généralement, quel est le “degré d'appartenance” de $\wp_0$ à $E(U_0)$? Quelle est sa “volatilité” ? » Tout cela mériterait bien sûr d'être élaboré tant du point de vue théorique que du point de vue empirique.

1.5. La TAD reconnaît actuellement parmi les problématiques fondamentales de la didactique deux autres problématiques, elles aussi duales l'une de l'autre. La première est la problématique *primordiale*. On s'y réfère à la notion de *projet* (de connaissance ou d'action), que l'on désigne par la lettre grecque Π . S'il s'inscrit dans cette problématique, un chercheur en didactique ξ ou une équipe Ξ étudie l'ensemble $\{\wp / \mathfrak{I}(K_0, \wp, \Pi_0, U_0)\}$ des entités

praxéologiques $\wp$ qui, sous l'ensemble de contraintes K_0 , sont utiles ou indispensables ($\Im$) à l'instance U_0 pour concevoir ou mener à bien le projet Π_0 . De façon duale, la problématique *interventionniste* conduit à l'étude de l'ensemble $\{\Pi / \Im(K_0, \wp_0, \Pi, U_0)\}$, c'est-à-dire de l'ensemble des projets Π pour la conception ou la réalisation desquels, sous les contraintes K_0 , l'entité praxéologique $\wp_0$ est reconnue utile ou indispensable. Si la problématique *interventionniste* n'est pas étrangère au monde de l'enseignement – d'elle relève par exemple le souci des « applications » d'une notion ou d'une technique mathématique donnée –, la problématique *primordiale* semble généralement échapper aux professeurs pour constituer l'apanage des « autorités de tutelle » et de certains des « penseurs » noosphériques qui ambitionnent de se préoccuper des *buts* de l'éducation scolaire plutôt que de ses *moyens*.

1.6. *Tous* les termes employés dans ce qui précède sont en vérité *problématiques*. Qu'est-ce, ainsi, que « rencontrer » une entité praxéologique $\wp$? En quoi peut-on dire que telle instance U aura « intégré » $\wp$ à son équipement praxéologique $E(U)$? En quoi l'entité $\wp$ lui est-elle « indispensable » en tel projet Π ? Nous nous sommes arrêtés déjà sur la problématique de ce que la *doxa* professorale (et noosphérique) regarde comme *non problématique* par excellence, dès lors du moins qu'elle relève de l'une des disciplines enseignées : l'entité praxéologique $\wp$. Cette prétendue non-problématicité de $\wp$ contraste avec l'insistance sur le caractère problématique du processus de « transmission » de $\wp$ – dont la difficulté tiendrait à l'instance U_0 , et non au « savoir enseigné » ! Mais c'est en fait *tous* les termes employés qui appellent une analyse et une interrogation permanentes.

1.7. On commencera, ici, par généraliser légèrement la formulation des problématiques fondamentales, en y remplaçant le symbole $\wp$ désignant une « entité praxéologique » quelconque par la lettre O pour désigner ce que nous avons nommé, dans la *Leçon 1*, une *œuvre*. (Nous avons utilisé pour cela le symbole $\heartsuit$: la substitution de O à $\heartsuit$ s'expliquera un peu plus loin.) On écrira donc par exemple

$$\{C / \partial \vee \Re(K_0, C, O_0, U_0)\}.$$

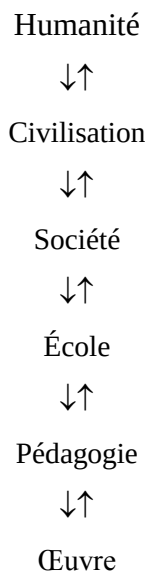
L'intérêt de cet élargissement est de pouvoir considérer non seulement des entités praxéologiques $\wp$, mais aussi des questions Q (on a vu dans la *Leçon 1* qu'une question est un œuvre, et une œuvre généralement précieuse). Comme dans le cas d'une entité praxéologique $\wp$ quelconque, l'instance U_0 pourra « rencontrer » ($\Re$) la question Q ou pourra l'étudier (∂) de façon plus ou moins approfondie. La relation notée $\partial \vee \Re$ devra être précisée en fonction de la question que le chercheur étudie. On notera de même

$$\{O / \mathfrak{I}(K_0, O, \Pi_0, U_0)\}$$

l'ensemble des œuvres qu'il est reconnu utile ou indispensable d'avoir rencontrées ou étudiées pour concevoir ou mener à bien le projet Π_0 sous les contraintes K_0 . Parmi les œuvres envisagées figureront éventuellement des *questions*, que l'instance U_0 aurait avantage à avoir rencontrées, à « s'être posée », voire à avoir étudiées plus ou moins en profondeur.

2. Conditions & contraintes

2.1. Que sont les *conditions* que le chercheur en didactique des mathématiques doit prendre en compte dans ses recherches ? À cette question, on a rencontré d'ores et déjà une grande partie de la réponse en rencontrant *l'échelle des niveaux de codétermination didactique*, qu'on reprend ci-après en l'augmentant d'un échelon supérieur, celui de... l'*Humanité* :



Le singulier employé pour le nom des différents échelons – *Société, École, Pédagogie*, etc. – ne doit pas tromper : il s'agit sauf exception de « singuliers génériques ». Car il y a en fait *des* civilisations ; et il y a *des* sociétés participant d'une civilisation donnée. Au sein d'une société il y a *des* écoles (chacune ayant, au reste, divers *établissements*) ; et, en une même école, il peut exister *des* pédagogies – assez différentes pour qu'on soit fondé à les distinguer. Bien entendu, il existe une foultitude d'*œuvres* qu'une pédagogie donnée conduit à rencontrer et à étudier (même si une pédagogie ne permet jamais de rencontrer *toute œuvre possible*). À la règle qui vaut pour tous ces échelons, seul le premier des échelons échappe : depuis quelques dizaines de milliers d'années, en effet, il n'y a plus, sur la planète, qu'*une* humanité.

2.2. Les recherches les plus classiques en didactique des mathématiques ne considèrent qu'un petit nombre de types de conditions – ce qui les distingue *en principe* des recherches pensées et conduites dans le cadre de la TAD. L'insuffisante rupture praxéologique entre chercheur et professeur en est l'une des causes premières. Un lien trop étroitement maintenu conduit en effet certains chercheurs à considérer surtout, voire exclusivement, ces conditions que le professeur peut, sous les contraintes usuelles, modifier ou créer, et donc, du même mouvement, à *ignorer* ces conditions qui sont, pour le professeur, dans l'état de choses actuel, des *contraintes* – un peu comme si les chercheurs ne s'adressaient qu'aux professeurs. Mais un second faisceau de causes est à considérer, qui est, dans les faits, souvent solidaire de la non-rupture entre le chercheur et le professeur : il s'agit de la difficulté, pour le chercheur en didactique, à aller au-delà des conditions et contraintes portées par l'œuvre étudiée, comme s'il ne pouvait s'en détacher ni à plus forte raison s'en éloigner sans perdre brutalement sa légitimité de chercheur *en didactique de*. Quelles que soient les raisons effectives et les motifs allégués, cela conduit en règle générale à grossir considérablement et, surtout, silencieusement, comme clandestinement, l'ensemble K_0 des contraintes sous lesquelles se trouve placé l'objet de la recherche : le chercheur prétendra établir par exemple que, pour tel ensemble C de conditions, on a bien $\partial \forall \mathcal{R}(K_0, C, O_0, U_0)$, mais sans pouvoir préciser ce qu'est l'ensemble K_0 . Ce type de situations de recherche, il est vrai, n'est pas propre à la didactique : on l'exprime quelquefois, en d'autres sciences, en disant que l'on étudie les effets de conditions C « toutes choses étant égales par ailleurs » – ce qui se disait en latin *ceteris paribus* (ou, plus exactement, *ceteris paribus sic stantibus*). Voici un extrait éclairant de l'article « *Ceteris paribus* » de Wikipedia :

One of the disciplines in which *ceteris paribus* clauses are most widely used is [economics](#), in which they are employed to simplify the formulation and description of economic outcomes. When using *ceteris paribus* in economics, assume all other variables except those under immediate consideration are held constant. For example, it can be predicted that if the price of [beef](#) increases—*ceteris paribus*—the quantity of beef demanded by buyers will *decrease*. In this example, the clause is used to operationally describe everything surrounding the relationship between both the *price* and the *quantity demanded* of an [ordinary good](#).

This operational description intentionally ignores both known and unknown factors that may also influence the relationship between price and quantity demanded, and thus to assume *ceteris paribus* is to assume away any interference with the given example. Such factors that would be intentionally ignored include: the relative change in price of substitute goods (e.g., the price of

beef vs. pork or lamb); the level of [risk aversion](#) among buyers (e.g., fear of [mad cow disease](#)); and the level of overall demand for a good regardless of its current price level (e.g., a societal shift toward [vegetarianism](#)).

The clause is often loosely translated as “holding all else constant.”

Cette analyse se laisse « traduire » aisément en termes de phénomènes didactiques (plutôt qu'économiques) : on laissera au lecteur le soin de cette traduction.

2.3. Le principe *ceteris paribus*, on le voit, est utile à court terme mais ne saurait permettre d'ignorer les autres conditions, notamment lorsque celles-ci évoluent, à la longue, de façon plus ou moins « souterraine », ce qui se produit s'agissant du didactique non moins sans doute que concernant l'économique. Dans l'abord d'une recherche faite ou à faire, on s'interrogera donc sur les conditions non prises en compte et dont on peut penser qu'elles jouent un rôle non négligeable dans les phénomènes didactiques étudiés. Dans ce qui suit, on s'arrêtera d'abord très brièvement, et seulement pour en donner une idée, sur le tout premier niveau, c'est-à-dire sur les conditions et contraintes qui semblent avoir leur siège au niveau de l'*humanité* toute entière. De nombreux travaux, aujourd'hui, s'attachent à mettre en évidence des traits de comportements humains qui ne seraient pas le propre d'une culture humaine donnée, mais appartiendraient à l'espèce humaine en général. On ne donnera ici qu'un exemple, emprunté au livre de Michael Tomasello, *Why we cooperate* (2009) :

Researchers set up a situation in which twelve-month-old, pre-linguistic infants watched while an adult engaged in some adult-centered task such as stapling papers. The adult also manipulated another object during the same period of time. Then she left the room and another adult came in and moved the two objects to some shelves. The original adult then came back in, papers in hand, ready to continue stapling. But there was no stapler on her table, as she searched for it gesturing quizzically but not talking at all. As in the instrumental helping studies, the infants perceived the adult's problem and were motivated to help her, which most of them did by pointing to the location of the sought-for stapler. The children were far less likely to point at the other object, which had been handled an equal amount. The infants did not want the stapler for themselves. They did not engage in the usual demanding behavior—whining, reaching, and so forth—after the adult grasped the stapler. Once she had it in her hand, the children stopped pointing and were satisfied. In follow-up studies, the researchers also ruled out that infants simply wanted to see the stapling activity reinstated.

While infants consistently demonstrate understanding of informative pointing, the same is not true of apes. Apes do not point for one another, and when they do point for humans, they do so mainly to get humans to fetch food for them. Indeed, in all observed cases of apes pointing for humans, the motive is directive (imperative). Also, apes who have learned some kind of human-centered communication use it to communicate only with humans, not with one another, and they do so almost exclusively for directive purposes. (pp. 15-16)

Ce comportement de tout-petits et d'autres comportements semblables ne paraît pas naître de l'éducation à proprement parler mais semble procéder de ce que l'évolution darwinienne a fait des « humains ». Le même auteur écrit à ce propos :

In the next chapter I will try to provide an evolutionary explanation for why only humans help others by providing needed information. In terms of ontogeny, it seems hard to imagine that these twelve-month-old infants are providing information helpfully because they have been rewarded or encouraged to do so; sharing information freely seems to come naturally even to very young children. Of course children soon learn to lie also, but that comes only some years later and presupposes preexisting cooperation and trust. If people did not have a tendency to trust one another's helpfulness, lying could never get off the ground. (p. 21)

Il y aurait ainsi des conditions portées par les humains en tant que tels, des conditions qui seraient indépendantes des civilisations et des sociétés, même si leur manifestation concrète revêt des expressions culturelles variables. On est donc là, en principe, dans un cas où *l'on peut compter* sur de telles conditions : elles iraient de soi pour l'espèce humaine en général.

2.4. Qu'en est-il au niveau de la civilisation ? Ce terme renvoie à des groupements de sociétés qui, à propos d'un domaine d'activité, montrent des équipements praxéologiques voisins sinon identiques. (Une même société peut ainsi, à un moment donné de son histoire, participer de *plusieurs* civilisations différentes.) Une civilisation apporte des réponses aux grandes questions qui assaillent *Homo sapiens*, notamment celles de la reproduction de l'espèce, du statut des femmes, du rapport aux œuvres et à la connaissance des œuvres. Ces réponses sont diffractées au sein des diverses *sociétés* qui participent de la civilisation considérée, à travers notamment le prisme de l'école ou, plus exactement, des diverses *formes d'école* auxquelles une société donnée permet d'exister. À leur tour, ces formes d'école commandent les diverses *pédagogies* possibles ainsi que les types de *systèmes didactiques* $S(X; Y; \heartsuit)$ compatibles avec elles.

2.5. D'une manière générale, l'ensemble des contraintes pesant sur la formation des systèmes didactiques $S(X; Y; \heartsuit)$ fait que tant les instances X et Y que les enjeux didactiques $\heartsuit$ sont soumis à des déterminants parfois très stricts. Illustrons cela sur l'exemple des mathématiques et de l'éducation des filles. On n'ignore pas que l'on doit à Camille Sée (1847-1919) la première loi organisant l'enseignement *secondaire* féminin. Dans sa proposition de loi (1879), Sée précise ce que, selon lui, devraient être les œuvres étudiées dans les nouveaux établissements de jeunes filles :

Le programme d'enseignement ne peut pas être fait par la loi ; il suffit d'en indiquer les bases. À Genève et dans les autres établissements analogues de la Suisse, le collège de jeunes filles s'est bien peu écarté du programme imposé au collège de garçons. Tout ce qui, dans les mathématiques, est préparation aux écoles spéciales, doit naturellement disparaître ; mais il est nécessaire aux femmes de savoir très bien compter, et avec une bonne préparation, elles y excellent. La physique, la chimie, l'histoire naturelle, l'histoire, la géographie peuvent être conservées sans modifications ; il en est de même des études littéraires. Nous n'irons pas jusqu'à bannir le latin et le grec. C'est une puérité de dire que les hommes ont surtout besoin des langues anciennes pour l'étude du droit et de la médecine ; les lettres classiques sont surtout un moyen puissant d'éducation intellectuelle et morale.

Tout au plus pourrait-on, à l'inverse de ce qui se passe dans les lycées, rendre l'étude des langues vivantes obligatoire, et celle des langues anciennes facultative. Le latin bien enseigné s'apprend plus facilement et en moins de temps que l'allemand.

Le cours de philosophie comprendra, comme dans les collèges de garçons, la psychologie, la logique et la morale. Il n'est pas bon, même pour les garçons, de se perdre dans les systèmes philosophiques, qu'on doit réserver aux Facultés ; on doit se borner, dans l'enseignement des collèges, aux vérités incontestables, aux méthodes éprouvées. On y enseignera, comme dit Condorcet, « les principes de la morale qui, fondés sur nos sentiments naturels et sur la raison, appartiennent également à tous les hommes ». On bannira l'enseignement qui « donnerait à des dogmes particuliers un avantage contraire à la liberté des opinions ». On laissera les ministres des différents cultes le donner, en dehors des classes, aux élèves internes, quand les parents en auront manifesté la volonté.

La liberté sera ainsi satisfaite et « la puissance publique n'aura point usurpé sur les droits de la conscience, sous prétexte de l'éclairer et de la conduire ».

Le cours d'hygiène, prescrit en 1872 pour les lycées, aurait ici un intérêt tout spécial. On y enseignerait tout ce que doit savoir une bonne infirmière, et, par dessus tout, tout ce que doit savoir une bonne mère.

On pourrait aussi faire utilement quelques leçons de droit usuel. Les femmes savent à peine ce que c'est qu'un contrat de mariage, une donation, un testament, un bail, un sous-seing, une tutelle ; elles comprennent très mal leurs droits, elles donnent aveuglément leur signature, se compromettent par ignorance, sont obligées de recourir à un conseiller pour les actes les plus simples. Elles se font même gloire, chose singulière, d'une ignorance dont on abuse souvent contre elles.

La distinction entre filles et garçons fait là, comme en passant, l'objet d'une remarque savoureuse à propos des langues anciennes ! Mais elle transparait surtout dans la référence aux « écoles spéciales », c'est-à-dire aux « grandes écoles » : les filles, pour longtemps encore (l'École polytechnique n'acceptera des filles qu'à partir de 1972), n'ont pas « vocation » à y être admises. Cela noté, voici le texte de la loi – dite Camille Sée – qui sera effectivement votée le 21 décembre 1880 :

Loi du 21 décembre 1880 sur l'enseignement secondaire des jeunes filles

Le Sénat et la Chambre des députés ont adopté,

Le Président de la République promulgue la loi dont la teneur suit :

Art. 1er.- Il sera fondé par l'Etat, avec le concours des départements et des communes, des établissements destinés à l'enseignement secondaire des jeunes filles.

Art. 2.- Ces établissements seront des externats. Des internats pourront y être annexés, sur la demande des conseils municipaux, et après entente entre eux et l'Etat. Ils seront soumis au même régime que les collèges communaux.

Art. 3.- Il sera fondé par l'Etat, les départements et les communes, au profit des internes et des demi-pensionnaires, tant élèves qu'élèves-maîtresses, des bourses dont le nombre sera déterminé dans le traité constitutif qui interviendra entre le ministère, le département et la commune où sera créé l'établissement.

Art. 4.- L'enseignement comprend : 1° l'enseignement moral ; 2° la langue française, la lecture à haute voix, et au moins une langue vivante ; 3° les littératures anciennes et modernes ; 4° la géographie et la cosmographie ; 5° l'histoire nationale et un aperçu de l'histoire générale ; 6° l'arithmétique, les éléments de la géométrie, de la chimie, de la physique et de l'histoire naturelle ; 7° l'hygiène ; 8° l'économie domestique ; 9° les travaux d'aiguille ; 10° des notions en droit usuel ; 11° le dessin ; 12° la musique ; 13° la gymnastique.

Art. 5.- L'enseignement religieux sera donné, sur la demande des parents, par les ministres des différents cultes, dans l'intérieur des établissements, en-dehors des heures des classes. Les ministres des différents cultes seront agréés par le ministre de l'instruction publique. Ils ne résideront pas dans l'établissement.

Art. 6.- Il pourra être annexé aux établissements d'enseignement secondaire un cours de pédagogie.

Art. 7.- Aucune élève ne pourra être admise dans les établissements d'enseignement secondaire sans avoir subi un examen constatant qu'elle est en état d'en suivre les cours.

Art. 8.- Il sera, à la suite d'un examen, délivré un diplôme aux jeunes filles qui auront suivi les cours des établissements publics d'enseignement secondaire.

Art. 9.- Chaque établissement est placé sous l'autorité d'une directrice. L'enseignement est donné par des professeurs hommes ou femmes munis de diplômes réguliers.

La présente loi, délibérée et adoptée par le Sénat et par la Chambre des députés, sera exécutée comme loi de l'Etat.

Fait à Paris, le 21 décembre 1880.

JULES GREVY.

Par le Président de la République :

Le ministre de l'instruction publique et des beaux-arts,

JULES FERRY.

On aura noté que les études dans les « établissements destinés à l'enseignement secondaire des jeunes filles » ne sont pas sanctionnées par un baccalauréat en bonne et due forme – cela attendra la réforme de Léon Bérard en 1924 (sur tout cela, voir l'article de *Wikipédia* intitulé « Lycées de jeunes filles » ; et aussi Prost, 1968, pp. 261-265). Ajoutons que la distinction *de jure* (et pas seulement *de facto*), si l'on peut dire, entre garçons et filles durera longtemps encore. À titre d'illustration, on a reproduit ci-après un court extrait de l'épreuve du certificat d'études primaires proposée en 1959 en Dordogne (Cabanel, 2008, pp. 42-44). On y découvrira qu'il y avait des questions *pour les filles* et des questions *pour les garçons*, et même des questions pour les filles *rurales* et des questions pour les filles *urbaines* – et il en était de même pour les garçons, il y avait parfois même des questions spéciales pour les « maritimes ») :

SCIENCES. 1^{re} question :

Commune à tous les candidats : Dessinez une dent en coupe et indiquez ses différentes parties.

À l'aide d'un autre croquis, expliquez ce qu'est une carie dentaire.

Comment doit-on procéder pour éviter d'avoir des dents cariées ?

2^e question :

a) Garçons urbains et ruraux : Dessinez une ampoule électrique et indiquez ses différentes parties.

Vous lisez sur la douille d'une lampe les indications suivantes :

125 V. 60 W ; que signifient-elles ?

Sachant que le kWh coûte 0,24 NF, combien dépensera cette ampoule lorsqu'elle demeurera allumée 10 heures.

b) Filles urbaines : Dites quel peut être l'emploi, dans les travaux de nettoyage et d'entretien, des produits suivants : la laine d'acier, le carbonate de soude, l'eau de javel, la benzine, l'encaustique.

c) Filles rurales : Quels sont les avantages de l'allaitement maternel ? Indiquez quelques aliments que ne doit pas prendre une maman qui allaite.

3. Un exemple : les formalismes en « mathématiques »

3.1. C'est peu dire que certaines des conditions qui organisent une civilisation peuvent avoir des effets non seulement dans les salles de classe mais dans le choix des œuvres à étudier et la manière dont elles se présentent aux élèves : dans leur transposition didactique. On s'arrêtera ici sur un exemple central, celui de l'usage, en mathématiques, des symboles, des notations et des formalismes. On a rencontré, dans le « menu » prévu par la loi Camille Sée du 21 décembre 1880, la mention de « l'arithmétique » ainsi que des « éléments de la géométrie », mais non de l'algèbre. Traditionnellement, l'étude de l'algèbre, à l'occasion de laquelle étaient introduits ce qu'on appelait alors les « nombres algébriques », c'est-à-dire les nombres dits aujourd'hui *relatifs*, marquait un passage d'un univers dans un autre, plus avancé et plus sophistiqué, qui conduisait jusqu'au seuil des « hautes » mathématiques. Aujourd'hui encore, dès lors qu'ils s'adressent à un public de « non-mathématiciens », certains auteurs se gardent d'user de notations « mathématiques », voire de tout autre outillage que celui des mots de la langue dite « naturelle ». C'est ainsi que, dans son ouvrage *Seeing through statistics* (2^e éd., 1999 ; 3^e éd., 2005), Jessica M. Utts use de cette très ancienne distinction entre « formulation en mots » – sous la forme de *règles* – et usage de symboles – pour écrire des *formules*. Prenons ainsi le cas de l'écart type d'une série statistique univariée ; l'auteure propose la règle de calcul de l'écart type sous la forme suivante :

Computing the Standard Deviation

Here are the steps necessary to compute the standard deviation:

1. Find the mean.
2. Find the deviation of each value from the mean = value – mean.
3. Square the deviations.
4. Sum the squared deviations.
5. Divide the sum by #Values (the number of values) – 1, resulting in the variance.
6. Take the square root of the variance. The result is the standard deviation.

Let's try this for the set of values 90, 90, 100, 110, 110.

1. The mean is 100.
2. The deviations are –10, –10, 0, 10, 10.
3. The squared deviations are 100, 100, 0, 100, 100.
4. The sum of the squared deviations is 400.
5. The #Values – 1 = 5 – 1 = 4, so the variance is 400/4 = 100.
6. The standard deviation is the square root of 100, or 10.

Although it may seem more logical in step 5 to divide by the number of values, rather than by the number of values minus 1, there is a technical reason for subtracting 1. The reason is beyond the level of this discussion but concerns statistical bias, as discussed in Chapter 3. (p. 121)

La remarque sur l'écart type *corrigé* semble faire référence à un plus haut savoir, présent *in absentia*, si l'on peut dire, et que symbolise la notion de *biais* – en fait d'*estimateur* « *sans biais* ». Cela étant, l'auteure introduit aussi, en certains chapitres, une section intitulée *For those who like formulas*, ce qu'on illustrera à nouveau sur le cas de l'écart type (3^e éd, pp. 140-141) :

For those Who Like Formulas

The Data

n = number of observations

x_i = the i th observation, $i = 1, 2, \dots, n$

The Mean

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

The Variance

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

The Computational Formula for the Variance (easier to compute directly with a calculator)

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right)$$

The Standard Deviation

Use either formula to find s^2 , then take the square root to get the standard deviation s . (pp. 140-141)

Tout cela, donc, est réservé par l'auteure à une petite fraction de ses lecteurs.

3.2. L'opposition entre *règle* pour les gens ordinaires et *formule* pour les « savants » est ancienne. Longtemps, la règle, exprimée en *mots*, est faite pour être sue par cœur et récitée (à autrui ou à soi-même). On la retrouve dans tous les textes d'enseignement d'autrefois. Ainsi en va-t-il dans ces extraits du *Cours abrégé d'arithmétique* de Carlo Bourlet :

RÈGLE. – *Pour faire la preuve par 9 d'une division, on calcule les restes de division par 9 du diviseur et du quotient. On en fait le produit on en prend le reste de division par 9. On ajoute ce premier reste au reste de division par 9 du reste de l'opération à vérifier, et on prend le reste de division par 9 de cette somme. Ce résultat doit être égal au reste de division par 9 du dividende.*

RÈGLE. – *Pour calculer la longueur d'un arc de cercle on calcule d'abord la longueur de la circonférence entière dont il fait partie ; on la divise par 360 et on multiplie le résultat par le nombre des degrés et fraction décimale de degré contenus dans l'arc.*

Il faut donc, au préalable, quand l'arc est donné en degrés, minutes et secondes, transformer ce nombre en degrés et fraction décimale de degré.

RÈGLE. – *Pour avoir, dans une règle de trois simple et directe, la valeur inconnue de la grandeur dont on ne connaît qu'une première valeur, on multiplie cette première valeur par le rapport de la seconde à la première valeur de l'autre grandeur.*

RÈGLE – *Pour partager un nombre en parties proportionnelles à plusieurs autres, il suffit de calculer des nombres proportionnels aux nombres donnés dans le rapport du nombre à partager à la somme de ces nombres.*

La *règle* est au centre de toute l'arithmétique traditionnelle, où elle ne sera que très tardivement remplacée par la *formule*. Là où on utiliserait, aujourd'hui, la formule

$$\ell = \frac{2\pi R}{360^\circ} \times a,$$

en obtenant ainsi, par exemple, lorsque le rayon du cercle est $R = 3$ cm et l'arc $a = 37,8^\circ$, pour longueur ℓ de l'arc d'angle a le nombre $\ell = \frac{2\pi R}{360^\circ} \times a = \frac{6 \text{ cm} \times \pi}{360^\circ} \times 37,8^\circ = \frac{6 \text{ cm} \times 37,8}{360} \times \pi = \frac{226,8 \text{ cm}}{360} \times \pi = 0,63 \text{ cm} \times \pi \approx 1,98 \text{ cm}$, on doit ici, selon la règle, calculer « d'abord la longueur de la circonférence entière », soit $6 \times \pi$ cm, ou 18,84 cm à peu près (en prenant π égal à 3,14) ; ensuite diviser le résultat intermédiaire ainsi obtenu par 360, ce qui donne (approximativement) 0,05 cm/°, enfin multiplier (ici) par $37,8^\circ$: on obtient en l'espèce $\ell \approx 1,89$ cm. On aura noté que, à cause des approximations – traditionnelles – mais aussi *de l'ordre des opérations tel que le prescrit la règle*, la longueur de l'arc est sous-évaluée de presque un millimètre ! C'est que les règles sont des formules « mises en mots » et, par cela, *rigidifiées* – rigidité propre à l'*arithmétique* et qui disparaîtra avec l'*algèbre*, où l'on apprend à « manipuler » les formules, et par exemple à écrire des égalités telles que celles-ci :

$$\ell = \frac{2\pi R}{360^\circ} \times a = \frac{2aR}{360^\circ} \times \pi, \text{ etc.}$$

À un niveau certes élémentaire, une grande partie des connaissances mathématiques utiles est longtemps exprimée sous forme de petits discours, de textes, que l'on peut dès lors *apprendre par cœur* : il n'y a pas de bornes aisément assignables à l'empire *de l'apprendre et du savoir par cœur*. Par contraste, les *formules* resteront longtemps une affaire de « savants » ou de quasi-savants, comme on le saisira mieux en lisant ce qu'Émile Littré en dit dans son *Dictionnaire de la langue française*. Voici d'abord un extrait de la notice consacrée par Littré à l'entrée « Règle » :

RÈGLE

Opération d'arithmétique. L'addition, la soustraction, la multiplication et la division sont les quatre premières règles de l'arithmétique, dites, par antonomase, les quatre règles. Faire la règle du plus grand commun diviseur.

Vous ferez deux règles d'arithmétique, et vous copierez trois pages dans l'Imitation, GENLIS, Théât. d'éduc. la Lingère, I, 6.

Il faut se prémunir, en calcul de finance, contre toutes les idées qui ne sont pas très simples, parce que la science ne doit pas s'élever plus haut que celle des quatre règles de l'arithmétique, TOULONGEON, Instit. Mém. sc. mor. et pol. t. IV, p. 445.

Règle de trois, question où, trois termes d'une proportion étant donnés, il faut chercher le quatrième.

Règle de fausse position, règle dans laquelle, ayant à découvrir un ou plusieurs nombres inconnus, on prend faussement, à la place d'un d'entre eux, un nombre connu quelconque, avec lequel on calcule les autres ; ce qui en fait connaître les rapports et par suite la valeur véritable.

Il y a des problèmes que l'on ne résout commodément que par la règle de fausse position,

CORDIER, *Instit. Mém. scienc. t. VII, p. 537.*

Par contraste, voici un extrait de la notice où Littré explicite le mot « Formule » :

FORMULE (extrait)

Terme de mathématique. Ensemble de termes algébriques contenant l'expression générale d'un calcul ou son résultat. Formule algébrique. Formule différentielle. Formule intégrale.

Il [König] fit, l'année passée, le voyage de la Haye à Berlin, uniquement pour aller conférer avec Maupertuis sur une formule d'algèbre et sur une loi de la nature dont vous ne vous souciez guère, VOLT. Lett. Mme Denis, 24 juill. 1752.

Le mot de formule évoque presque toujours un contexte technique (judiciaire, diplomatique, scientifique, etc.) en même temps qu'il exhale un léger parfum d'arcanes. Notons que, en anglais courant, *formula* a un autre emploi, quelque peu inattendu pour un francophone, mais bien dans la lignée sémantique du mot : il y désigne aussi « a type of liquid for babies that is made to be similar to a mother's milk », acception qui dérive manifestement de l'emploi du mot pour désigner « a prescription for making up a medicine, baby's food, etc. » et donc « a substance prepared according to such a prescription ». Le mot de formule n'est employé en mathématiques, semble-t-il, qu'à partir du milieu du XVIII^e siècle environ – d'après le *Dictionnaire historique de la langue française*, on trouve ainsi l'expression « formule algébrique » sous la plume de Voltaire en 1752. L'*Encyclopédie* de Diderot et D'Alembert renferme l'article suivant, dû à d'Alembert (qui signe O), où l'on verra s'insinuer un débat scientifique sans aménité sur la valeur d'un résultat et les « mérites » d'un chercheur, victime de l'humeur de d'Alembert, en l'espèce le pauvre Pierre Varignon (1654-1722) qui, dans l'histoire des sciences mathématiques, n'a sans doute pas autant démerité que le laisse entendre d'Alembert :

S. f. (Algebre) est un résultat général tiré d'un calcul algébrique, & renfermant une infinité de cas ; ensorte qu'on n'a plus à substituer que des nombres particuliers aux lettres, pour trouver le résultat particulier dans quelque cas proposé que ce soit. Une formule est donc une méthode facile pour opérer ; & si l'on peut la rendre absolument générale, c'est le plus grand avantage

qu'on puisse lui procurer ; c'est souvent réduire à une seule ligne toute une science. Mais pour qu'une formule générale soit vraiment utile, & qu'il y ait du mérite à l'avoir trouvée, il faut que la formule générale soit plus difficile à trouver que la formule particulière, c'est-à-dire que le problème énoncé généralement renferme des difficultés plus grandes que le problème particulier qui a donné occasion de chercher la méthode générale. Feu M. Varignon, géometre de l'académie des Sciences, aimoit à généraliser ainsi des formules ; mais malheureusement ses formules générales étoient presque toujours privées de l'avantage dont nous parlons : & dans ce cas une formule générale n'est qu'une puérilité ou une charlatanerie. M. Bernoulli, ou un autre géometre, résolvait-il un problème difficile ? M. Varignon aussi-tôt le généralisoit, de maniere que l'énoncé plus général renfermoit en apparence plus de difficultés, mais en effet n'en avoit aucune de plus, & n'exigeoit pas qu'on ajoutât la moindre chose à la méthode particulière : aussi M. Bernoulli disoit-il quelquefois après avoir résolu un problème, qu'il le laissoit à généraliser à M. Varignon. (O)

3.3. Ce qui précède suggère que la foule immense des conditions et contraintes de tous niveaux qui peut gouverner le didactique est tissée d'innombrables interdépendances, en sorte qu'on ne saurait vraiment prétendre séparer dogmatiquement tel ou tel « paquet » de conditions. Pour ne prendre ici qu'un exemple, l'enseignement d'une œuvre que d'aucuns tiennent pour « mathématique » pourra se faire avec « très peu » de mathématiques, parce qu'on souhaite « épargner » au public concerné le franchissement de la frontière séculaire qui sépare les mots des symboles. Voici de cela un exemple simple. Il est classique, en statistique, de noter comme suit un *tableau de contingence* croisant deux variables X et Y (la variable X a ici deux modalités, x_1 et x_2 , tandis que Y a trois modalités, y_1, y_2, y_3) :

	y_1	y_2	y_3	Total en ligne
x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	$n_{1\bullet}$
x_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$n_{2\bullet}$
Total en colonne	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$n_{\bullet 3}$	N

On a, pour tout i ($= 1, 2$), $n_{i\bullet} = \sum_j n_{ij}$ et, de même, pour tout j ($= 1, 2, 3$), $n_{\bullet j} = \sum_i n_{ij}$. Le total général est $N = \sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j} = \sum_{i,j} n_{ij}$. À partir de ces « effectifs observés », on calcule les « effectifs théoriques » correspondant à l'hypothèse selon lesquelles X et Y seraient des

variables *indépendantes*. Avec des notations évidentes on aurait alors : $P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j)$. Admettons que $P(X = x_i) \approx \frac{n_{i\bullet}}{N}$ et $P(Y = y_j) \approx \frac{n_{\bullet j}}{N}$. Désignons par c_{ij} l'effectif théorique cherché et admettons de même que $\frac{c_{ij}}{N} \approx P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$; il vient alors $\frac{c_{ij}}{N} \approx \frac{n_{i\bullet}}{N} \frac{n_{\bullet j}}{N}$. On définit pour cela « l'effectif théorique » c_{ij} en posant : $c_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{N}$. On peut écrire :

$$c_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{N} = \frac{n_{i\bullet}}{N} \times n_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{N} \times n_{i\bullet}.$$

L'effectif théorique c_{ij} apparaît ainsi comme égal à l'effectif qu'on aurait observé dans la case (i, j) si...

– la distribution dans la colonne j (pour $Y = y_j$) avait été la même (en proportion) que la « distribution marginale » de Y (marge de droite) : $c_{ij} = \frac{n_{i\bullet}}{N} \times n_{\bullet j}$ (on distribue dans la colonne j l'effectif marginal $n_{\bullet j}$ selon la distribution marginale de X : voir le tableau ci-dessous) ;

	...	y_j	...	Total en ligne
...	...	...	...	...
x_i	...	c_{ij}	...	$n_{i\bullet}$
...	...		...	...
Total en colonne	...	$n_{\bullet j}$	...	N

– la distribution dans la ligne i (pour $X = x_i$) avait été la même (en proportion) que la distribution marginale de X (marge d'en bas) : $c_{ij} = \frac{n_{\bullet j}}{N} \times n_{i\bullet}$ (on distribue dans la ligne i l'effectif marginal $n_{i\bullet}$ selon la distribution marginale de Y : voir-dessus). Cette présentation fait un usage décomplexé de notations elles-mêmes classiques. Mais certains auteurs présentent cet ensemble de notions (qui permettront notamment de définir la distance du χ^2) en n'utilisant aucune notation littérale, tout se passant à l'aide d'exemples numériques regardés comme « paradigmatiques ». Voici par exemple un extrait de l'ouvrage *L'analyse factorielle* de Philippe Cibois (1994, p. 9) :

En premier lieu, exprimons la façon dont nous avons calculé les effectifs théoriques correspondant à la situation d'indépendance entre les séries et les orientations. Pour chaque série

nous avons multiplié l'effectif de la série par la proportion moyenne, c'est-à-dire 50/100 pour l'Université, 10/100 pour les CPGE et 40/100 pour les autres orientations.

On voit que pour avoir l'effectif théorique d'une case, il suffit de multiplier l'effectif de la ligne correspondante par la proportion de la colonne, ou, ce qui revient au même de multiplier les effectifs marginaux de ligne et de colonne en divisant par le total général.

Chaque case du tableau ci-dessous est obtenue en multipliant la marge correspondante ligne par la marge correspondante colonne.

	<i>Université</i>	<i>CPGE</i>	<i>Autres</i>	
Série A	10	2	8	20
BDD'	15	3	12	30
CE	10	2	8	20
Technique	15	3	12	30
	50/100	10/100	40/100	

Dans tout l'ouvrage, l'auteur s'impose à l'évidence de n'employer jamais aucune « formule » exprimée symboliquement. Bien entendu, cela n'est pas une obligation absolue, même en sciences humaines et sociales (SHS). Et cela semble l'être d'autant moins qu'on se rapproche plus des sciences de la nature.

3.4. Les choix faits varient souvent de société à société. Voici à titre de simple illustration un extrait de l'ouvrage de Stephen Holzner intitulé *Physics Essentials for Dummies* (2010), c'est-à-dire « Les bases de la physique pour les Nuls ». Le passage choisi, bien que très simple, comporte pourtant plusieurs aspects dignes d'intérêt (pp. 23-24) :

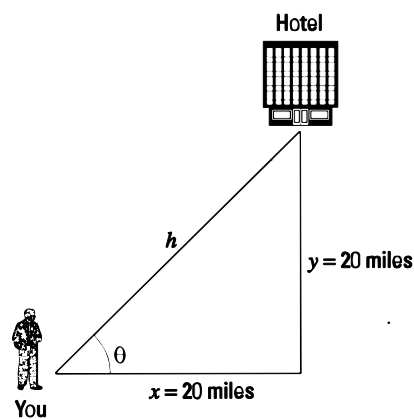


Figure 2-7: Using the angle created by a vector to get to a hotel.

Finding h isn't so hard because you can use the Pythagorean theorem:

$$h = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Plugging in the numbers gives you

$$h = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(20 \text{ mi})^2 + (20 \text{ mi})^2} = 28.3 \text{ mi}$$

The hotel is 28.3 miles away. What about the angle θ ? Because of your superior knowledge of trigonometry, you know that

$$y = h \sin \theta$$

In other words, you know that

$$y / h = \sin \theta$$

Now all you have to do is take the inverse sine:

$$\theta = \sin^{-1} (y / h) = \sin^{-1} [(20 \text{ mi}) / (28.3 \text{ mi})] = 45^\circ$$

You now know all there is to know. The hotel is 28.3 miles away, at an angle of 45° . Another physics triumph!

Par rapport à la *culture mathématique scolaire française actuelle*, on aura noté d'abord le maintien des unités dans les calculs (ce qu'on n'ose pas trop faire encore au collège, en France), ensuite l'usage du sinus inverse, noté $\sin^{-1}$. Ce calcul, qui, aux yeux de professeurs de mathématiques français, relève (à ces détails près) *des mathématiques*, est présenté ici comme « un triomphe de la physique » (bien qu'il faille pour le conduire le secours de cette science auxiliaire qu'est la *trigonométrie*). Il y a là une stratégie usuelle pour intégrer les mathématiques nécessaires à un type d'activité donné : ce ne sont pas des mathématiques, dit-on implicitement au lecteur amateur de physique, simplement quelques-uns des outils de travail indispensables au physicien. Mais on aura noté surtout que la technique relative au cas général est présentée ici sur un cas particulier *ayant valeur paradigmatique*, cas particulier que d'aucuns seraient peut-être tentés de « traiter » par une technique *ad hoc* : l'angle est ici de 45° puisque c'est un angle à la base d'un triangle rectangle isocèle ; et l'on peut savoir, de même, que la distance, c'est-à-dire l'hypoténuse de ce triangle rectangle isocèle, est donnée par $20 \text{ mi} \times \sqrt{2} \approx 20 \text{ mi} \times 1,414 = 28,28 \text{ mi} \approx 28,3 \text{ mi}$. Bien entendu, si l'on avait eu $x = 20 \text{ mi}$ et $y = 25 \text{ mi}$ (par exemple), c'est à la technique *présentée par l'auteur* qu'il aurait fallu recourir ; on aurait eu en l'espèce : $h = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(20 \text{ mi})^2 + (25 \text{ mi})^2} = \sqrt{400 + 625} \text{ mi} = 31,015... \text{ mi} \approx 31 \text{ mi}$; et $\sin^{-1} (y / h) = \sin^{-1} (25 \text{ mi} / 31,015... \text{ mi}) \approx 51,34^\circ$. L'auteur a donc fait un choix « moyen » entre l'usage « moderne » de formalismes et l'emploi « à l'ancienne » de valeurs numériques « paradigmatiques ». La frontière numérique/symbolique a ainsi des tracés variables, que le chercheur en didactique doit apprendre à repérer.

4. Une recherche en questions (1)

4.1. La rupture praxéologique nécessaire entre chercheur et professeur suppose que les chercheurs et les équipes de recherche en didactique se saisissent pleinement de la pluralité des conditions qui « jouent » dans la diffusion de la connaissance des œuvres – mathématiques ou autres – au sein des sociétés et de leurs institutions, donc auprès de leurs acteurs. À cet égard, un premier point mérite d’être précisé à nouveau. On a défini plus haut (dans la *Leçon 1*) le didactique en exigeant qu’une *intention* didactique se manifeste : « ... dans une situation sociale donnée, il y a du didactique lorsque quelqu’un ou, plus généralement, quelque instance (personne ou institution) envisage de faire (ou fait) quelque chose *afin de* faire que quelqu’un ou quelque instance apprenne quelque chose. » C’est ici la locution « afin de » qui traduit l’intention prêtée à l’instance qui « fait » ou « envisage de faire » un geste didactique. On a remarqué déjà que les conditions et contraintes résultant de tels gestes didactiques « ne sont pas les seules conditions et contraintes que la science didactique doit prendre en compte pour étudier la diffusion sociale des œuvres », puisque, par exemple « telle conséquence non voulue d’une condition créée par un geste didactique intentionnel peut avoir des effets didactiques ». Ajoutons à cela une autre remarque fondamentale. Une condition créée délibérément dans une intention didactique peut ne pas avoir d’effets sensibles en termes d’étude, de rencontre, d’apprentissage de telle ou telle œuvre. Mais, inversement, une condition créée *pour de tout autres motifs* ou qui s’est créée « spontanément » pourra apparaître à certains, à raison ou à tort, *comme didactiquement opérante*. Dans un tel cas, très généralement, d’aucuns en viendront à *manifestar alors l’intention de créer cette condition* dans des situations où elle ne prévaut pas « spontanément », et cela afin de favoriser certaines rencontres d’œuvres et certains apprentissages. La condition non didactique initiale passera ainsi à l’état de condition « didactique », regardée comme telle par certaines instances. C’est là évidemment une raison essentielle pour que le chercheur en didactique n’en reste pas à prendre en compte les seules conditions qu’inspire, à ce qu’il croit savoir, une intention didactique manifeste.

4.2. Pour étudier le didactique et les conditions – facilitatrices ou inhibitrices – du didactique, le chercheur ξ doit étudier les conditions sous lesquelles pourront se former et vivre – « fonctionner » – certains types de systèmes didactiques $S(X ; Y ; \heartsuit)$. Situons-les rapidement par rapport à l’ensemble examiné jusqu’ici. Pour cela, on peut partir d’une situation relevant de la problématique primordiale, dans laquelle une instance V regarde une œuvre O comme

vérifiant la relation $\Im(K, O, \Pi, U)$: pour V , l'œuvre O est, sous les contraintes K , indispensable ou utile à l'instance U pour que cette dernière puisse concevoir et mener à bien un certain projet Π . (Pour simplifier, on supposera dans ce qui suit que l'instance U est une institution.) Cela détermine V (ou telle autre instance W) à rechercher des conditions C vérifiant la relation $\partial\forall\Re(K, C, O, U)$. La quête par V ou W des conditions C et de leur « réalisation » institutionnelle s'achèvera avec la mise en fonctionnement de systèmes didactiques $S(X ; Y ; \heartsuit)$ dans lesquels l'enjeu didactique $\heartsuit$ est l'œuvre O , l'ensemble X étant fait au moins en partie d'acteurs de l'institution U . Mais cette quête commence en règle générale par la recherche – voire la création – d'une école E appropriée, avec ses divers *établissements*, qui propose une certaine pédagogie et au sein de laquelle de tels systèmes didactiques – répondant à certaines spécifications touchant notamment $\heartsuit (= O)$ ainsi que X – sont susceptibles d'exister et de fonctionner de façon satisfaisante – E ou tel de ses établissements étant l'institution mandate des systèmes didactiques $S(X ; Y ; \heartsuit)$.

4.3. Soulignons que, ès qualités, le chercheur ξ n'est partie prenante ni de U , ni de V (ou de W), ni de X , ni de Y . Surtout, quelle que soit la question de recherche sur laquelle il entend travailler, ξ doit faire en sorte de disposer, en un processus d'élaboration et de réélaboration continué, d'un *modèle de recherche en didactique* de référence comportant plusieurs composantes solidaires, ce modèle ayant pour fonction d'éclairer, de suggérer, de contrôler les gestes de recherche que ξ se devra d'accomplir. La première composante de ce modèle est ce qu'on nommera le *modèle praxéologique de référence* de l'œuvre O promise à devenir enjeu didactique. Dans le cas où l'œuvre O est regardée comme une œuvre mathématique, on parlera aussi bien de modèle *mathématique* de référence. Bien entendu, le modèle de recherche de référence est également un modèle praxéologique, mais il se réfère à l'activité du chercheur ξ , et non pas à celle des usagers de l'œuvre O .

4.4. Le modèle de recherche de référence du chercheur ξ se définit – de façon évolutive – par l'ensemble des questions auxquelles il se montre capable d'apporter réponse. Une partie essentielle de ce modèle est à évolution lente : il s'agit de la théorie du didactique sur laquelle s'appuie le chercheur – c'est pour nous, ici, la TAD. C'est à l'intérieur de ce cadre théorique que le modèle de recherche de référence se déploie. Pour en avoir une vue d'ensemble, il nous faut revenir au *schéma herbartien développé* tel qu'il a été explicité dans la *Leçon 2* :

$$[S(X ; Y ; Q) \leadsto \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, O_{n+2}, \dots, O_m\}] \hookrightarrow R^\heartsuit.$$

Ce schéma prétend modéliser *toute enquête, tout processus d'étude et de recherche* possible, que X soit composé d'élèves jeunes, de chercheurs « professionnels » ou de personnes quelconques. Toutefois, afin de ne pas introduire de confusion, lorsque X et Y sont constitués de chercheurs ξ et de directeurs de recherche et d'aide à la recherche ζ , nous remplacerons les notations X et Y par les lettres grecques majuscules Ξ et Z . Le schéma herbartien « pour la recherche » s'écrira donc formellement :

$$[S(\Xi ; Z ; Q) \curvearrowright \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, O_{n+2}, \dots O_m\}] \curvearrowright R^\heartsuit.$$

Redisons-le : ce schéma entend représenter *toute recherche possible*, en quelque domaine que ce soit. En particulier, il suppose que tout chercheur ξ (ou ζ) « durable » est herbartien : c'est là une condition de possibilité de toute recherche. En exploitant l'ensemble des développements précédents, nous expliciterons plus généralement, certaines au moins des conditions de possibilité d'une recherche en didactique des mathématiques, soit ce qui fonde, au moins en partie, la recherche en didactique des mathématiques.

4.5. En recherche comme ailleurs, la constitution d'un système « didactique » $S(\Xi ; Z ; Q)$ prend place dans une société donnée, relevant elle-même, à tel ou tel égard, d'une civilisation donnée, dans une école Ξ^* donnée, où prévaut une « pédagogie » déterminée. Pour signaler qu'on est ici dans un domaine d'activités – « la recherche » – qui, dans la civilisation dont nous participons à cet égard, est regardé comme ayant une forte spécificité (ce qu'on peut au reste discuter), je noterai provisoirement, ici, toutes ces réalités en leur apposant le préfixe r - : je parlerai donc ainsi de r -système didactique, de r -école, de r -pédagogie, etc. (On peut aussi remplacer le préfixe r - par le déterminant « de recherche » et dire donc « école de recherche », « pédagogie de recherche », etc.) La r -pédagogie au sein d'une certaine r -école c'est, par exemple, la manière dont les chercheurs (et les apprentis chercheurs), $\xi_1, \xi_2, \dots, \zeta_1, \zeta_2, \dots$, sont « amenés » jusqu'aux œuvres à étudier – et notamment jusqu'aux questions Q à étudier. La première question que l'on peut soulever à propos d'une recherche faite, d'une recherche en cours ou d'un projet de recherche est alors celle-ci :

H_0 . Sur quelle question Q porte la recherche considérée ? Quelle est, aux niveaux pratique et théorique, l'origine (la provenance, la source) de cette question ?

L'utilisation de la lettre H est motivée par ce fait qu'elle est la première lettre de *historia*, mot grec qui signifie « enquête ». Dans ce qui suit, une recherche sera aussi désignée comme une « enquête de recherche » ou « r -enquête ». Le fait qu'une recherche (faite, ou en cours, ou en

projet) relève ou non, ou ne relève que marginalement, de la didactique des mathématiques dépendra bien sûr et de la r-question Q , et de la définition que l'on adopte de la « didactique des mathématiques ».

4.6. La liste amorcée avec H_0 peut être complétée de différentes façons. Pour ce qui est des recherches en SHS, par exemple, voici une petite *checklist* qui a pu être proposée, à propos essentiellement des recherches « empiriques » (Utts, 1999) :

Component 1: The *source* of the research and of the *funding*.

Component 2: The *researchers* who had *contact* with the participants.

Component 3: The *individuals* or objects studied and how they were *selected*.

Component 4: The exact nature of the *measurements* made or *questions* asked.

Component 5: The *setting* in which the measurements were taken.

Component 6: *Differences* in the groups being compared, *in addition* to the factor of interest.

Component 7: The *extent* or *size* of any claimed effects or differences. (pp. 18-19)

On voit qu'une partie de la « Composante 1 » a d'ores et déjà été intégrée dans la question H_0 . Plus généralement, on peut s'inspirer partiellement de cette liste en sept points, à condition toutefois de généraliser les formulations qui y sont adoptées. La « composante 1 », ainsi, donnera lieu encore aux deux questions suivantes (pour faciliter les formulations, dans les questions H_k , $k \geq 1$, nous parlerons de la r-enquête considérée comme si elle était en cours) :

H_1 . Quelle équipe de recherche $[\Xi, Z]$ conduit la recherche sur Q ? Quelles conditions C_1 cela offre-t-il à cette recherche et quelles contraintes K_1 cela lui impose-t-il ?

H_2 . À quel établissement de quelle r-école la r-équipe $[\Xi, Z]$ appartient-elle ? Quelles conditions C_2 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_2 cela lui impose-t-il ?

On a dit que, dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique, le niveau de l'école renvoie à une institution possédant un ou plusieurs *établissements*. Ici comme ailleurs, une même école (de recherche) peut avoir plusieurs établissements (de recherche) ou se réduire à un unique établissement.

4.7. C'est dans la réponse aux questions H_1 et H_2 que l'on précisera notamment le financement (*funding*) de la r-enquête considérée : on sait notamment que, selon la question

Q, l'origine des financements de la recherche peut créer des contraintes non négligeables sur la conduite de la recherche et sur son aboutissement (ses résultats). Plus généralement, on précisera les *moyens de recherche* disponibles du fait des liens de la r-équipe $[\Xi, Z]$ avec la r-école d'appartenance, moyens permettant de constituer en partie au moins le *milieu didactique* (ou *milieu pour la recherche*) M , avec

$$M = \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, O_{n+2}, \dots, O_m\},$$

s'agissant par exemple des outils théoriques et méthodologiques O de la r-enquête sur la question Q considérée.

5. Une recherche en questions (2)

5.1. À la liste des « composantes » reproduite plus haut, ajoutons un autre outil de questionnement, celui de la structure d'article scientifique désignée internationalement par l'acronyme IMRAD, qui s'impose en nombre de revues scientifiques, s'agissant des comptes rendus de recherche « empiriques ». L'article « IMRAD » de l'encyclopédie *Wikipedia* présente la chose ainsi :

The **IMRAD** (/ˈɪmræd/) structure is the most prominent norm for the structure of a scientific journal article of the original research type. *IMRAD* is an acronym for **i**ntroduction, **m**ethods, **r**esults, and **d**iscussion. Original research articles are typically structured in this basic order:

- **Introduction** – Why was the study undertaken? What was the research question, the tested hypothesis or the purpose of the research?
- **Methods** – When, where, and how was the study done? What materials were used or who was included in the study groups (patients, etc.)?
- **Results** – What answer was found to the research question; what did the study find? Was the tested hypothesis true?
- **and**
- **Discussion** – What might the answer imply and why does it matter? How does it fit in with what other researchers have found? What are the perspectives for future research?

Ici, ces indications sont données à la seule fin de nourrir le questionnement d'une recherche donnée – et non de *juger* un compte rendu de recherche dont la publication est demandée par ses auteurs à une revue scientifique.

5.2. Ainsi qu'on aura pu l'observer, tant la liste des sept composantes que la structure en quatre parties du patron d'article IMRAD mettent l'accent sur un point fondamental non abordé jusqu'ici : le *contact* de l'équipe de recherche avec les « objets empiriques » auxquels renvoie la question Q. Supposant par exemple que ces « objets empiriques » sont des personnes – en didactique ce seront souvent des élèves et/ou des professeurs –, la *checklist* de Jessica M. Utts interroge ainsi « the *researchers* who had *contact* with the participants », « the *individuals* or objects studied and how they were *selected* », « the exact nature of the *measurements* made or *questions* asked », « the *setting* in which the measurements were taken », en s'inquiétant enfin des « *differences* in the groups being compared, *in addition* to the factor of interest ». Dans le cadre de la TAD nous pouvons réunir tout cela sous un titre unique : celui de la production (ou du choix) de milieux (ou systèmes) « adidactiques » et des *prises d'information* sur ces systèmes constitutifs de la *dialectique des médias et des milieux*. On subsumera donc ce qui précède sous la question suivante :

H₃. Quels systèmes adidactiques sont-ils créés ou découpés dans la réalité empirique étudiée et quelles prises d'information sont-elles réalisées sur ces systèmes par la r-équipe [Ξ, Z] dans le cadre de la recherche considérée ? Quelles conditions C₃ cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K₃ cela lui impose-t-il ?

Cette question appelle des commentaires sur un aspect fondamental auxquels nous consacrerons le point suivant.

5.3. D'une façon générale, comme toute question, une question de recherche Q porte sur un univers d'objets activés dans un certain nombre de types d'activités humaines. Il faut entendre le mot d'objet, ici, en un sens extensif (humain ou non humain, matériel ou immatériel, etc.) : en TAD, est objet tout ce qui existe pour au moins une personne ou une institution ! Comment donc constituer ces systèmes d'objets en *systèmes adidactiques*, c'est-à-dire comment *prendre de l'information* sur eux selon la manière dont on les sollicite ? Tel est le contenu essentiel de la question *H₃* ci-dessus. Percer les arcanes de la nature physique ou sociale et humaine ne va pas de soi, nous le savons. Le chercheur ξ, ou plutôt l'équipe de recherche [Ξ, Z], doit ainsi, en dépit d'une foule de contraintes, *organiser ses rapports avec l'univers empirique à étudier*, ce qui exige souvent un investissement considérable en temps de travail. Lorsque les objets empiriques en cause sont non humains ou, plus largement, lorsqu'ils sont accessibles par des moyens qui ne supposent pas d'interactions susceptibles d'altérer d'une façon non maîtrisable par le chercheur l'information qu'ils délivrent lorsque le chercheur les sollicite, les choses

sont relativement simples. Ainsi en va-t-il par exemple, aujourd'hui, lorsque ces objets sont des documents librement disponibles en ligne ou, plus généralement, des productions humaines non suscitées par l'activité du chercheur – ce qui, pour le chercheur en didactique, sera le cas, en principe, s'agissant des programmes officiels, des manuels scolaires, des cours ou « activités » en ligne, des cahiers ou des travaux d'élèves, etc. En ce cas, on se demandera classiquement si le corpus effectivement accessible est ou non biaisé par rapport à telle ou telle variable sensible (il peut l'être d'un certain point de vue et pas d'un autre : cela dépend de la question qu'on entend lui poser). Mais un certain nombre de difficultés sont classiques lorsque le chercheur doit interagir ès qualités avec le monde humain dans sa multiplicité institutionnelle, ce qui n'est pas inattendu s'agissant de recherches « en SHS » ! Or c'est là que des difficultés assez génériques surgissent.

5.4. Dans un ouvrage dû à deux sociologues, Stéphane Beaud et Florence Weber, intitulé *Guide de l'enquête de terrain* (2010), les auteurs mettent en relief les résistances *institutionnelles et personnelles* que le chercheur – ou plutôt l'étudiant apprenti chercheur – ne manquera pas de rencontrer s'il enquête par exemple sur l'école, la justice, la police, la prison ou le système de santé :

La forte visibilité sociale, inscrite dans l'espace, de ces institutions, sous la forme de noms, d'adresses, de contacts faciles à établir, en fait des objets *a priori* attractifs : vous les supposez faciles à enquêter. Or ce n'est pas le cas : elles exigent des autorisations, des permissions, un droit « officiel » à enquêter dans leurs murs. Ces enquêtes apparaissent, à tort, comme les plus aisément réalisables : il suffirait de s'adresser à l'institution en question, de solliciter l'autorisation, de faire montre de bonne volonté, pour que l'enquête fût acceptée. Les choses ne se passent pas ainsi dans la réalité sociale, loin de là ! On peut même dire que, sauf si vous êtes déjà membre (même à titre précaire) de l'institution, et donc installé dans les lieux, ces enquêtes sont hérissées d'obstacles « bureaucratiques » qui peuvent les rendre réalisables (...). Si elle n'est pas refusée ou interdite par l'institution, l'enquête risque d'être entièrement dirigée, guidée, par la direction de l'établissement qui cherchera à en contrôler le déroulement de bout en bout. Il faut savoir aussi que l'acceptation de l'enquête dépend du moment où vous arrivez dans l'institution : des portes peuvent se fermer seulement parce que celle-ci traverse un moment difficile. (p. 23)

Lorsque ces difficultés sont reconnues – il arrive quelles soient niées, ce qui est plus encore peut-être de nature à biaiser le rapport du chercheur aux objets empiriques de sa recherche –,

une autre réaction peut s'ensuivre, que les auteurs cités décrivent à leurs lecteurs étudiants, s'agissant de ce qu'ils nomment l'enquête *ethnographique*, dans les termes suivants :

On s'aperçoit, lorsque l'on veut faire effectuer à des étudiants un travail ethnographique, que leur premier réflexe est toujours de choisir un objet où ils peuvent observer à distance, ne pas être pris dans des interactions, observer à couvert, ne pas avoir à s'impliquer dans des relations personnelles, à justifier leur présence. C'est cette crainte qui explique le choix spontané des lieux publics comme thème d'enquête, des interactions anonymes, entre inconnus : le modèle du genre est le (grand) café, mais on peut aussi citer les grands magasins, les *fast food*, les gares, des lieux de passage où les interactions sont sans lendemain, c'est-à-dire sans conséquences. Ce sont surtout des lieux où l'enquêteur peut passer inaperçu, ce qui révèle bien la situation d'enquête rêvée par les étudiants : celle qui permet à l'enquêteur débutant de rester à l'écart, observant de loin, sans risque de contamination par la situation sociale, dans une position de parfaite « neutralité ». (pp. 31-32)

Les auteurs poursuivent ainsi :

Ainsi à l'écart, vous croyez ne pas avoir à vous mêler de ce que vous voyez ; mais vous courez d'autres risques : celui d'être soudain repéré par votre insistance, d'avoir l'ambiguïté du passant qui s'arrête, du voyeur indiscret ; celui de ne rien comprendre à ce qui se passe. C'est un choix négatif, une sorte de précaution pour s'économiser socialement, une forme de protection de soi et de suspension de la relation d'enquête. Comme si l'on pouvait faire l'enquête à moindres frais, en évitant les risques inhérents à toute interaction personnelle, comme si l'on pouvait rester anonyme, ne pas avoir à se présenter, éviter les contraintes de la politesse.

C'est ce qu'on pourrait appeler le fantasme de l'observateur débutant : il suffirait d'observer à distance pour comprendre. (pp. 32-33)

Le type d'interaction dans lequel ξ doit entrer est presque toujours inédit ; et la difficulté à y entrer peut avoir des effets dénaturants, ainsi que les mêmes auteurs le précisent en ces termes :

On a maintes fois constaté les difficultés rencontrées par les étudiants à endosser le rôle d'enquêteur, constitutives de l'apprentissage du terrain, même si elles varient selon les individus et leurs trajectoires scolaires. Votre malaise à jouer ce rôle d'enquêteur et à occuper cette position peut vous empêcher de mener votre enquête.

La situation d'enquête est tout sauf naturelle. Elle vous place dans une relation sociale à la fois artificielle et inédite. Lorsque vous devenez enquêteur, vous êtes contraint par la situation, durant tout le temps de l'enquête, de changer de rôle, de mener une existence différente de votre vie d'étudiant « traditionnel » (lecture, cinéma, bibliothèque, resto U, copains, etc.) ou celle d'étudiant salarié. La situation d'enquête vous coupe de vos réseaux ordinaires (famille, amis), de vos activités et de vos horaires ordinaires ; elle vous oblige à vous défaire provisoirement de vos appartenances (sociales, familiales, territoriales), à mettre en suspens une bonne part de votre identité sociale antérieure. (pp. 81-82)

Nombre de chercheurs débutants ont ainsi la tentation de se cacher derrière des rôles institutionnels qui leur semblent familiers, qui les rendraient – croient-ils – presque invisibles. Or l'intention autodidactique qui anime le chercheur ne saurait tenir à l'intérieur de tels rôles, ce que les auteurs suivis ici explicitent ainsi :

Vous serez aussi conduit, par la force des choses, à devoir discuter d'égal à égal, ou temporairement sur un pied d'égalité, avec des personnes d'âge et de statut très différents des vôtres, déjà installées dans la vie professionnelle et sociale, qui peuvent vous en imposer socialement (et qui ne manquent pas d'essayer de le faire pour vous « intimider »). Vous devrez alors tenir une double obligation : respecter les convenances extérieurement et, intérieurement, en être suffisamment libéré pour les *observer*. (pp. 82-83)

Ce double jeu, assumé pleinement et *sincèrement*, est difficilement compatible avec ce qui se révélera vite être une fausse solution : le fait d'observer une institution et ses acteurs « de l'intérieur », *parce que l'on est un acteur* parmi d'autres.

5.5. Plus spécifiquement, en didactique, un professeur qui s'initie à la recherche doit se garder d'imaginer que sa position institutionnelle – celle de professeur – lui permettra d'avoir spontanément avec les objets de sa recherche des rapports adéquats. En tant que chercheur, il devra se construire un accès à des types d'information que le professeur généralement ignore (et, parfois, qu'il gagne à ignorer). Chaque position institutionnelle, celle de professeur, celle de chercheur, a ses exigences propres, qui sont loin d'être superposables ! Notons ici une variante plus trompeuse encore du schéma « Je suis professeur, je peux avoir accès à tout » : l'illusion de « l'informateur indigène » auquel on prête abusivement la capacité institutionnelle de tout voir, de tout savoir et, qui plus est, de pouvoir *tout dire* au chercheur qui l'interroge. Tel étudiant, qui connaît une professeure de physique-chimie qu'il croit

pouvoir interroger – c’est une tante de sa petite amie –, croira à tort que cela le dispensera d’enquêter longuement – et souvent difficilement –, disons, sur la place des mathématiques dans l’enseignement des sciences physiques et chimiques ; et cela, en outre, l’empêchera de constituer – courtoisement, de façon humainement respectueuse – cette professeure en un « système adidactique » à *certaines égards*, et donc lui fera « rater » ce que cette « informatrice » pourrait lui apporter qui soit de bon aloi dans l’optique de sa recherche. L’illusion commune – et invasive – est ici que, par le truchement d’un informateur bien choisi, on peut avoir un accès *direct* à la « vérité ». Cet accès n’est bien sûr jamais simple ; il suppose un rapport à l’empirie approprié, que l’on situera maintenant en se référant plus précisément au schéma herbartien et aux questions Q étudiées généralement en didactique. De telles questions, on l’a souligné plus haut, impliquent une œuvre O et son destin didactique dans un type de processus impliquant des systèmes didactiques $S(X ; Y ; \heartsuit)$ mandatés par certaines institutions « scolaires » pour étudier l’œuvre $\heartsuit = O$ en s’appuyant sur une certaine pédagogie. Cela conduit à soulever une question que, par méthode, nous dissocierons en deux questions en réalité étroitement solidaires :

H_4 . Quel modèle de recherche en didactique est-il mis en œuvre dans la recherche considérée ? Quelles conditions C_4 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_4 cela lui impose-t-il ?

H_5 . Quels modèles praxéologiques de référence des œuvres enjeux didactiques apparaissant dans la recherche considérée sont-ils mis en œuvre ? Quelles conditions C_5 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_5 cela lui impose-t-il ?

C’est là évidemment le « morceau » le plus spécifique de la mise en questions d’une recherche *en didactique*. On ne doit pas oublier cependant que, si beaucoup se joue là, c’est bien *l’ensemble* des aspects évoqués jusqu’ici qu’il convient d’examiner pour produire une analyse d’une recherche. Soulignons que les questions H_4 et H_5 impliquent en particulier d’interroger la place donnée et le « traitement » appliqué aux réponses *préalables* – si partielles ou lacunaires soient-elles – que le schéma herbartien désigne par la notation $R^\diamond$.

5.6. Précisons ici, de façon minimaliste, une liste de questions qu’impliquent de poser les questions H_4 et H_5 ci-dessus :

Σ_0 . Quelle est l’institution mandante de $S(X ; Y ; \heartsuit)$ et quelle en est la pédagogie ?

Σ_1 . Qu'est-ce que X ?

Σ_2 . Qu'est-ce que Y ?

Σ_3 . Qu'est-ce que $\heartsuit$?

Σ_4 . Que font X et Y pour que X « apprenne » $\heartsuit$?

Σ_5 . Qu'est-ce que X aura-t-il pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$?

Σ_6 . Qu'est-ce que Y et certains environnements éventuels de $S(X; Y; \heartsuit)$ auront-ils pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$?

Σ_7 . Quels changements le fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$ a-t-il pu apporter dans les conditions et les contraintes gouvernant son fonctionnement ultérieur ?

Pour espérer pouvoir répondre à ces questions, il convient d'identifier les principaux « paquets » de *conditions et contraintes* qui rendent possibles, facilitent ou au contraire interdisent (ou, du moins, gênent) la survenue de tel ou tel *état* des systèmes didactiques examinés. Notons que la question Σ_5 – Qu'est-ce que X aura-t-il pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$? – comporte une double référence, d'une part au fait que tout ce qui était à apprendre de $\heartsuit$ n'a peut-être pas été appris par X , d'autre part au fait que le fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$ a pu provoquer chez les membres de X des « acquisitions » hétérogènes à l'enjeu didactique officiel $\heartsuit$. On peut dire à cet égard que le fonctionnement du système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$ peut *engendrer* chez $x \in X$ un *rapport* qui n'existait pas jusque-là à une certaine œuvre $O^* \neq \heartsuit$, ou encore peut *modifier* le rapport que x avait déjà à cette œuvre O^* , mais – quelquefois ! – ne rien faire de tel à propos de l'œuvre $O = \heartsuit$, en ne confortant chez x qu'un rapport à $\heartsuit$ grossièrement *inadéquat* au projet social d'enseignement et d'apprentissage concrétisé par la création du système didactique $S(X; Y; \heartsuit)$. La question Σ_6 – Qu'est-ce que Y et certains environnements éventuels de $S(X; Y; \heartsuit)$ auront-ils pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$? – peut paraître plus inattendue encore. Elle renvoie à ce phénomène que, en aidant X à étudier et à apprendre, Y lui-même apprend, à propos de $\heartsuit$ comme à propos d'autres objets $O^* \neq \heartsuit$. Elle rappelle en même temps que d'autres collectifs de personnes encore peuvent apprendre, voire *doivent* apprendre, parce qu'ils participent à des systèmes didactiques *induits* par le fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$ – ainsi en va-t-il souvent des parents, des conjoints, etc. La question Σ_7 – Quels changements le fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$ a-t-il pu apporter dans les conditions et les contraintes gouvernant son fonctionnement ultérieur ? – souligne que les effets d'apprentissage (en subsumant sous cette expression aussi bien ce qui est *désappris*) du fonctionnement de $S(X; Y; \heartsuit)$, sur X d'abord,

sur Y ensuite, sur les personnes et les institutions « en contact » avec $S(X ; Y ; \heartsuit)$ enfin, changent les conditions et les contraintes gouvernant le fonctionnement ultérieur de $S(X ; Y ; \heartsuit)$ ou d'autres systèmes didactiques du type $S(X ; Y ; \heartsuit^*)$ (où $\heartsuit^*$ est une autre œuvre à étudier).

5.7. Ajoutons enfin une dernière question, essentielle, qui fait référence tant à la composante 7 de la liste proposée par J. M. Utts – « The *extent* or *size* of any claimed effects or differences » – qu'aux deux derniers volets d'un article scientifique suivant le patron IMRAD, volets dont on reproduit ici la description vue plus haut :

■ **Results** – what did the study find?

■ **Discussion** – what might it mean, why does it matter, what next? And, last but not least, How does it fit in with what other researchers have found?

Cette ultime question peut être formulée ainsi :

H_6 . Quelle réponse $R^\heartsuit$ la recherche permet-elle d'apporter à la question Q ? Quelles conditions C_6 cela offre-t-il aux recherches futures dans le domaine auquel appartient la question Q et quelles contraintes K_6 cela impose-t-il à de telles recherches ?

Ce qui est en cause ici à travers la référence aux conditions C_6 , c'est le *débat scientifique* autour de la question de recherche Q ; et, à travers les contraintes K_6 , c'est l'organisation même des recherches futures et des questions sur lesquelles elles porteront – ce qui ramène à un nouveau cycle de recherche, qu'ouvre la question H_0 .

5.8. Concluons. Voici d'abord la liste des questions H_k formulées dans ce qui précède :

H_0 . Sur quelle question Q porte la recherche considérée ? Quelle est, aux niveaux pratique et/ou théorique, l'origine (la provenance, la source) de cette question ? Quelles conditions C_0 cela offre-t-il à cette recherche et quelles contraintes K_0 cela lui impose-t-il ?

H_1 . Quelle équipe de recherche $[\Xi, Z]$ conduit la recherche sur Q ? Quelles conditions C_1 cela offre-t-il à cette recherche et quelles contraintes K_1 cela lui impose-t-il ?

H_2 . À quel établissement de quelle r-école la r-équipe $[\Xi, Z]$ appartient-elle ? Quelles conditions C_2 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_2 cela lui impose-t-il ?

H_3 . Quels systèmes adidactiques sont-ils créés ou découpés dans la réalité empirique étudiée et quelles prises d'information sont-elles réalisées sur ces systèmes par la r-équipe $[\Xi, Z]$ dans le cadre de la recherche considérée ? Quelles conditions C_3 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_3 cela lui impose-t-il ?

H_4 . Quel modèle de recherche en didactique est-il mis en œuvre dans la recherche considérée ? Quelles conditions C_4 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_4 cela lui impose-t-il ?

H_5 . Quels modèles praxéologiques de référence des œuvres enjeux didactiques apparaissant dans la recherche considérée sont-ils mis en œuvre ? Quelles conditions C_5 cela offre-t-il à la recherche considérée et quelles contraintes K_5 cela lui impose-t-il ?

H_6 . Quelle réponse $R^\heartsuit$ la recherche permet-elle d'apporter à la question Q ? Quelles conditions C_6 cela offre-t-il aux recherches futures dans le domaine auquel appartient la question Q et quelles contraintes K_6 cela impose-t-il à de telles recherches ?

Comment le questionnement impulsé par ces sept questions se relie-t-il à la question de ce qui fonde la possibilité d'une recherche en didactique des mathématiques ? Le lien est volontairement faible : tout travail qui peut être présenté – par ses auteurs ou par quiconque – comme une recherche en didactique des mathématiques doit être abordé sur la base des réponses que l'on pourra apporter aux questions H_0 à H_6 . Le verdict reste ouvert.